S. 1802.C. 34.

X
~~No. 6~~
Nr 5. F

S 1802 C.34.

# NOVI
# COMMENTARII
## ACADEMIAE SCIENTIARVM
## IMPERIALIS
## PETROPOLITANAE

## TOM. XIX.

pro Anno MDCCLXXIV.




*PETROPOLI*
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXV.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

# SVMMARIVM DISSERTATIONVM,

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS XIX.

a 2 MATHE-

# MATHEMATICA.

## I.

## De valore formulae integralis

$$\int \frac{z^{m-1} \pm z^{n-m-1}}{1 \pm z^{n}} dz$$

## caſu quo poſt integrationem ponitur $z = 1$.

## Auctore L. Eulero pag. 5.

In hac Diſſertatione Illuſtr. *Eulero* propoſitum eſt, binorum inſignium theorematum demonſtrationem ex principiis calculi integralis adornare, ad quae theoremata conſideratio arcuum circularium, qui eundem habent vel ſinum, vel tangentem, iam dudum ipſum perduxerat. Poſſunt vero haec theoremata ita enunciari, vt valor formulae integralis ſupra propoſitae, ſi I°. ſigna ſuperiora adhibeantur, ſtatuatur eſſe $= \frac{\pi}{n \,\text{ſin.}\, \frac{m\pi}{n}}$; tum vero II°. ſi ſigna inferiora in vſum vocentur, ad-

firmetur eſſe $= \frac{\pi}{n \text{ Tang.} \frac{m\pi}{n}}$, integratione a termino $z = 0$ vsque ad $z = 1$, inſtituta et deſignante $\pi$ ſemiperipheriam circuli cuius radius $= 1$. Occurrunt quidem eorundem Theorematum demonſtrationes in *Calculo Integrali* Illuſtr. Auctoris, quum vero ſubſidia integrationis ex alio Eiusdem opere, *Introductione* nimirum in *Analyſin infinitorum*, petantur; hoc loco integrationem formularum ita perficiendam exiſtimauit, vt ſimul principia quibus illa innititur, ſuccincte complecteretur; tum vero pro caſu quo poſt integrationem ponitur $z = 1$, ſingularia artificia quibus ſummatio ſeriarum abſoluitur, dilucide exponenda iudicauit.

Antequam formulae integralis propoſitae integratio ſuſcipiatur, formulae hae integrales ſimpliciores $\int \frac{z^{m-1} dz}{1 + z^n}$ et $\int \frac{z^{m-1} dz}{1 - z^n}$, euoluendae, vbi quidem ante omnia fractio $\frac{z^{m-1}}{1 + z^n}$ in ſuas fractiones ſimplices partiales reſoluenda eſt. Ad hoc autem perficiendum, neceſſum eſt, vt denominatores $1 + z^n$ et $1 - z^n$, in ſuos factores ſimplices reales et imaginarios reſoluantur. Prior ſcilicet $1 + z^n$, caſu tantum quo $n$ numerus impar, vnum factorem habet realem $1 + z$, caeterum omnes ſunt imaginarii, et bini eorum ſemper in hac forma continebuntur $1 - 2z \operatorname{coſ.} \Phi + z^2$. Tum vero $\operatorname{coſ.} \Phi$ ita accipi debet, vt fiat $\operatorname{coſ.} n\Phi = -1$ et $\operatorname{ſin.} n\Phi = 0$, ideoque

que quum anguli quorum coſinus $= -1$, ſint $\pi$, $3\pi$, $5\pi$, $7\pi$ etc. pro $\phi$ hinc ſequentes deducentur valores $\frac{\pi}{n}$, $\frac{3\pi}{n}$, $\frac{6\pi}{n}$ etc. Poſterior $1-z^n$, factorem ſemper habet realem $1-z$, praeterea caſu $n$ numeri paris $1+z$, reliqui vero factores ſemper ſunt imaginarii ſub iſta forma $1-2z\cos.\phi+z^2$ comprehenſi. Tum autem ita $\phi$ accipi debet, vt fiat $\cos.n\phi=1$, ita vt habeantur pro $\phi$ huiusmodi valores $\frac{0\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, $\frac{6\pi}{n}$ etc. Inuentis factoribus denominatorum ſimplicibus, pro fractionibus partialibus ex illis oriundis, quaeri debet numerator, quod hunc in modum perficitur: ſit fractio partialis $\frac{\alpha}{z-f}$, facileque demonſtrabitur caſu $z=f$, eſſe $\alpha=\frac{z^m-fz^{m-1}}{1+z^n}$, at hoc in caſu tum numerator quem denominator euaneſcit, erit ergo

$$\alpha=\frac{mz^{m-1}-(m-1)fz^{m-2}}{nz^{n-1}},$$

vnde poſito $z=f$, $\alpha=\frac{1}{n}f^{m-n}$. Inuentis fractionibus partialibus reliquum eſt, vt integratio inſtituatur et poſt integrationem ponatur $z=0$, ex quo quum integrale euaneſcere debeat, valor conſtantis adiiciendae innoteſcet. Hoc igitur modo Illuſtr. Auctor inuenit binas illas formulas

$$\frac{z^{m-1}dz}{1+z^n},\quad \frac{z^{m-1}dz}{1-z^n},$$

integratas exhibere valores integrales partim Logarithmicos, partim etiam qui arcus circulares inuoluunt. Dum autem ad integrationem formulae propoſitae

poſitae propius accedit Illuſtr. *Eulerus*, primum generatim conſiderat formulas

$$\frac{z^{m-1} + z^{\mu-1}}{1 + z^n} dz \quad \text{et} \quad \frac{z^{m-1} - z^{\mu-1}}{1 - z^n} dz,$$

exiſtente $m + \mu = n$, pro his ſcilicet formulis integralia logarithmica ſe deſtruent, ita vt ſola remaneant, quae arcus circulares inuoluunt. Denique ſi pro his formulis integratis, poſt integrationem ponatur $z = 1$, integralia per binas progreſſiones ſinuum ex arcubus in arithmetica progreſſione, exprimentur, quarum progreſſionum ſummationes ſingularia requirunt artificia, quibus abſolutis, iſta obtinetur concluſio, quod formulae integralis valor, ſignis adhibitis ſuperioribus ſit $\frac{\pi}{n \text{ ſin. } \frac{m\pi}{n}}$ et ſignis inferioribus $\frac{\pi}{n \text{ Tang. } \frac{m\pi}{n}}$.

## II.

## De valore formulae integralis

$$\int \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (l\,z)^{\mu}$$

## caſu, quo poſt integrationem ponitur $z = 1$.

### Auctore L. Eulero pag. 30.

Ex conſideratione arcuum circularium, qui eundem habent vel ſinum vel tangentem, iam olim

olim inuenit Illuſtr. huius diſſertationis Auctor, deſignantibus $m$ et $n$ numeros quoscunque, eſſe

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\frac{1}{3n-m}\text{ etc.}=\frac{\pi}{n\,\text{ſin.}\,\frac{m\pi}{n}}\text{ et}$$

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{3n-m}\text{ etc.}=\frac{\pi}{n\,\text{Tang.}\,\frac{m\pi}{n}}$$

tum vero easdem quoque ſeries oriri ex euolutione formularum integralium in priori Diſſertatione conſideratarum, ſi quidem poſt integrationem ponitur $z=1$. Quod ſi loco $n$ adhibeatur $2\lambda$ et $m$ ponatur $=\lambda-\omega$, prodibit

$$\frac{1}{\lambda-\omega}+\frac{1}{\lambda+\omega}-\frac{1}{3\lambda-\omega}-\frac{1}{3\lambda+\omega}+\frac{1}{5\lambda+\omega}+\frac{1}{5\lambda+\omega}\text{ etc.}$$

$$=\frac{\pi}{2\lambda\,\text{coſ.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}}=\int\frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\frac{dz}{z}$$

et

$$\frac{1}{\lambda-\omega}-\frac{1}{\lambda+\omega}+\frac{1}{3\lambda-\omega}-\frac{1}{3\lambda+\omega}+\frac{1}{5\lambda-\omega}-\frac{1}{5\lambda+\omega}\text{ etc.}$$

$$=\frac{\pi}{2\lambda}\text{ Tang.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}=\int\frac{z^{\lambda-\omega}-z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}}\cdot\frac{dz}{z}.$$

In hac igitur Diſſertatione Illuſtr. Auctori propoſitum eſt, vt oſtendat quomodo ex valoribus harum formularum integralium cognitis, illi deriuari queant, qui reſpondent formulis integralibus in fronte huius Diſſertationis propoſitis, quod nouo et ſingulari artificio perficit. Poſito nimirum

$$\frac{\pi}{2\lambda\,\text{coſ.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}}=S\text{ et }\frac{\pi}{2\lambda}\text{ Tang.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}=T,$$

tam in his valoribus, quam formulis integralibus

quibus aequantur, non ſolum quantitatem $z$ ſed etiam $\omega$, tamquam variabilem ſpectat, vnde primum differentiando poſita ſola $z$ variabili, colligitur

$$\left(\frac{dS}{dz}\right) = \frac{z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \cdot \frac{1}{z},$$

tum vero denuo differentiando, poſita ſola littera $\omega$ variabili, erit

$$\left(\frac{ddS}{dz\,d\omega}\right) = \frac{-z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \cdot \frac{1}{z}\, l z,$$

ex quo viciſſim integratione ita inſtituta, vt ſola $z$ habeatur pro variabili, deducitur

$$\left(\frac{dS}{d\omega}\right) = \int \frac{-z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z}\, l z = \frac{\pi\,\pi.\,\text{ſin.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}}{4\lambda\lambda\,\text{coſ.}\,\frac{\pi\omega^2}{2\lambda}}$$

Simili modo ex altera formula colligitur

$$\left(\frac{dT}{d\omega}\right) = \frac{\pi\,\pi}{4\lambda\lambda\,\text{coſ.}\,\frac{\pi\omega^2}{2\lambda}} = -\int \frac{z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z}\, l z.$$

Si nunc ponatur $\left(\frac{dS}{d\omega}\right) = S'$ et $\left(\frac{dT}{d\omega}\right) = T'$, idem ratiocinium proſequendo, obtinebitur

$$\left(\frac{dS'}{d\omega}\right) = \frac{\pi^3}{8\lambda^3}\left(\frac{2}{\text{coſ.}\,\frac{\pi\omega^3}{2\lambda}} - \frac{1}{\text{coſ.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}}\right) = \int \frac{z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z}\, l z^2$$

$$\left(\frac{dT'}{d\omega}\right) = \frac{\pi^3}{8\lambda^3}\,\frac{2\,\text{ſin.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}}{\text{coſ.}\,\frac{\pi\omega^3}{2\lambda}} = \int \frac{z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z}\, l z^2$$

ſimilique modo pertingere licet ad formulas integrales, quae $l z^3$ vel altiores poteſtates ipſius $l z$ involuunt. Sufficit vero heic obſeruaſſe, eſſe in genere

$$\int \frac{\pm z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 \mp z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z}\, l z^{\nu} = \left(\frac{d^{\nu}S}{d\omega^{\nu}}\right),$$ poſito $S = \frac{\pi}{2\lambda\,\text{coſ.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}}$,

acci-

accipiendum vero eſt ſignum ſuperius ſi fuerit $\nu$ numerus par, inferius autem ſi impar. Simili ratione erit

$$\int \frac{\pm z^{\lambda-\omega} \mp z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z}\, l\, z^{\nu} = \left(\frac{d^{\nu} T}{d\omega^{\nu}}\right), \text{ poſito}$$

$$T = \frac{\pi}{2\lambda} \text{ Tang. } \frac{\pi\omega}{2\lambda},$$

heicque ſignum + valebit pro $\nu$ numero pari, − vero pro $\nu$ numero impari. Inuentio igitur valorum pro formulis propoſitis reducitur ad ſucceſſiuas euolutiones differentialium

$$\left(\frac{dS}{d\omega}\right),\ \left(\frac{ddS}{d\omega^2}\right),\ \left(\frac{d^3 S}{d\omega^3}\right) \text{ etc. } \left(\frac{dT}{d\omega}\right),\ \left(\frac{ddT}{d\omega^2}\right),\ \left(\frac{d^3 T}{d\omega^3}\right) \text{ etc.}$$

Deinde ſi in ſeriebus, quibus S et T aequantur, variabilitas ipſius $\omega$ ſpectetur, conſequemur quoque per ſucceſſiuas differentiationes, valores ipſorum $\left(\frac{dS}{d\omega}\right)$ $\left(\frac{ddS}{d\omega^2}\right)$ etc., vbi quidem obſeruare conuenit, generatim haberi

$$\left(\frac{d^{\nu}S}{d\omega^{\nu}}\right) = \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots 1 \left(\frac{1}{(\lambda-\omega)^{\nu+1}} \mp \frac{1}{(\lambda+\omega)^{\nu+1}} - \frac{1}{(3\lambda-\omega)^{\nu+1}} \pm \frac{1}{(3\lambda+\omega)^{\nu+1}} + \frac{1}{(5\lambda-\omega)^{\nu+1}} \mp \frac{1}{(5\lambda+\omega)^{\nu+1}} \text{ etc.}\right)$$

et ſigna ſuperiora valent ſi $\nu$ numerus impar, inferiora vero ſi $\nu$ numerus par. Eadem ratione erit

$$\left(\frac{d^{\nu}T}{d\omega^{\nu}}\right) = \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots 1 \left(\frac{1}{(\lambda-\omega)^{\nu+1}} \pm \frac{1}{(\lambda+\omega)^{\nu+1}} + \frac{1}{(3\lambda-\omega)^{\nu+1}} \pm \frac{1}{(3\lambda+\omega)^{\nu+1}} + \frac{1}{(5\lambda-\omega)^{\nu+1}} \pm \frac{1}{(5\lambda+\omega)^{\nu+1}} \text{ etc.}\right)$$

de ſignis eadem regula valet, ac ſupra.

 Quem-

Quemadmodum valores formularum integralium iam propoſitarum, per continuam differentiationem formularum S et T eliciuntur, ita per integrationem earundem formularum, dum in $d\omega$ ductae ſupponuntur, aliarum formularum integralium valores exhibentur, cuius rei ſpecimen Illuſtr. Auctor in Additamento Diſſertationi praeſenti ſubiuncto exponit. Nam ſi ponatur

$$\frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}} = V$$

vbi praeter variabilem $z$ etiam $\omega$ vt variabilis conſideratur, per naturam formularum integralium duas variabiles inuoluentium erit $\int S\, d\omega = \int \frac{dz}{z}\, l\, V\, d\omega$, vbi in integralibus $\int S\, d\omega$, $\int V\, d\omega$, ſola $\omega$ vt variabilis tractatur, tum vero in integratione $\int \frac{dz}{z} \int V\, d\omega$, ſola $z$ vt variabilis ſpectatur. Ex hoc igitur principio conſequitur eſſe

$$\int S\, d\omega = l\,\text{Tang.}\, \frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda} = \int \frac{-z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z\, l\, z}$$

ſimilique modo

$$\int T\, d\omega = -l\,\text{coſ.}\, \frac{\pi\omega}{2\lambda} = \int - \frac{z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z\, l\, z}$$

quibus aequari debent expreſſiones ex ſeriebus deductae

$$l\, \frac{(\lambda+\omega)(3\lambda-\omega)(5\lambda+\omega)(7\lambda-\omega)\ \text{etc.}}{(\lambda-\omega)(3\lambda+\omega)(5\lambda-\omega)(7\lambda+\omega)\ \text{etc.}} \quad \text{et}$$

$$l\, \frac{\lambda\lambda}{\lambda\lambda-\omega\omega} \cdot \frac{9\lambda\lambda}{9\lambda\lambda-\omega\omega} \cdot \frac{25\lambda\lambda}{25\lambda\lambda-\omega\omega}\ \text{etc.}$$

Caſuum particularium euolutiones, quae ab Illuſtr. Auctore propoſitae ſunt, Lectores rerum Mathematicarum

ticarum curioſi ex ipſa Diſſertatione haurire non intermittent.

## III.

# Noua Methodus quantitates integrales determinandi.

## Auctore L. Eulero pag. 66.

Refert Illuſtr. huius Diſſertationis Auctor, dum ſaepius ſibi occurriſſent formulae integrales, quae per logarithmum quantitatis variabilis erant diviſae, ſe nunquam perſpicere potuiſſe, ad quodnam genus quantitatum eſſent referendae. De ſimpliciſſima quidem formula huius generis $\int\frac{dz}{lz}$ conſtabat, eam a termino $z = 0$ ad $z = 1$ integratam, infinite magnum exhibere. Nunc vero Illuſtr. Auctori ſucceſſit euolutio plurium huiusmodi formularum $\int\frac{P\,dz}{lz}$, quae poſito poſt integrationem $z = 1$, valores finitae magnitudinis ſortiuntur. Inter ſimpliciores iſtarum eſt haec $\int\frac{(z-1)\,dz}{lz}$, cuius valorem primum quantitatem finitae magnitudinis, deinde reapſe ipſi $l\,2$ aequalem, ſingulari ratiocinio heic oſtendit Illuſtr. Auctor, quo eodem ratiocinio quoque oſtendi poteſt eſſe $\int\frac{(z^m - 1)\,dz}{lz} = l(n+1)$. Verum quum hoc ratiocinium per quantitates infinite paruas procedat, Illuſtris Auctor de planiori Methodo ſollicitus erat, quam Methodum ipſi ſuppeditauit conſidera-

deratio functionum binas variabiles inuoluentium. Scopus autem huius Diſſertationis praecipuus is eſt, vt Methodus iſta perſpicue explicetur. Ex natura functionum, quae binas variabiles $z$ et $u$ inuoluunt, colligitur, quod ſi P aliqua huiusmodi fuerit functio, ſitque

$\int P\,dz = S$, tum eſſe $\int dz\left(\frac{dP}{du}\right) = \left(\frac{dS}{du}\right)$,

ſimilique modo vlterius procedendo

$\left(\frac{ddS}{du^2}\right) = \int dz\left(\frac{ddP}{du^2}\right)$; $\left(\frac{d^3S}{du^3}\right) = dz\left(\frac{d^3P}{du^3}\right)$ etc.

Hoc principium pro praeſenti negotio, vtile euadit, quando functio P ita eſt comparata, vt caſu particulari, quo poſt integrationem ipſi $z$ certus valor vtpote $z = a$, tribuitur, $S = \int P\,dz$ abeat in functionem ſolius variabilis $u$, tum enim integrationes ſupra memoratae locum habebunt, modo poſt ſingulas ponatur $z = a$. Simili quoque modo ex natura functionum binas variabiles inuoluentium, deducitur quod ſit $\int S\,du = \int dz \int P\,du$, vbi in integralibus $\int S\,du$, $\int P\,du$ variabilitas ſolius $u$ ſpectatur, tum vero in integrali $\int dz \int P\,du$ variabilitas ſolius $z$. Hae vero integrationes repeti quoque poſſunt, vt ſit $\int du \int S\,du = \int dz \int du \int P\,du$ et $\int du \int du \int S\,du = \int dz \int du \int du \int P\,du$. Quodſi nunc P eiusmodi ſit functio variabilium $z$ et $u$, vt formulae integralis $\int P\,dz$ valor, certo caſu puta $z = a$, commode exhiberi queat per quantitatem S, quae ſit functio ſolius variabilis $u$, pro eodem caſu $z = a$, formularum integralium $\int dz \int P\,du$, $\int dz \int du \int P\,du$, valores determinari poſſunt, modo formulae $\int S\,du$,

$\int du$

$\int du \int S\,du$ integrationem admittant. Vſum et adplicationem binorum horum principiorum Illuſtr. Auctor variis exemplis illuſtrauit et pro priori ſtatuendo

$$P = \frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}},$$

integrationes illae prodeunt, quas in Diſſertatione praecedenti contemplatus erat. Pro poſteriori ſtatuendo $P = z^u$, inuenitur

$$\int S\,du = l(u+1) = \int \frac{z^u\,dz}{lz}$$

vbi addi debet conſtans C, cuius valor intelligitur infinitus, ob $\frac{z^u}{lz}$ infinitum dum ponitur $z = 1$. At quum valor ipſius C non dependeat ab $u$, C eundem retinebit valorem quicquid ſit $u$, ideoque habebitur

$$\int \frac{z^m\,dz}{lz} = l(m+1) + C \text{ et } \int \frac{z^n\,dz}{lz} = l(n+1) + C,$$

hincque

$$\int \frac{(z^m - z^n)\,dz}{lz} = l\,\frac{m+1}{n+1}.$$

Aſcendendo ad alteram integrationem fiet $\int du \int P\,du = \frac{z^u}{lz^2}$, ideoque $\int du \int S\,du = (u+1)(l(u+1)-1) + Cu + D = \int \frac{z^u\,dz}{lz^2}$, hinc tribus huiusmodi integralibus coniunctis elidi poſſunt conſtantes C et D. Deinde ſi ponatur

P =

$$P = \frac{z^{n-u-1} \pm z^{n+u-1}}{1 \pm z^{2n}}$$

prodibunt formulae integrales, quas Illuſtr. *Eulerus* in Additamento prioris Diſſertationis fuſius contemplatus erat. Praecipue vero heic occupatus eſt in eo, vt principii iam ſtabiliti adplicationem faciat, ad formulas integrales $\int \frac{P\,dz}{z}$, $\int P\,du$, atque $\int \frac{Q\,dz}{z}$, $\int Q\,du$, dum ſcilicet ponitur

$$P = z\,\text{coſ.}\,u + z^2\,\text{coſ.}\,2u + z^3\,\text{coſ.}\,3u + z^4\,\text{coſ.}\,4u + \text{etc. et}$$
$$Q = z\,\text{ſin.}\,u + z^2\,\text{ſin.}\,2u + z^3\,\text{ſin.}\,3u + z^4\,\text{ſin.}\,4u + \text{etc.}$$

Relationes autem iſtae horum integralium inueniuntur, vt ſit

$$\int \frac{P\,dz}{z} = -\int Q\,du;\ \int \frac{dz}{z}\int \frac{P\,dz}{z} = -\int du \int P\,du;$$
$$\int \frac{dz}{z}\int \frac{dz}{z}\int \frac{P\,dz}{z} = +\int du\int du\int Q\,du\ \text{etc.}$$

nec non

$$\int \frac{Q\,dz}{z} = +\int P\,du;\ \int \frac{dz}{z}\int \frac{Q\,dz}{z} = -\int du\int Q\,du;$$
$$\int \frac{dz}{z}\int \frac{dz}{z}\int \frac{Q\,dz}{z} = -\int du\int du\int P\,du\ \text{etc.}$$

Tum vero ſi illi valores integralium deſiderentur, quos conſequuntur poſito $z = 1$, in formulis integralibus, vbi ſolus angulus $u$ pro variabili habetur, ante integrationes iam ſtatuere licebit $z = 1$, ex quo fiet

$$P = \frac{\text{coſ.}\,u - 1}{2(1 - \text{coſ.}\,u)} = -\tfrac{1}{2},\ Q = \tfrac{1}{2}\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}u;$$
$$\int P\,du = A - \tfrac{1}{2}u;\ \int du\int P\,du = B + Au - \tfrac{1}{4}u^2$$
$$\int du\int du\int P\,du = C + Bu + \tfrac{1}{2}Au^2 - \tfrac{1}{12}u^3\ \text{etc.}$$

nec non

$$\int Q\,du = l\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}u;\ \int du\int Q\,du = \int du\,l\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}u,$$

cuius

cuius integralis euolutio non conſtat. Pro formulis variabilem $z$ inuoluentibus, colligitur

$$\int\frac{dz}{z}\int\frac{Pdz}{z}=-\int\frac{Pdz}{z}lz;\ \int\frac{dz}{z}\int\frac{dz}{z}\int\frac{Pdz}{z}=+\int\frac{Pdz}{z}lz^2 \text{ etc.}$$

poſito nimirum $z=1$, ita vt hinc valores integralium

$$\int\frac{Pdz}{z}lz^m \text{ vel } \int\frac{Qdz}{z}lz^m$$

per arcum $u$ expreſſos aſſignari liceat, caſu quo poſt integrationem ponitur $z=1$.

# IV.

## Demonſtratio Theorematis Newtoniani, de Euolutione poteſtatum binomii, pro caſibus quibus exponentes non ſunt numeri integri.

### Auctore L. Eulero pag. 103.

Theorema binomiale, quod quantitatem $(a+b)^n$ euolutam exhibet, fundamentum conſtituit totius Analyſeos ſublimioris, ideoque tanto magis operae pretium eſt, vt eius veritas pro quocunque valore exponentis $n$ ſolide demonſtretur. Modus autem quo Summus *Newtonus* ad hoc Theorema eſt perductus, eius veritatem nonniſi pro exponente $n$ numero integro patefacit; ita vt dubium eſſe queat, an idem Theorema quoque valeat pro exponente $n$, ſiue numero fracto, ſeu negatiuo, ſeu adeo irratio-

 nali.

nali. Dantur enim eiusmodi caſus, vbi formula quaepiam vera eſt, quoties exponens $n$ numerus integer poſitiuus ſupponitur, at a veritate multum abludit, ſi $n$ ſtatuatur numerus fractus; cuius rei inſigne ſpecimen heic exhibuit Illuſtr. *Eulerus*. Hoc igitur incommodum perpendens, demonſtrationem huius Theorematis ex analyſi infinitorum petitam olim tradiderat, quam tamen a vitio petionis principii haud prorſus immunem eſſe, iam agnoſcit; ſiquidem ipſa analyſis infinitorum Theoremate binomiali innititur. Et licet vel maxime haec demonſtratio ex analyſi infinitorum ita adornari poſſet, vt veritas eius pro caſu exponentis $n$ numeri integri tantummodo ſupponatur; tamen negari nequit demonſtrationem ex meris Analyſeos finitorum principiis deductam, eſſe praeoptandam. Huiusmodi autem demonſtrationem in Tomo VIII. Nouor. Commentar. exhibuit Illuſtr. Academiae noſtrae ſocius *Aepinus*, in qua demonſtratione vix quicquam deſideratur, niſi ſi forſan quod in eliciendis valoribus coefficientium pro ſerie, cui $(1+x)^n$ ſupponitur aequalis, multum inductioni ſit tribuendum.

Quae ab Illuſtr. *Eulero* heic proponitur demonſtratio, ita procedit, vt non tam quaeratur quomodo quantitas $(1+x)^n$ euoluenda ſit; ſed potius quinam ſit valor ſeriei

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} x^3 \text{ etc.}$$

de qua quidem ſerie conſtat, eam caſu $n$ numeri integri, aequalem eſſe $(1+x)^n$, generatim vero huius

huius ſeriei valorem indicandum iudicat Illuſtr. Auctor, ſigno $[n]$. Quodſi nunc duo talia ſigna $[m]$ $[n]$ in ſe inuicem ducantur, et productum exprimi ſupponatur per ſeriem

$$1 + A x + B x^2 + C x^3 \text{ etc.}$$

coefficientes A, B, C per litteras $m$ et $n$ determinari euidens eſt, patetque modum quo haec determinatio fit, ab indole litterarum $m$ et $n$ non pendere, ideoque eundem eſſe ſiue $m$, $n$ ſupponantur integri, ſin fracti. At ſi $m$, $n$ numeri integri, eſt omnino

$$[m][n] = (1 + x)^{m+n} = [m + n],$$

vnde generatim quoque

$$[m][n] = [m + n], \quad [m][n][p] = [m+n+p] \text{ et } [n]^i = [i n].$$

Hinc colligitur $[n] = [i n]^{\frac{1}{i}}$, vnde veritas Theorematis pro caſu $n$ numeri fracti innoteſcit, ſi $i$ ita aſſumatur vt $i n$ euadat numerus integer, eſt enim

$$[in] = (1 + x)^{in} \text{ hinc } [in]^{\frac{1}{i}} = (1 + x)^n = [n].$$

Si $n$ denotet numerum negatiuum, ſit $n = -m$, tumque ob

$$[m][n] = [m + n] = [m - m] = [0] = 1, \text{ fit}$$

$$[n] = \frac{1}{[m]} = \frac{1}{(1 + x)^m} = (1 + x)^{-m} = (1 + x)^n.$$

# V.

# Problema Diophantaeum ſingulare.

## Auctore L. Eulero pag. 112.

Problema cuius reſolutionem heic tradit Illuſtr. *Eulerus*, illud eſt, quo duo quaeruntur numeri, quorum productum vtrouis ſiue auctum ſiue minutum euadat quadratum. Quum igitur hos numeros fractos eſſe oporteat, ſtatuantur $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, ex quo colligitur vtramque hanc expreſſionem $xy \pm xz$ et $xy \pm yz$ quadrato aequari, vnde vtraque huius erit formae $aa+bb\pm 2ab$, ideoque $xy$ fit $= aa+bb = cc+dd$, tum vero remanet vt $\frac{abcd}{aa+bb}$ fiat quadratum. Si pro $m$, $n$ tales accipiantur numeri vt ſit $mm+nn=1$, erit $c=ma+nb$ et $d=na-mb$, tum vero ſi ponatur $m=\frac{pp-qq}{pp+qq}$; $n=\frac{2pq}{pp+qq}$, quaeſtio eo reducitur vt expreſſio

$$aabbp^4-2ab(aa-bb)p^3q+2aabbppqq-2ab(aa-bb)pq^3+aabbq^4$$
$$+(aa-bb)^2ppqq$$

euadat quadratum, modo $aa+bb$ fuerit quadratum, quod facile obtinetur, ponendo

$$p=4ab(aa-bb) \text{ et } q=a^4+6aabb+b^4.$$

Verum quum ex ſimpliciſſimis valoribus ipſorum $a$ et $b$, valde magni prodeant pro fractionibus $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, inquirendum iudicauit Illuſtr. *Eulerus* an non ſolutiones in numeris minoribus inuenire liceat. Et licet prima quidem tentamina, quibus ſuperiorem ſolutio-

lutionem contrahi poſſe exiſtimauerit, non ſucceſſerint, aliam tamen deinde inuenit ſolutionem valde planam et facilem. Scilicet ponendo numeros quaeſitos A, B reſpectiue aequales fractionibus $\frac{aa+bb}{2ab}$ et $\frac{cc+dd}{2cd}$, quaeſtio eo reducitur, vt hae fractiones $\frac{aa+bb}{abcd}$, $\frac{cc+dd}{abcd}$ euadant quadrata. Si igitur ſupponantur numeratores quadratis aequari, remanet tantum vt productum $abcd$ fiat quadratum. Conditione qua $aa+bb$, $cc+dd$ ſupponuntur quadrata ſolutio quidem limitatur, at haec conditio ſimul ad ſimpliciſſimos valores deducere videtur. Poſitis iam

$$a=pp-qq;\ b=2pq;\ c=rr-ss,\ d=2rs,$$

fieri debet

$$abcd=2pq(pp-qq)2rs(rr-ss)$$

ita vt quaeſtio reducatur ad problema iam notum, quo duo triangula rectangula in numeris quaeruntur, quorum areae inter ſe ſint aequales.

# VI.

# De Tabula Numerorum Primorum vsque ad Millionem et vltra continuanda; in qua ſimul omnium numerorum non primorum minimi diuiſores exprimantur.

## Auctore L. Eulero pag. 132.

Continet haec Diſſertatio expoſitionem modi, quo Tabula numerorum primorum vsque ad millies mille, vel vltra ſi placuerit, labore haud ita operoſo conſtrui queat. Si enim in huiusmodi Tabula omnes numeri ordine recenſerentur, non ſolum eius conſtructio nimis euaderet operoſa ſed etiam in volumen valde magnum excreſceret; hoc vero incommodum vt euitetur omnes numeri ex hac Tabula excludendi ſunt, quorum diuiſores ſponte innoteſcunt, quales ſunt praeter numeros pares, qui per 3 vel 5 diuiſibiles ſunt. In hanc igitur Tabulam alii non referuntur numeri, niſi quorum diuiſores ſint, vel 7, vel 11 vel 13 vel alii numeri primi maiores, cuiusmodi vsque ad triginta numerantur octo. Numeri igitur hac Tabula comprehenſi, hac forma generali exhiberi poſſunt $30q + r$, vbi $q$ deſignat numerum quemcunque, $r$ vero non niſi octo valores recipere poteſt,

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Quod

Quod ſi nunc in forma quarta huiusmodi Tabula ſit conſtruenda, in qualibet pagina quinquaginta valores litterae $q$ in prima columna verticali locum invenire poterunt, huicque columnae adiungi debent octo a latere, quae reſpondent octo valoribus litterae $r$. Quoniam itaque quaelibet pagina continet quinquaginta valores litterae $q$, vnaquaeque autem $q$ valeat 30, cenſendum eſt quamlibet paginam continere 1500 numerus, illis etiam comprehenſis, qui in Tabula non comparent. Hinc ſi Tabula vsque ad millies mille ſit conſtruenda, *666* paginis abſolvetur, quod volumen pro nimis magno haberi non debet.

Si in genere quaerendi ſint numeri formae $30\,q + r$, qui per numerum primum quemcunque datum P ſint diuiſibiles, notandum eſt quod ſi vnus quispiam innotuerit valor ipſius $q$ ſatisfaciens, omnes alios hinc deriuari poſſe, pro dato nimirum valore ipſius $r$. Nam ſi poſito $q = a$, fiat $30\,a + r$ diuiſibilis per P, erit quoque $30\,q + r$ diuiſibilis per P, ſi pro $q$ aſſumatur aliquis valorum $a + P$, $a + 2P$, $a + 3P$ etc. vel $a - P$, $a - 2P$, $a - 3P$ etc. Si itaque pro qualibet columna verticali prima, conſtet areola, cui numerum P tamquam diuiſorem inſcribi oportet, tum per omnes paginas ſequentes areolae, quibus idem numerus inſcribendus eſt; facillime definientur. In eo igitur praecipuus labor verſatur, vt propoſito numero P, pro ſingulis reſiduis $r$, definiantur minimi numeri $q$, qui formulam $30\,q + r$ diuiſibilem producant per P, nam his numeris inventis

ventis, reliqui valores ipſorum $q$, continua additione numeri P inuenientur. Quomodo vero inueſtigatio iſta minimorum numerorum $q$, propoſitis diuiſoribus ſeptem iſtis numeris

$$7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29$$

pro ſingulis reſiduis $r$, ſit inſtituenda, id Illuſtr. Auctor ſeptem Problematibus oſtendit quibus tamen recenſendis non eſt vt immoremur, quia deinceps totam hanc inueſtigationem octo problematibus generalibus comprehenſus eſt. Haec autem problemata ita enunciantur; propoſito diuiſore primo

$$30a \pm 1;\ 30a \pm 7;\ 30a \pm 11;\ 30a \pm 13$$

pro ſingulis reſiduis $r$, omnes inuenire quotos $q$, vt formula $30q + r$ fiat diuiſibilis, per aliquem diuiſorum propoſitorum. Vt idea ſolutionis horum problematum conſtet, ſeligamus illud quo ponitur diuiſor primus huius formae $30a + 11$. Quum itaque minimus numerus hoc diuiſore ſignandus ſit

$$30.\ 30aa + 30.\ 22a + 121$$

pro hoc numero erit

$$q = 30aa + 22a + 4 \text{ et } r = 1.$$

Iam pro reliquis numeris per $30a + 11$ diuiſibus, quia tantum numeri deſiderantur impares, ad numerum ſupra inuentum continuo addatur

$$60.\ a + 22 = 2a^{(q)} + 22^{(r)}, \text{ ſiue } (2a + 1)^{(q)} - 8^{(r)}$$

hocque modo iſta conficietur Tabella

| $q$ | $r$ |
|---|---|
| $30.aa + 22.a + 4$ .... | 1 |
| $30.aa + 24.a + 4$ .... | 23 |
| $30.aa + 26.a + 5$ .... | 15 |
| $30.aa + 28.a + 6$ .... | 7 |
| $30.aa + 30.a + 6$ .... | 29 |
| $30.aa + 32.a + 7$ .... | 21 |
| $30.aa + 34.a + 8$ .... | 13 |
| etc. | etc. |

hinc vero ſeligantur illi quoti $q$, qui reſpondent octo reſiduis aſſumtis 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Reſidua enim eiusmodi vt 15, 21, 5, 27, 3, 25, ſponte liquet, numeros exhibere per 5 aut 3 diuiſibiles, qui ex Tabula excluſi ſunt. Singulis his octo Problematibus Illuſtr. *Eulerus* Tabulas ſubiunxit, quae minimos exhibent quotos pro diuiſoribus formae propoſitae, millionario minoribus, ad ſingula octo reſidua relatos. Tum vero ex octo his Tabulis, Tabulam generalem ſubſidiariam confecit, qua pro omnibus diuiſoribus primis a 7 vsque ad 1000, minimi quoti ſingulis octo reſiduis reſpondentes, exhibentur. Hoc autem praeſtito, opera ipſa Tabulas conficiendi in eo conſiſtet, vt procedendo a numeris primis minoribus ad maiores, pro quouis ex Tabula ſubſidiaria exquiratur quotus $q$, qui pro reſiduo $r$ exhibet numerum minimum formae $30.q+r$ per propoſitum diuiſibilem. Quodſi hic diuiſor dicatur D, in columna verticali quaeratur valor ipſius $q$, tumque in eadem linea horizontali, ſub reſiduo $r$

illa inuenietur areola cui inſcribi debet diuiſor propoſitus D. Reliquae autem areolae eodem diuiſore implendae inuenientur, ſi pro $q$ ſucceſſiue adhibeantur, $q + D$, $q + 2D$, $q + 3D$ etc. Areolae quae diuiſore non impletae ſunt, ſignentur littera $p$, quae ſignificabit numerum huic areolae reſpondentem eſſe primum. Vſus autem huiusmodi Tabulae facilis eſt, nam propoſito numero quocunque, quem examinare quis voluerit, vtrum primus ſit nec ne, et quosnam habeat diuiſores, diuidet iſtum numerum per 30, quotusque dabit valorem litterae $q$, reſiduum vero erit $r$. In prima igitur columna verticali quaeratur numerus $q$, et a latere inuenietur areola ſub reſiduo $r$, quae oſtendet vtrum numerus ſit primus, vel quemnam habeat minimum diuiſorem. Vt conſtructio ipſius Tabulae eo facilius procedat, totus labor inter plures perſonas diſtribui poſſet, in ſeptem ex: cauſſa penſa, ita vt primum a 0 ad 5000, ſecundum hinc ad 10000, tertium ab hoc termino ad 15000, quartum ab hoc ad 20000, quintum ad 25000, ſextum ad 30000 et denique ſeptimum ad finem porrigeretur. Quo autem melius perſpiceretur idea huius laboris, Tabulam adnectendendam iudicauit Illuſtr. *Eulerus*, qua valores ipſius $q$ a 33300 ad 33400 comprehenduntur, ideoque illi numeri, qui millies mille proxime ſunt minores.

VII.

# VII.

## De reſolutione Polygonorum rectilineorum. Diſſertatio Prima.

### Auctore A. I. Lexell pag. 184.

Cum iam diu regulae pro reſolutione triangulorum, Geometris familiares fuerint, mirari licet, cur non reliquarum figurarum rectilinearum reſolutionem adgreſſi ſunt; quod ſine dubio ea de cauſſa factum eſt, quia reſolutio reliquarum figurarum ad communes Trigonometriae regulas facile reducitur. Interim tamen ad promouendos fines Geometriae vtile erit, ſi pro hac reſolutione regulae exhiberi queant generales et a praeceptis Trigonometriae independentes, quo in negotio Auctor huius Diſſertationis praeuntem habet Cel. *Lambert*, qui ideam Tetragonometriae ſeu doctrinae de reſolutione quadrilaterorum primus exhibuit. Quum pro quolibet Polygono praeter parter eius principales, latera et angulos quibus includitur, conſiderari quoque poſſint lineae diagonales et anguli, quos hi ſiue inter ſe, ſeu cum lateribus Polygoni conſtituunt facile intelligitur, ſi ſingularum harum partium quis rationem habere voluerit, rem fore valde difficilem et operoſam; quare Auctor noſter conſiderationem tantum partium principalium ſuſcipiendam iudicauit, imprimis quod tota haec inueſtigatio ad bina prin-

cipia aeque generalia, ac facilia, reuocari queat. Sunt vero iſta bina Theoremata:

*Si Polygoni rectilinei anguli externi dicantur* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots \lambda$ et *latera ipſis interiacentia reſpectiue deſignentur per* a, b, c, d ... l *erit*

I. $a\,\text{ſin.}\,\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) + c.\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) \ldots + l\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \lambda) = 0$

II. $a\,\text{coſ.}\,\alpha + b\,\text{coſ}(\alpha+\beta) + c.\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma) \ldots + l\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \lambda) = 0$

vbi quidem ſin. $(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \lambda)$
poni poteſt 0 et coſ. $(\alpha + \beta + \gamma \ldots\ldots + \lambda) = 1$.

Per combinationem binorum horum Theorematum, omnes eae aequationes inuenientur, quae reſolutioni vniuscuiusque Polygoni inſeruiunt, id quod Auctor noſter exemplo Tetragoni, Pentagoni, Hexagoni et Heptagoni ita illuſtrauit, vt ſimul haud obſcurum eſſe poſſit quomodo res pro alio quocunque Polygono ſit perficienda. Vt vero applicatio aequationum ſic inventarum ad reſolutionem Polygonorum fieri queat, praeprimis noſſe oportet, quaenam quaeſtiones pro vnoquoque Polygono reſoluendae occurrant. Notum autem eſt in vnoquoque Polygono requiri, vt ſi laterum numerus ſit $n$, partes cognitae habeantur $2n - 3$, ex quibus partibus ſaltem $n - 2$ latera occurrere oportet. Nam ſi tantum $n - 3$ latera haberentur cognita, problema non eſſet determinatum, ſiquidem vnus Polygoni angulus, ſemper ex reliquis determinatur. In aequatione igitur pro reſolutione Polygoni, ſemper $2(n - 1)$ occurrent partes, et prouti inter has partes vel omnia habeantur latera, vel

tantum

tantum $n - 1$, bina ſolutionum habebimus genera. In priori vbi $n$ occurrunt latera et $n - 2$ anguli, quaeri poteſt vel quodpiam laterum, datis reliquis numero $n - 1$, et angulis numero $n - 2$, vel quispiam angulorum, datis omnibus lateribus et angulis numero $n - 3$. In poſteriori genere ex datis lateribus numero $n - 1$ et angulis numero $n - 2$, quaeritur quispiam angulorum. Praeter haec autem bina genera, habetur adhuc tertium vbi ex angulis $n - 1$ et lateribus $n - 2$ quaeritur quodpiam laterum, diſtinguendum autem eſt hoc genus a prioribus, quia heic omnes Polygoni anguli reapſe ſunt cogniti. Quaeſtiones ad vnamquamque claſſem pertinentes, in ordines redigi poſſunt, ſi attendatur ad ſitum, quem partes omiſſae inter ſe tenent; quum igitur pro prima claſſe bini anguli in aequatione non reperiantur, ſolutionum ordines varios habebimus, prouti inter hos duos angulos vnum, bina, trina, etc. latera interiacent; hocque modo pro numero laterum ſiue impari $2m + 1$, ſiue pari $= 2m$, conſequemur $m$ ordines. In Secunda claſſe vnum latus, vnusque angulus ex aequatione exſulant, igitur ſolutionum ordines cognoſcentur ex ſitu, quem tenet angulus omiſſus reſpectu lateris omiſſi; hincque pro numero laterum impari $2m + 1$, haec claſſis dabit $m + 1$ ordines, pro numero autem pari $2m$, tantum $m$ ordines. In Tertia claſſi reſpiciendum ſolummodo eſt, ad ſitum lateris quaerendi, reſpectu lateris omiſſi. Solutiones vero ſub vnoquoque ordine primae claſſis contentae reperientur, ſi attendatur ad latera

 et

et angulos, qui reſpectu angulorum omiſſorum eundem tenent ſitum, et quidem ſi numerus laterum fuerit impar $2m+1$, vnusquisque ordo $2m+1$ diuerſas praebebit ſolutiones, vnde ſolutionum numerus $m(2m+1)$; ſin vero fuerit numerus laterum par, duo caſus iterum erunt ſecernendi, prouti ſcilicet hic numerus ſit vel pariter par, vel impariter par. Pro priori caſu poſito numero hoc $= 4m+2$, $2m$ ordines primae claſſis praebebunt $4m+2$ ſolutiones, vnusque $2m+1$ ſolutiones, hinc omnes coniunctim $(4m+1)(2m+1)$ ſolutiones. Pro numero laterum pariter pari $4m$, $2m-1$ ordines dabunt $4m$ ſolutiones, vnus vero tantum $2m$, hinc omnes iunctim $2m(4m-1)$. Pro ſecunda claſſe poſito numero laterum impari $2m+1$, ordines $m$ dabunt $2m$ ſolutiones, vnus vero $m$ ſolutiones tantum, hinc omnes iunctim $m(2m+1)$. Poſito numero laterum pari, vnusquisque ordo praebet tot ſolutiones, quot anguli ſunt Polygoni demto vno, hincque omnes iunctim pro numero laterum impariter pari $(4m+1)(2m+1)$ et pro numero pariter pari $2m(4m-1)$. Hincque regula iam deducitur generalis, ſiue numerus laterum fuerit par ſeu impar, ſi exprimatur per N ſemper eſſe numerum ſolutionum ad binas priores claſſes pertinentium $N(N-1)$. Hinc pro triangulo habebuntur 6, pro Tetragono 12, pro Pentagono 20, pro Hexagono 30; ſicque vlterius. Ad finem huius Diſſertationis ſubiunxit Cl. Auctor ſolutiones nonnullorum Problematum ex doctrina combinationum, quae cum hoc argumento quandam habent affinitatem.

tem. Sunt vero iſta Problemata: pro quolibet Polygono determinare numerum diagonalium, qui poſito numero laterum N erit $\frac{N(N-3)}{2}$; inueſtigare numerum angulorum in quolibet Polygono ſiue laterum ſeu diagonalium, qui erit $= \frac{N(N-1)(N-2)}{2}$ tum vero inuenire quot modis data puncta quorum numerus eſt M, ita lineis rectis iungi poſſunt, vt oriatur Polygonum numero laterum N. Numerus autem horum modorum erit

$$= \frac{M}{2N}.(M-1)(M-2)(M-3)\ldots.(M-N+2)(M-N+1)$$

hinc ſi $M = N$, fiet $= \frac{1}{2}(N-1)(N-2)(N-3)\ldots 2.\ 1.$

PHYSICO-

# PHYSICO - MATHEMATICA.

## I.

## Commentatio phyſico mechanica generalior principii de coëxiſtentia vibrationum ſimplicium haud perturbatarum in ſyſtemate compoſito.

### Auctore D. Bernoulli pag. 239.

Principium hoc, de quo in variis diſſertationibus, Commentariis noſtris et Berolinenſibus inſertis, profundiſſimae iam extant Cel. Auctoris disquiſitiones, idem in hac diſſertatione aliquot exemplis atque ipſo experientiae teſtimonio confirmat. Omnia corpora ſonora infinite multos ſonos et infinite multos modos correſpondentes peragendi vibrationes ſuas inuoluere et in qualibet vibrationum diuerſa ſpecie inflexiones partium corporis diuerſo modo fieri, Cel. Auctor exemplo a chordis muſicis deſumpto oſtendit; in eiusmodi enim chorda ſaepe ſimul duo pluresue ſoni re ipſa auditu percipiuntur; ita, vt attentus muſicus, praeter ſonum fundamentalem eiusque duodecimam, tertiam quoque maiorem octauae duplicis ſiue decimam ſeptimam ſimul ſonantem diſtinguere queat, nec niſi nimia cum ſono fundamentali conſonantia impediatur, quominus et ipſam octavam

vam cum octaua duplice ſubaudiat. Porro ſi lamina chalybea longiuſcula, cuiusmodi plures combinatae ludum muſicum gallice carillon dictum efformant, e filo ſuſpenſa percutiatur; plerumque pro re nata quatuor pluresue ſoni diuerſi, diſtincti atque pleni; immo in choro muſico ſinguli ſoni, non tenore ſolum, ſed et modificatione inſtrumenti diſcrepantes, etſi ſimul ſonantes et in eodem aëre ad aurem propagati, diſtincte tamen e longinquo auribus percipiuntur, manifeſto indicio, innumeras vibratiunculas in qualibet particula aërea excitatas minime ſeſe perturbare, ſed ſingulas, ac ſi vnaquaeque ſola eſſet, ſuam illibatam tueri indolem. Sonos laminarum eiusmodi chalybearum ingenioſa methodo ſcrutatus eſt Cel. Auctor; analoga ei, qua *Newtonus* radios diverſicolores examini ſuo ſubmiſit; cum ſcilicet intellexiſſet, laminam inter vibrandum figuram aſſumere anguiformem, quae axem in diuerſis punctis interſecet totidemque quaſi *nodos* efficiat: methodum hinc deduxit ſagaciſſimus Vir, ex eiusmodi lamina percuſſa inter plures, quos edit, ſonos datum quendam ſolum, ſuppreſſis ceteris omnibus, eliciendi; quaelibet ſcilicet vibrationum ſpecies et quilibet ſonus iſti ſpeciei debitus determinatum ſuum habet eiusmodi nodorum numerum; ita, vt pro ſimpliciſſima vibratione et ſono fundamentali duo, pro ſequente tres et ita porro nodi ſint orituri, quorum poſitiones calculo definire Cel. Auctor iam olim docuit. Si ergo v. c. ſonum, ordine ſuo tertium adeoque vibrationibus quatuor nodos formantibus debitum,

ſolum ex lamina percuſſa elicere placeat; notetur iſte ſonus in monochordo; tum lamina in ſingulis quaternis nodis digitis comprimatur et percutiatur quo facto ea eundem, ſi experimentum omni cura inſtituatur, ſonum eſt editura. Hiſce praemiſſis Cel. Auctor vſum principii ſui latiſſime patentem in abſtruſiſſimis huius argumenti quaeſtionibus euoluendis comprobat, et in hac theoria plene contineri oſtendit, quicquid catenae ſuſpenſae, et chordae tenſae ſiue vniformiter ſiue inaequaliter craſſae, motibus ſuis reciprocis, proprium habent; vbi notandum eſt, vibrationes illas in ſyſtemate coëxiſtentes alias eſſe aliis tardiores; in chordis vero vniformiter craſſis vibrationem cuiuscunque ordinis exacte ſubmultiplam eſſe vibrationis fundamentalis; vnde intelligitur, ſi omnes omnium ordinum vibrationes *ſimul* incipiant, chordas vniformes pro qualibet curua initiali poſt quamuis vibrationem fundamentalem ad ſtatum quietis momentaneae reduci; quam proprietatem primus animaduertit Ill. *D'Alembert*; cui tamen theorematí hanc addit conditionem Cel. Auctor, vt radius oſculi ſeu curuaturae pro quouis puncto pro infinito id eſt infinities maiore, quam longitudo chordae, poſſit aſſumi; vnde omnes variationes, quae per ſaltum fiunt, excluduntur. Poſſunt vero etiam vibrationes diuerſorum ordinum *non ſimul* incipere; quem caſum quoque complectitur principium Bernoullianum, vnde Cel. Auctor ſolutionem inde petitam multo generaliorem exiſtimat ea, quae a ſummis Geometris eſt allata. Inprimis vero inſignis illius

*illius* eſt vſus in ſoluendis quaeſtionibus eiusmodi ad ſiſtemata corporum numero finitorum quotcunque pertinentibus, quae non videntur alia methodo pertractari poſſe; quod argumentum Cel. Auctor exemplo eoque ſimpliciſſimo illuſtrat, dum ſcilicet conſiderat pendulum bimembre, in quo duo corpora filo intermedio connexa, ſuperne altero filo ſuſpenduntur motibusque reciprocis agitantur, quorum phaenomena hic acutiſſima analyſi indagantur.

## II.

## Commentatio phyſico-mechanica ſpecialior de motibus reciprocis compoſitis, multifariis, nondum exploratis, qui pendulis bimembribus facilius obſeruari poſſunt, in confirmationem principii ſui de coëxiſtentia vibrationum ſimpliciorum.

### Auctore Dan. Bernoulli pag. 260.

Praeſens diſſertatio plenam continet euolutionem vibrationum penduli eiusmodi bifili, duobus penduſculis onuſti, cuius modo mentionem fecimus. Breuitas partim, partim quoque commoditas, quo ſcilicet experimenta, calculos theoriae confirmatura, euaderent faciliora, ſuaſerunt, vt Cel. Auctor ca-

ſum ſimpliciſſimum eligeret et ſimul quoque pendulum illud bifilum ſtatueret aequimembre. Duo itaque elementa ſuperſunt, a quorum variis conditionibus vibrationes penduli abſolutae variantur; nempe 1°. *relatio inter maſſas binorum corporum* et 2$^{do}$ *diſtantiolae illae* ad quas ambo illa ponduſcula in primo motus abſoluti momento concipiuntur diducta: Singulae huius penduli vibrationes abſolutae componuntur ex duabus oſcillationibus regularibus binorum iſtorum corporum; pro vtraque aſſignari poteſt longitudo penduli ſimplicis iſochroni; et ratio inter longitudines duorum horum pendulorum ſimplicium pendet a relatione inter maſſas ponduſculorum; poſita ſcilicet maſſa corporis ſuperioris $= m$; inferioris $= \mu$ erunt duae illae longitudines quaeſitae $= l \mp l \sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}}$ vbi ſignum ſuperius pro oſcillationibus celerioribus, inferius pro tardioribus valet, et $l$ deſignat longitudinem fili vtriusque. Si itaque ſtatuatur $l - l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} : l + l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \alpha^2 : \beta^2$, vbi $\alpha < \beta$; tempora oſcillationum ſimplicium erunt commenſurabilia, quae autem ſi denotentur per $t$ et T; fingatur in genere $T = n\,t$. His poſitis Cel. Auctor diuerſarum hypotheſium euentus percurrit, prouti $n$ fuerit numerus aut rationalis isque vel integer vel fractus aut irrationalis; et ſingulis caſibus phaenomena totius vibrationis abſolutae inueſtigat, oſtenditque, quomodo experimentis haec theoria vlterius poſſit confirmari; vbi etſi negari non poteſt, inter perpetuas rerum omnium variationes motibus iſtis poſt magnum eorum numerum ab alienis impedi-

pedimentis phyſicis vix euitabiles anomalias inductum iri; experimentatoris tamen intelligentis oculos emicantia veritatis veſtigia haud effugient. In fine diſſertationis Cel. Auctor notatu maxime dignum affert exemplum de ſingulari oſcillationis genere in bilance obſeruatae, quod ipſis Cel. Auctoris verbis hic recenſebimus:

*Cum aliquando in libra, maiori eaque ſubpigra, alteram lancem forte fortuna ad latus diducerem moxque rurſus dimitterem, accidit vtique, vt protinus hinc inde oſcillaret nec ab initio lanx oppoſita de loco moueretur; mox autem et haec quoque agitari ſenſimque maiores oſcillationes formare, dum e contrario lanx prior motum ſuum oſcillatorium gradatim perderet tandemque fere quieſceret; hoc ipſo momento altera maximum motionis gradum, initiali lancis ſociae fere aequalem, attingebat: tunc ordine contrario eaedem mutationes repetebantur, vsque dum prima lanx motum ſuum primitivum integrum reſumeret ſociaque quieti ad momentum redderetur; haec autem oſcillationum communicatio ac reciprocatio diu ſatis ſe manifeſtabat.* Atque huius motus oſcillatorii a Cel. *Bernoullio* hic deſcripti determinatio, dubium eſt nullum, quin ſit maxime ardua et ſingularia prorſus poſtulet Analyſeos artificia.

# III.
# De Oſcillationibus minimis penduli quotcunque ponduſculis onuſti.

## Auctore L. Eulero pag. 285.

Initio huius diſſertationis Ill. Auctor hoc argumentum a primis inde mechanicae principiis repetit; conſiderat ſcilicet pendulum tenuiſſimum ſiue grauitatis expers, cui penduſcula quotcunque data in datis a ſe inuicem interuallis fuerint alligata, et motus qualiscunque oſcillatorius initio impreſſus; tum pro determinato aliquo ſitu, quem elapſo quodam tempore hoc pendulum eſt habiturum, Ill. Auctor vires acceleratrices inueſtigat, quibus ſingula illa ponduſcula ſollicitantur; vnde per notas mechanicae leges totidem adipiſcitur aequationes differentiales ſecundi gradus, quibus motus determinatio continetur. Vix autem in reſoluendis his aequationibus, quae pro quantiscunque etiam oſcillationibus valent, pedem proferre liceret; niſi excurſus penduli ſtatuantur quam *minimi*; hac vero conditione etſi inuentae aequationes haud parum contrahuntur, nec niſi vnicam continent variabilium dimenſionum; earum tamen reſolutio adeo non eſt obuia, vt potius non niſi plane ſingularibus ſuccedat calculi artificiis, quae Cel. Auctor hic dilucide exponit; vbi ſimul euincitur, principium Bernoullianum, quo omnes huiusmodi oſcillationes ex duabus vel pluribus motibus oſcil-

oſcillatoriis ſimplicibus et regularibus componi ſtatuuntur, in primis motus principiis eſſe fundatum.

Cum vero haec Ill. Auctoris reſolutio vix ad plura, quam quatuor, ponduſcula felici ſucceſſu poſſit adhiberi; alia eaque maxime elegans methodus hoc problema perfectiſſime reſoluendi adiungitur; quae vero iam hac ſingulari difficultate premitur, vt vix vllo modo ad caſum determinatum, quo penduli ſtatus initialis praeſcribitur, poſſit, ſi vel tria tantum ſint ponduſcula, adaptari. Sub finem diſſertationis Ill. Auctor in ſpecie eum caſum euoluit, quo omnia ponduſcula et omnia eorundem interualla ſupponuntur aequalia, eumque ad aequationem ordinis *n* perducit, cuius ſi elici poſſent radices, completa huius caſus haberetur reſolutio.

## IV.

## De motu oſcillatorio binarum lancium ex libra ſuſpenſarum.

### Auctore L. Eulero pag. 302.

Singulare hoc motus oſcillatorii genus ab Ill. *Bernoullio* obſeruatum ſupra iam in Summario diſſertationis ſecundae Ill. *Bernoulli* deſcripſimus. In hac, de qua agimus, diſſertatione Ill. *Eulerus* id operam dat, vt motus huius ſingularis admirabilia phaenomena, quibus euoluendis ſubſidia analytica ad motus

tus oſcillatorios definiendos a Geometris adhiberi ſolita vix ſufficere videntur, e primis inde motuum principiis perſcrutetur omnesque eius circumſtantias ſollicite expendat. Prima, quae in obſeruationis expoſitione ſe offert, circumſtantia eſt ea, vt libra dicatur fuiſſe *ſubpigra*; vnde centrum grauitatis iugi infra centrum motus eſt ſtatuendum. Conſiderat itaque Ill. Auctor libram iam circa centrum ſuſpenſionis in motu conſtitutam ita, vt ſub certis angulis iugum a poſitione horizontali, vtraque vero lanx a verticali deflectat; Locum vtriusque lancis per coordinatas orthogonales ſupra linea horizontali per centrum motus ducta conſtitutas deſignat, et vires acceleratrices inueſtigat, quibus vtraque lanx in directione vtriusque coordinatae ad motum ſollicitatur, quaeque partim a grauitate, partim a tenſionibus filorum oriuntur; vnde igitur per principia mechanica iam quatuor obtinentur aequationes differentio-differentiales; quibus inuentis motum quoque iugi conſiderat, cuius acceleratio angularis quintam ſuppeditat; quibus quinque aequationibus tota determinatio motuum et iugi et lancium continetur; ſiquidem eae totidem incognitis ſcilicet praeter binas tenſiones filorum inclinationi iugi et binis angulis, quibus vtraque lanx a linea verticali deflectit, ad quoduis tempus definiendis adeoque vero tam iugi quam lancium ſitui aſſignando, ſufficiunt. Transcenderet vero harum aequationum reſolutio vires analyſeos, niſi iſtos angulos quam *minimos* ſtatuere et omnem huius argumenti disquiſitionem ad oſcillationes

lationes

lationes *minimas* reſtringere vellemus. Hac vero conditione admiſſa, Ill. Auctori ſolutionem difficillimi huius problematis feliciter ad finem perducere licuit; ex qua iam intelligitur, phaenomena a Ill. *Bernoullio* obſeruata non niſi in lancibus *ſubpignis* locum habere poſſe; ſi vero centrum grauitatis iugi cum centro motus congrueret, iugo nullum plane motum oſcillatorium impreſſum iri, nec vllum fore, quamdiu iugum, inclinatum licet, quieſcit, inter vtriusque lancis oſcillationes commercium; de aliis vero lancibus, in quibus centrum grauitatis adeo altius eſt puncto ſuſpenſionis, plane non eſt quaeſtio; ſiquidem iugum vel minima inclinatione ſubuertitur. His itaque expeditis Ill. Auctor in phaenomena horum motuum adcuratius inquirit; orditur a caſu ſimpliciſſimo, quo iugum in ſitu horizontali immobile relinquitur, lancibus autem ambabus qualiscunque motus imprimitur; fiet, vt et iugum et lances regulari motu oſcillatorio neutiquam ſeſe inuicem turbante ſeorſim ferantur; vnde hic caſus in obſeruatione Bernoulliana certe locum non obtinuit. Supponit itaque Ill. Auctor, iugo ſub initium experimenti certam quandam inclinationem fuiſſe inductam eamque tum ſibi libere permiſſam; in qua hypotheſi iterum tres caſus ſunt diſtinguendi; aut enim, dum haec inclinatio iugo conciliaretur, binae lances interim quieuerunt, aut alterutri tantum aut ambabus ſimul aliquis motus imprimebatur. Hos ſingulos caſus Ill. Auctor ad examen reuocat; primo caſu ambas lances perpetuo

 in

in quiete, oſcillante licet iugo, perſeueraturas docet theoria; ſecundo altera lanx nullum plane motum conciperet, certe quamdiu oſcillationes lancis ad motum concitatae pro minimis haberi poſſunt; reſtat ergo tertius caſus, in quo fortaſſis obſeruatio Bernoulliana locum habere videri debet; quod vt pateſceret, Ill. Auctor libram hac ratione motam in determinato quodam exemplo perſequitur et poſitionem tam iugi, quam lancium ad ſingula ſemiminuta ſecunda aſſignat; neque vllibi vlla admirabilium iſtorum phaenomenorum, de quibus diximus, alternae ſcilicet oſcillationis et quietis lancium, veſtigia deprehendit. Facile itaque hinc intelligitur, aliquam librae circumſtantiam in hac diſſertatione non fuiſſe in computum adductam, quae in libra, circa quam Ill. *Bernoullius* obſeruationem inſtituit locum obtinuit; nec latere Ill. Auctorem haec differentia potuit, ſiquidem hic contemplatus eſt libram non niſi circa centrum motus ſui mobilem; quod ipſum ergo centrum tanquam immobile eſt ſpectatum; dum in libra Bernoulliana, non ex hoc centro, ſed ex ſcapo ſuſpenſa, ipſum illud motus centrum cum tota libra eſt mobile et ex impulſu alterutrius lancis reipſa ad motum ſollicitatur.

Hunc igitur caſum Ill. Auctor peculiari diſſertatione complectitur

V.

# V.

## Explicatio motus oſcillatorii mirabilis in libra maiore obſeruati.

### Auctore L. Eulero pag. 325.

Ad ſolutionem praeſentis problematis iam per ea, quae in praecedente diſſertatione ſunt expoſita, via egregie ſternitur; ſola enim expreſſio pro acceleratione angulari iugi lancis iam ex *trutina* ſuſpenſae adeoque reſultans inde aequatio differentio-differentialis diuerſam a priori formam induet. Ill. Auctor tamen hoc negotium iterum a primis principiis repetit, et propoſitam quaeſtionem ad quinque aequationes differentiales ſecundi gradus reuocat, quibus ſub conditione oſcillationum *minimarum* reſoluendis ſublimia Analyſeos artificia adplicat. His feliciter expeditis origo mirabilis illius phaenomeni, alternae ſcilicet quietis et oſcillationis binarum lancium, ſtatim manifeſtis ſe prodidit indiciis; ſi enim deflexionem vnius lancis a linea verticali per $\eta$, eam alterius per $\vartheta$ deſignemus; expreſſiones horum angulorum ſequentes formas ſunt adeptae; $\eta = P + Q$; et $\vartheta = P - Q$, vbi litterae P et Q quantitates indicant cum tempore certa lege variabiles; ſi igitur, durantibus librae oſcillationibus, euadat $P = Q$, lanx prior ad maximas excurſiones, poſterior ad quietem perueniet; vbi vero temporis ſucceſſu deinceps fiet

$P = -Q$; commutata erit ſcena, quieſcet prior lanx, altera maximos adepta gradus oſcillationis ſuae; quae viciſſitudo, vsque dum omnis motus fuerit exſtinctus, ſtatis recurret temporibus; ita, vt motus illi obſeruati, etſi prima fronte videntur inextricabiles, iam pleniſſime ex hac theoria poſſint explicari. Ceterum cum ſolutio completa ſex quantitates arbitrarias per integrationem ingreſſas inuoluat; facile intelligitur, infinitam motuum varietatem et complura ſingularia phaenomena hic locum habere poſſe; vnde Ill. Auctor pro dato ſtatu initiali euolutionem aliquot caſuum ſpecialium in fine ſubiungit.

## VI.

## De motu turbinatorio chordarum muſicarum; vbi ſimul vniuerſa theoria tam aequilibrii, quam motus corporum flexibilium ſimulque etiam elaſticorum breuiter explicatur.

### Auctore L. Eulero pag. 340.

In motibus chordarum vibrantium infinitam dari varietatem, omnes earundem theoriae a Geometris allatae abunde teſtantur; hoc tamen non obſtante datur motus vibratorii genus, quod iſtae theoriae, quamuis late pateant, non ſunt complexae, cum

cum ſcilicet motus oſcillatorii non, vt communiter ſupponi ſolet, in eodem ſemper plano peraguntur, ſed ſingula chordae vibrantis puncta motu quaſi *turbinatorio* circa axem reuoluuntur; cuiusmodi motus in craſſioribus chordis adeo oculis diſtingui poſſunt. Circa hoc igitur motus oſcillatorii genus penitius euoluendum praeſens verſatur Ill. Auctoris diſſertatio, in qua vniuerſa theoria de filorum et perfecte flexibilium et elaſticorum aequilibrio et motu ad ſummum perfectionis gradum euecta merito eſt cenſenda. Ceterum cum haec diſſertatio meris abſoluatur calculis analyticis: Geometras grauiſſimi huius argumenti curioſos ad eam ipſam ablegamus.

# PHYSICA.

## I.

## Deſcriptio Phalli quinquanguli ſeu fungi Sinenſium *Mo-ku-ſin.*

## Auctore Reuer. P. Cibot S. I. pag. 373.

Transmiſſam a Reuer. P. *Cibot* e Soc. I. Misſionario Pekinenſi deſcriptionem Fungi apud Sinas prouenientis, gallico ſermone exaratam, Academia dignam cenſuit, quae Commentariis ſuis inſeratur, tanto magis, quo rarius producta naturalia in penetralibus Chinae genita Phyſiophilis innoteſcunt et quo curioſior variis momentis deſcripta viſa eſt ſpecies, quam ad *Phallos* botanicorum pertinere opinamur, nouamque huius generis minime adhucdum numeroſi acceſſionem ſtatuimus, a forma *ſtipitis pentagona, capituloque quinqueualui* praecipue determinandam. Applauſum quoque mereri videtur opinio auctoris de fungorum poſſibili multiplicatione per artificiale ſolum certis ſpeciebus proprium, et de proprietate radicum putridarum certae arboris productioni peculiarium inter fungos ſpecierum fauente. Nollemus tamen inde quidquam pro generatione aequiuoca, et contra corporum organicorum ortum e ſemine, vel ouo vel qualicunque ſtamine proprio concludi. Etenim in artificiali fungorum productione hoc tantummodo praeſtari

ſtari poſſe putamus, vt ſolum laetiori incremento et multiplicationi peculiarium ſungorum adaptatum praebeatur atomariis fungorum ſeminibus in ima atmoſphaera obuolitantibus; non vero, hoc ipſum ſolum geniali virtute ſuos fungos ſponte producere poſſe, ſanus hodie quisquam exiſtimabit. Neque hoc auctoris noſtri ſententia eſſe videtur, licet a Chinenſium forte philoſophia haud abhorreat. — Certo vero certius eſt fungorum multas ſpecies ſub determinatae arboris vmbra ſolum e putreſcentibus arboris ramulis frondeque paratum inuenire, cui praeſertim addictae et adaptatae ſunt, imo multas certarum radicum vel arborum quaſi paraſiticas eſſe; Idque adeo in propatulo cuiuis adtentius inſpicienti erit, vt etiam apud plebem ruthenicam complures Agaricorum Boletorumque ſpecies ab arbore, ſub qua praecipue prouenire et colligi ſolent, v. gr. Quercu, Populo, Betula, Pinu, cet. denominatae fuerint et vulgo appellentur; idemque apud alias gentes, fungorum licet minus curioſas, obtinet.

## II.

## De ſtructura Veſiculae ſelleae Leonis.

### Auctore C. F. Wolff pag. 379.

Inter eas partes, quae in corpore leonis imprimis notabiles viſae ſunt, et quae in ſua ſtructura aliquid ſingulare habent, etiam veſicula ſellea referen-

da

da eſt, cuius interna cauitas tot plicis multifariis inſtructa, in tot loculamenta cellasque per ipſas illas plicas diuiſa eſt, vt non vnam cauitatem, ſeu receptaculum, ſed potius congeriem multarum cauitatum et folliculorum hanc leoninam veſiculam eſſe dixeris. Eo magis autem haec ſtructura Anatomicorum attentionem excitauit, quo minus ſimile quid in homine et in aliis animalibus obſeruatur, et quo facilius ex eadem calidum illud leonis temperamentum aliquo modo explicari poſſe videtur. Totius igitur veſiculae, praeſertim vero internae eius ſtructurae et plicarum, quae varii generis ſunt, deſcriptio in hac diſſertatione exhibetur, iconeque illuſtratur, quae minutiſſime omnia exprimit, quaecunque in illa obſeruari potuerunt.

Ductum cyſticum ſolum, qui ſolus in homine cauernoſus eſt, aequalem intus et plicis priuatum eſſe videbis. Collum autem et partem corporis fere dimidiam inſignibus pulcherrimisque plicis plenam reperies. Maxime notabilis eſt in alio loco tanta plicarum conglomeratio, quibus tota cauitas veſiculae adeo occupatur, vt nonniſi exiguum foraminulum, quod acum vix admittit, ſuperſit, et quibus igitur veſicula fellea in duos quaſi ſaccos ſeparatos diuiditur, ſolo illo foramine inter ſe communicantes. Plicae ipſae variae figurae et fabricae ſunt. Alibi ſimplices dantur ſemilunares et diſtinctae, alibi multae in vnum glomerem compoſitae ſunt. Vt veſicula plicis intus, ita plicae porro rugis in ſuis ſuperficiebus exornantur, quo tota illius

facies

faciës interna criſpa efficitur. Fundus tamen ſolis, quas dixi rugis, nullis veris plicis gaudet, et generatim maxima plicarum copia in parte veſiculae poſteriori poſita eſt. Iconem explicatio comitatur eorum, quae in icone continentur, ex qua vel ſola lector ideam veſiculae felleae leonis haurire poterit.

## III. IV et VI.
## Equus Hemionus, Tetrao arenaria et Lacerta apoda,
## deſcribente P. S. Pallas p. 394. ſeq. et pag. 435.

Abſoluto itinere Cl. Auctor nouas animalium ſpecies, quas per borealem Aſiam obſeruauit, ſucceſſiue illuſtrare pergit, atque praeſenti Commentariorum Volumini inſerit Quadrupedis, Auis atque Amphibii, quae imprimis memoriae digna ſunt viſa, hiſtoriam.

Quadrupes, noua eſt Solidipedum minime numeroſo generi acceſſio, intermedium inter Equum et Aſinum animal, ſed quod humano generi non magis, quam Africana Zebra, ſeruire hactenus didicit. Credit illud antiquioribus Zoologis, ARISTOTELI, THEOPHRASTO, atque AELIANO aliqualiter notum atque Muli foecundi ſeu Hemioni, quo ipſe vtitur noſter, nomine indicatum fuiſſe. Recentiores, praeſertim Ill. Viri LINNÉVS et BVFFO-

NIVS *Comes*, deſcriptionis accuratioris defectu, cum Onagro ſeu fero Aſino confuderunt *Hemionum*, a quo tamen multis notis differt. Soli illum MESSERSCHMIDIVS et GMELINVS *ſen.* in patriae Mongoliae confiniis curioſius inſpexerant, neuter vero, vti nec Miſſionarii apud Sinas, deſcriptionem eius ſatis accuratam dederunt. Pleniſſimam igitur Hemioni hiſtoriam atque delinationem verbis pariter et caeſtro exaratam propoſuit Auctor, cum Anatome, curatisque proportionum menſuris, quibus omnibus de ſpecie huius animalis dubitatio eximitur, quod magnitudine et interna ſtructura proxime ad Caballum accedit, caput eodem, imo et Aſino longius habet, aurium proportione et cauda vaccina cum Zebra, anguſtis veſtigiis formaque vngularum cum Aſino, ſtatura reliqua et elegantia membrorum magis cum hybrido Mulo conuenit; ſed propriam et priuam habet conformationem dorſi arcuatam et ſimul carinatam, inſignemque ſub naribus cartilaginum prominentiam verruciformem. Non deſperat Auctor etiam hanc Equi ſpeciem cicurari et, ſi detur opera, in humanos vſus domeſticam reddi posſe, quod ob celeritatem curſus ſummam, qua pollet hoc animal, optabile vtique eſſet.

*Tetrao*, quam *arenariam* cognominauit Auctor, media inter *Katam* Arabum ſeu Alchatam ornithologis dictam, et Tetraonem paradoxam alibi noſtro deſcriptam, in deſertis Tataricis auſtralioribus circa Caſpium lacum patentibus, inter arenoſos maxime colles, obſeruata eſt. Videtur, quod Auctor poſt

exara-

exaratam typo deſcriptionem monet, eadem eſſe, quam HASSELQVISTIVS in itinere Palaeſtino nomine *Tetraonis orientalis* imperfectius deſcripſit. Et quandoquidem is ſuam in ſaltibus Natoliae, et forſitan in Aegypto quoque, hybernis menſibus obſervari dicat, veroſimillimum eſt has aues e deſertis ſupra Mare Caſpium poſitis boreali bruma in tepidas Aſiae minoris regiones depelli.

Mirum et ambiguae ſtructurae eſt *Amphibium*, quod tertio loco deſcribit noſter et *Lacertam apodam* appellat. Singula enim ſtructurae externae atque internae membra Lacertis ita ſimile illud reddunt, vt pedibus additis Lacertam omnibus numeris abſolutam ſiſteret. Verum anticis artubus plane caret, licet cicatrix eorum quaſi locum indicet et ruga inde longitudinalis per latera dorſales ſquamas a ventralibus dirimat prorſus vt in Angue ventrali CATESBAEO delineata, quae forte affinis Lac. apodae noſtrae deprehendetur; poſticorum autem pedum minima tantum rudimenta adſunt, quibus tamen oſſa linearia, iliacorum ſuccedanea, reſpondent, quemadmodum etiam ſterni vicariam compagem oſſeo-cartilagineam Anatome huius Amphibii detexit. Superfluum foret ſingula hic denuo exponere, quum Auctor in exordio deſcriptionis ſummariter enumerauerit ea, quibus anomalam hancce ſpeciem cum Lacertis conuenire curioſiore inſpectione atque diſſectione didicit.

Subiecit Auctor, occaſione *Vermium* in ventriculo Lacertae apodae repertorum, qui cum *Trichuridibus* a *Cel.* ROEDERERO in ſingulari humanae

g 2 gentis

gentis epidemia obſeruatis omnino conueniunt, binas alias vermium ſpecies, quae cum iſtis, nonnullisque Taeniarum ſpeciebus hamoſa roſtri armatura conueniunt.

## V.

## Obſeruationes in Gado Lota inſtitutae.

## Auctore I. T. Koelreuter. p. 424.

In vulgatiſſimo piſce, Lota Gallorum, aliqua obſeruauit Cl. Auctor, quae excerpta Commentariis Academiae inſeri digniſſima viſa ſunt. Equidem pleraque minutiores ſtructurae inconſtantias concernunt, ea tamen et ipſa vtilitate non carent ſua; vti v. gr. ex obſeruato numero vertebrarum variabili diſcimus, non eſſe, vt Ichthyologi recentiſſimi contenderunt, conſtantiſſimum hunc numerum. Maxime vero momentoſa eſt obſeruatio Auctoris Cl. circa plenarium ductus aërei in veſica natatoria Lotae defectum, plexusque vaſorum ſingulari diſtributione veſicam illam pingentium. E quibus ſumma cum veri ſpecie concludit noſter: peculiari hocce apparatu a natura peragi ſecretionem vel liberationem aëris ſanguine ſubacti, eandemque in omni natatilium genere locum habere; dum iis quoque piſcibus, qui aëreo ductu in oeſophagum inſerto inſtructam veſicam natatoriam habent, is ductus, quippe valuula ad oſtium oeſophageum oppoſita clauſus, non ad introſuſcipien-

dum

dum ex oeſophago aërem extraneum, ſed ad ſuperfluum ſecretionis inteſtinum aërem emittendum, deſtinatus videatur.

## VII.

## Acerina; piſcis, ad percae genus pertinens, deſcriptus;

## Auctore A. I. Güldenſtaedt p. 455.

Piſcis Ichthyologis huc vsque ignotus, ſed in hac diſſertatione ſecundum ſitum, numerum, figuram, proportionem atque colorem partium externarum internarumque deſcriptus, et dimenſionibus atque icone, cuius ſquamae vitio Chalcographi iuſto latiores ſunt, repraeſentatus, ad *Percae* genus, ab Ichthyologis neotericis determinatum, pertinet et proxime ad *Percam cernuam* LINNAEI accedit, a qua primo intuitu capite longo et roſtro producto differt. *Acerina* hic piſcis dicitur, quum veroſimile ſit, hanc veterum denominationem magis ad noſtrum piſcem, mare nigrum inhabitantem, quam ad *Percam cernuam*, quae in mari nigro deficit, pertinere, prouti Ichthyologi eandem non niſi dubitantes inter Synonyma *Percae cernuae* receperunt.

# VIII.

## Sex auium deſcriptiones;

## Auctore A. I. Güldenſtaedt p. 563.

Sex auium ſpecies, quarum ab Ornithologis nulla mentio facta eſt, in montoſis et campeſtribus inter mare caſpium et nigrum obſeruatae proponuntur, ad genera *Linneana* referuntur, nominibus triuialibus imbuuntur, ab adfinibus rite ſeparantur, ſecundum oeconomiam et mores, nec non ſecundum figuram, numerum, colorem et proportionem partium externarum, addita ſexus differentia, deſcribuntur, atque iconibus magnitudinem naturalem repraeſentantibus illuſtrantur.

Harum prima *Loxia Rubicilla*, quae magnitudine et colore proxime ad *Enucleatorem*, roſtro ad *Coccothrauſtem* accedit, colore trunci coccineo, albido et cineraſcente lepide variegato, remigibus rectricibusque nigris roſeo fimbriatis a congeneribus diſtinguenda; ad alueos glareoſos torrentium Caucaſi habitans et baccis Hippophaës Rhamnoidis victitans.

Secunda auis *Tanagra Melanictera* dicitur, cui magna ſimilitudo eſt cum *Fringilla triſti*; attamen ab illa pariter ac ab congeneribus ſeparatur: colore corporis ſupra ferrugineo, ſubtus flauo; alis caudaque fuſcis; et pileo maris nigro a fronte vsque ad nucham extenſo. Habitat illa in promontoriis caucaſicis

caſicis in dumetis Rhamni Paliuri, inter ramos illius nidificat et ſeminibus eiusdem victitat.

Tertia auis nomine *Muſcicapae Melanoleucae* imbuta eſt, quae ſimillima *Motacillae Leucomelae* in Tomo XIV. Commentariorum propoſitae. Illa differt a congeribus: colore corporis albo; gula, capiſtro et alis nigris; rectricibus albis, apice nigris. In fruticetis ad fluuiorum ripas per aeſtatem in Georgia campeſtri degit.

Quarta, *Motacilla Erythrogaſtra* appellata, *Motacillae Phoenicuro* ſummopere analoga eſt. Diſtinguitur a congeneribus: roſtro et pedibus atris, criſſo et cauda caſtaneis; mare corpore et alis nigris, pileo et alarum ſpeculo albo; femina corpore toto et alis cinereis. Aeſtate in Hippophaëtis Caucaſi peracta, cum prole ibidem progenita adulta auſtrum verſus migrat.

Quinta auis dicta eſt *Scolopax Subarquata*, quae ſtatura *Phaeopi*, quo dimidio minor, roſtro arcuato, pedibus nigris, dorſo cinereo, gula, pectore et abdomine ruffo et fuſco vndulatis, criſſo albo maculis fuſcis picto, a congeneribus dignoſcenda. Hoſpitatur haec migratoria auis per aeſtatem ad littora maris caſpii et fluuii Tanais, ſed vix vltra oſtium fluuii Choper adſcendens.

Sexta auis *Scolopax cinerea* denominata eſt, quae *Scolopace Totano* aliquantum minor, roſtro recuruo, colore ſupra cinereo, infra albo et pedibus fuſco-rubentibus facile a congeneribus ſeparanda, quibus

quibus *Recuruiroſtram Auocettam* affinitate intermedia adiungit. In inundatis ad margines lacuum ſalſorum circa mare caſpium obuiorum per aeſtatem frequens haec migratoria auis adeſt, quae per hyemem auſtraliora petit.

# IX.

## Quatuor Fucorum ſpecies deſcriptae ab I. Lepechin pag. 476.

Species Fucorum quatuor, in mari Albo lectas, hac in diſſertatione proponit Auctor. Harum duae foliis intus cauis euidenter ab omnibus huc vsque notis differunt, et nouum ordinem in Fucorum familia ſibi vindicare videntur. A cauitate interna foliorumque figura denominationes quoque petitae ſunt; et alter FVCVS TVBVLOSVS; alter vero SACCATVS dicti ſunt. Prior *caule tereti ramoſo, ramis oppoſitis vel alternis, foliis longis tubuloſis*; poſterior autem *caule plano ramoſo ramis oppoſitis, foliis ouato oblongis tumidis intus cauis definiuntur*. Reliquae duae, quae ſequuntur, ſpecies, folia plana gerunt, et Noſtro ſub nominibus fuci DICHOTOMI et fuci GRAMINIFOLII veniunt. Alter eorum definitur quod ſit *Fucus acaulos, frondibus dichotomis, membranaceis, ligulatis vndique proliferis*; alter vero quod ſit *caule tereti, ſubdiuiſo, tubuloſo, foliis linearibus duplici ſerie poſitis, planis membranaceis.*

IX.

# IX.
# Minera argenti cornea chemice examinata et deſcripta ab E. Laxmann pag. 482.

Oſtenſis in limine huius diſſertationis non ſolum variis illis ſententiis, quas de minera hac rariſſima fouerunt mineralogi, ſed etiam potioribus illis momentis quae ad hiſtoriam illius naturalem pertinere poſſunt; variae obſeruationes, tam notas characteriſticas, quam geneſin eius ſpectantes, ſequuntur. Inter illas attentionem merentur: odor ille ſpecificus, non ingratus, debilis, mixturam vitriolico argillaceam vel margaceam indicans, cuius nulla apud Autores mentio occurrit; vt et methodus liquandi, quae prorſus eadem, ac Docimaſtae de *minera argenti vitrea* praeſcribunt. Ratione geneſeos minera cornea, a praedicta *vitrea* ſcilicet deriuatur, cuius variae aetates, ex factis permultis obſeruationibus mineralogicis in ipſis fodinis ordine naturali deſcribuntur. Pertinet itaque rariſſima illa *minera cornea* autorum ad tertiam aetatem *minerae argenti plumbei coloris* Agricolae, quam recentiores *vitream* nominarunt; eſtque argentum hic, in mineris nimirum puris, nec acido ſalis communis, nec alcali, nec ferro ſed ſulphure mineraliſatum, quod variis experimentis metallurgicis abunde demonſtratur.

# ASTRONOMICA.

## I.

## Commentatio Hypothetica de periculo, a nimia Cometae appropinquatione metuendo.

### Auctore L. Eulero pag. 499.

In Aſtronomia vix proponi poteſt quaeſtio maioris momenti, quam ea, qua disquiritur, de periculo quod telluri noſtrae metuendum ſit a nimia Cometae cuiusdam appropinquatione ad eam. Quamuis autem occaſione notiſſimi iſtius Cometae, qui Anno 1759. apparuit, varia ab Aſtronomis tradita fuerunt, pro explicandis perturbationibus, quas Cometae ab actionibus Planetarum patiuntur; ea tamen vix ad praeſentem quaeſtionem adplicari poterunt, in qua ſupponitur Cometam tam prope ad tellurem accedere, vt eius actio forſan ipſam actionem Solis exſuperare poſſit. Pro hac igitur quaeſtione enodanda, Illuſtr. *Eulerus* in praeſenti Diſſertatione caſum hypotheticum conſiderauit, quo Cometa in ipſo plano Eclipticae incedens et motu rectilineo ad Solem pergens, orbitam telluris in eiusmodi loco interſecare ſupponitur, vt tellus ſimul in hoc loco reperiatur ac Cometa ad eum perueniret, ſi nimirum ante mutuum occurſum, nulla eſſet horum

horum Planetarum actio inter ſe; accedente igitur actione mutua telluris et Cometae, quaeritur quasnam mutationes, tam terra quam Cometa inde ſint paſſuri. Traditis igitur formulis generalibus, pro perturbationibus tam motus terrae, quam Cometae, Illuſtr. Auctor hunc motum ſepoſita primum actione mutua Cometae et telluris conſiderat, vbi quidem neglecta excentricitate orbitae telluris, hanc orbitam vt circulum contemplatur, cuius radius aequetur diſtantiae mediae telluris a ſole, et motum terrae in hoc circulo vniformem, aequalem ſcilicet motui medio, ſupponit. Motus vero Cometae maioris facilitatis cauſſa, vt rectilineus conſideratur, qualis ſuppoſitio eo magis admitti debet, quod obliquitas curſus hoc in negotio vix quicquam turbet. Pro Cometa igitur in hac linea recta incedente, inveſtigari debent, celeritas quam ad certam a Sole diſtantiam habet et tempus quo ab hac diſtantia, ad Eclipticam pertingeret, mutua actione Terrae et Cometae plane neglecta, in hoc autem loco Eclipticae conflictus oriretur terrae et Cometae, quem tamen ob mutuam actionem fortaſſis euitabunt. His praemiſſis, dum actio telluris et Cometae mutua in computum ducitur, certa conſtituenda eſt epocha, a qua hanc actionem ſatis fieri ſenſibilem cenſeri debet, et quum maſſae Cometarum prae maſſa Solis, valde ſint exiguae, haec epocha proxime ante ipſum tempus coniunctionis terrae et Cometae conſtitui debet, quemadmodum heic ab Illuſtr. *Eulero* epocha duobus circiter diebus ante coniunctionem conſtitui-

 tur.

tur. Tempore huius epochae ſtabilito, quum aequationes differentiales quibus perturbationes exprimuntur, ita ſint comparatae, vt ſolita methodus appropinquandi ad eas adplicari non queat, Illuſtr. *Eulerus* aliam viam ſibi non ſupereſſe iudicauit, quam vt tam motum terrae quam Cometae per exigua temporis interualla proſequeretur. Scilicet ſi tam locus terrae, quam Cometae determinetur per coordinatas orthogonales ad certam directionem fixam relatas, et pro ipſo tempore epochae non ſolum valores harum coordinatarum conſtiterint, ſed etiam celeritates tam Cometae, quam terrae ſecundum directiones coordinatarum cognitae habeantur; inquirendum eſt quinam valores elapſo minimo tempore ab hac epocha, non ſolum coordinatis, ſed etiam celeritatibus tribuendi ſint, id quod facile praeſtatur. Nam ſi coordinatae telluris pro tempore epochae dicantur X et Y, Cometae vero $x$ et $y$, celeritates que pro tellure exprimantur per $\frac{dX}{d\tau}$, $\frac{dY}{d\tau}$ et pro Cometa per $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dy}{d\tau}$, elapſo minimo tempore $d\tau$ dum valores coordinatarum iam ſupponuntur eſſe $X'$, $Y'$, $x'$, $y'$, habebitur

$$X' = X + dX + \tfrac{1}{2}ddX;\quad Y' = Y + dY + \tfrac{1}{2}ddY;$$

$$x' = x + dx + \tfrac{1}{2}ddx;\quad y = y + dy + \tfrac{1}{2}ddy \text{ et}$$

$$\frac{dX'}{d\tau} = \frac{dX}{d\tau} + \frac{ddX}{d\tau};\quad \frac{dY'}{d\tau} = \frac{dY}{d\tau} + \frac{ddY}{d\tau};\quad \frac{dx'}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau} + \frac{ddx}{d\tau};$$

$$\frac{dy'}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau} + \frac{ddy}{d\tau}$$

vbi quidem valores differentialium ſecundi gradus, ex aequationibus pro perturbationibus allatis elici debent.

Pro

Pro valore autem interualli $d\tau$ obſeruandum eſt, illum eo minorem accipi debere, quo propior Cometa telluri fit, quoniam in maxima appropinquatione actio Cometae in tellurem valde ſenſibilis fieri poteſt. Ad praeſcriptum igitur huius Methodi, Illuſtr. *Eulerus* pro caſu hypothetico a ſe conſiderato, in quo maſſa Cometae maſſam terrae aequare ſupponitur, motum tam telluris quam Cometae, per interualla continuo minora, a duobus ante coniunctionem diebus, vsque ad coniunctionem proſequitur; tum vero poſt coniunctionem dum Cometa a tellure recedit, interuallis continuo maioribus aſſumtis, eundem motum examinat. Concluſiones vero ex his calculis deductas ſingulari Tabula complexus eſt, ex qua primo intuitu liquet, quomodo motus terrae et Cometae ob mutuam actionem afficiatur. Et de tellure quidem liquet, Cometam in motu eius angulari vix quidquam turbare, diſtantiam vero terrae a Sole ob actionem Cometae aliquantulum augeri. De Cometa autem conſtat eius receſſum a terra, ipſi acceſſui fere eſſe ſimilem, vnde eorum opinio penitus refellitur, qui exiſtimarunt Cometam, dum ad tellurem proxime accedit, in ſatellitem abire poſſe. In vniuerſum autem hinc colligitur, nec Cometam, nec tellurem in motu ſuo nimis magnam perturbationem pati; ſed potius poſt mutuum occurſum eorum motum haud multum diſcrepantem fore ab eo, qui locum habuiſſet, ſi nullus contigiſſet occurſus; id quod potiſſimum inde euenit, quia in receſſu Cometae, effectus qui in acceſſu producebatur, qua

maximam partem deſtruatur; hoc vero facile eluceſcit, ſi ſtatus telluris et Cometae poſt ceſſantem actionem mutuam, comparetur cum eo ſtatu in quo vterque verſatus fuiſſet eodem tempore, ſi actio mutua plane locum non habuiſſet. Cognito autem loco et motu, ſiue Planetae ſeu Cometae poſt mutuam actionem, definiri quoque poteſt motus, quo vterque deinceps circa Solem reuoluatur; vbi quidem pro praeſenti caſu, ratione motus terrae colligitur, in excentricitate vix vllam ſenſibilem produci mutationem, ſemiaxem autem orbitae telluris parte ſua bimilleſima augeri, ex quo in tempore periodico producetur augmentum ſeptem horarum. Quod autem orbitam Cometae attinet, eius excentricitas ab vnitate vix tantillum differet, ſemiaxis autem transuerſus haberetur aequalis 4658750 ſemidiametris terrae, hincque tempus periodicum colligeretur 2716 annorum, quod ſepoſita actione mutua plane eſſe debuiſſet infinitum.

## II.
## De differentia inter parallelum Lunae verum et apparentem.

### Auctore A. I. Lexell pag. 549.

Notum eſt, Aſtronomos differentiam inter aſcenſiones rectas binorum aſtrorum, ita obſeruare ſolere, vt binorum filorum micrometri, vel reticuli

culi normaliter ſe decuſſantium, vnum ita diſponant, vt ab aſtro praecedente radi videatur, tum vero appulſus aſtrorum ad alterum filum priori normale notent; interuallum enim temporis inter momenta appulſus praelapſum, ſi debito modo in angulum horarium conuertatur, dabit differentiam inter Aſcenſiones rectas binorum Aſtrorum. In hac igitur Methodo ſupponitur, quod aſtrum praecedens motu ſuo circulum parallelum circa polum aequatoris deſcribere videatur, quod quidem cum veritate non plane conciliari poteſt, ſi aſtrum praecedens, tempore inter binos appulſus effluxo, declinationis ſuae, vel Parallaxis ſi aliquam habuerit, vel etiam refractionis, ſenſibilem patiatur mutationem. Dum itaque, comparatio inſtituitur Lunae cum aliqua ſtella fixa, ſi Luna ſtellam praecedat, hoc obſeruandi modo adhibito, differentia aſcenſionum rectarum limbi Lunae ad filum normale adpellentis et ſtellae fixae non niſi aliqua adhibita correctione inuenitur; quia nimirum filum quod a limbo Lunae raditur, non prorſus coincidit, cum circulo maximo, qui normalis eſt, ad circulum declinationis Lunae, tempore quo alteruter limbus Lunae per filum normale tranſit. Angulum iſtum inter parallelum Lunae verum et adparentem, quatenus a mutata Parallaxi altitudinis producitur, primus determinauit Celeb. *Mayerus* formula ſatis concinna, cuius tamen demonſtrationem reticuit; hanc vero formulam minus exactam reputans Cel. *de la Lande*, aliam in eius locum ſubſtituit, quae ipſi verior viſa eſt. In hac

igitur

igitur Diſſertatione Clar. Auctori id propoſitum eſt, vt non ſolum de angulo ex mutata Parallaxi oriundo, ſed etiam de eo, qui ex mutata declinatione et refractione producitur, rigoroſe inquireret. In hoc autem negotio, quum variatio Parallaxeos, praeprimis in altitudinibus Lunae non nimis exiguis potiſſimum trahat momentum, angulum Paralleli Lunae veri et apparentis, primum ea ſub hypotheſi inueſtigandum iudicauit, qua ratio Parallaxeos tantum habetur, declinatio autem Lunae plane ſupponitur inuariabilis et refractionis nulla prorſus habetur ratio. Ratiociniis igitur Geometricis et omni rigore veris, colligit fore *Tangentem huius anguli*, *aequalem Tangenti parallaxeos aſcenſionis rectae pro Luna ductae in ſinum declinationis adparentis*, ex qua formula dum valor pro Tangente parallaxeos aſcenſionis rectae euoluitur, deducitur alia quae cum Mayeriana proxime conſentit; ita vt illa a *Mayero* allata ad veritatem proxime accedat, quod omnino ſecus eſt cum formula Cel. *de la Lande*, haec enim cum formula Auctoris noſtri omnino conciliari nequit; diſcrimine quidem tam magno exiſtente, vt ex formula Cel. *de la Lande* angulus duplo maior nonnunquam reperiatur, quam ope formulae ab Auctore allatae, immo vt formula Cel. *de la Lande* angulum hunc exhibeat euaneſcentem, cum eſſe debeat maximus. Quamuis autem de veritate formulae ab Auctore allatae, nullum ſuboriri poſſit dubium, propter rigoroſas demonſtrationes quibus munita eſt, ne tamen inſignis Aſtronomi Cel. *de la Lande* opinioni, nimis tribu-

tribuant Aſtronomiae cultores; quae circa demonſtrationem ab illuſtri hoc Aſtronomo pro ſua formula ſtabilienda, allatam, merito deſiderantur, Auctor huius diſſertationis perſpicue expoſuit. Tranſitu deinde facto ad illam hypotheſin, qua etiam declinatio ſupponitur variabilis, formulam ſatis exhibet concinnam, qua valor anguli inter parallelum Lunae verum et apparentem exhibetur, conſiderata variabilitate tam Parallaxeos, quam declinationis; vbi quidem iterum ſepoſita variatione declinationis, eadem pro iſto angulo inuenitur expreſſio, quam ſupra inuenerat. Denique angulum quoque inueſtigat ex mutata refractione oriundum, vbi pro hoc angulo prodit formula, quae vix cum illa, quam tradit Cel. *de la Lande* in ſua Aſtronomia, conciliari poterit.

## III.

## Nonnulla loca Lunae, ex obſeruationibus circa occultationes fixarum a Luna, Anno 1774. Petropoli, et alibi inſtitutis, determinata.

### Auctore A. I. Lexell pag. 580.

Quum anno 1774. appulſus Lunae ad inſigniores quasdam ſtellas Hyadum, Petropoli et aliis in locis ſaepius obſeruare licuerit, Cl. Auctor huius Diſſertationis operae pretium duxit computo harum

obſeruationum inſtituto, determinationes locorum Lunae inde eruere. Obſeruationes vero in computum ductae ſequentes ſunt:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Immerſio | α Tauri | Stockholmiae | D. 22. Ian. | $6^h. 0'. 26''\frac{1}{2}$ | Styl. Nou. |
| Emerſio | - - | ibidem | | 7. 15. 51 | |
| Immerſio | α Tauri | Petropoli | 22. Ian. | 7. 2. 52 | |
| Emerſio | - - | ibidem | | 8. 20. 44 | |
| Immerſio | γ Tauri | Stockholmiae | 18. Febr. | 6. 39. 51 | |
| Emerſio | - - | ibidem | | 7. 19. 33 | |
| Immerſio | α Tauri | Pariſiis a *Meſſier* | 14. Apr. | 6. 26. 0 | |
| Emerſio | - - - | - - - | | 7. 35. 59 | |
| Immerſio | α | ibidem ab *Athelmi* | | $6. 25. 54''\frac{1}{2}$ | |
| Emerſio | - - - | - - | | 7. 35. 53 | |
| Immerſio | eiusdem | Verſaliis | | 6. 25. 1 | |
| Emerſio | - - | ibidem | | $7. 35. 10\frac{1}{2}$ | |
| Immerſio | α | Geneuae | | 6. 47. 56 | |
| Emerſio | - - | ibidem | | $7. 56. 36\frac{1}{2}$ | |
| Immerſio | α | Mediolani | | 7. 3. 7 | |
| Emerſio | - - | ibidem | | 8. 10. 42 | |
| Immerſio | α | Petropoli | | 8. 28. 34 | |
| Emerſio | - - | ibidem | | 9. 3. 20 | |
| Immerſio | 2 θ Tauri | Petropoli | d. 28. Aug. | $11. 48. 45\frac{1}{2}$ | |
| Emerſio | - - | ibidem | | 12. 32. 29 | |
| Immerſio | γ Tauri | Pariſiis | d. 24. Sept. | $14. 22. 31\frac{1}{2}$ | |
| Emerſio | - - | ibidem | | $14. 43. 37\frac{1}{2}$ | |
| Immerſio | γ | Petropoli | | 16. 59. 53 | |
| Immerſio | γ Tauri | Pariſiis | d. 18. Nou. | 5. 55. 25 | |
| Emerſio | - - | ibidem | | $6. 52. 47\frac{1}{2}$ | dubia |
| Immerſio | γ | Petropoli | | 8. 8. 37 | |

Emerſio

| | | | |
|---|---|---|---|
| Emerſio - - | ibidem d. 18. Nou. | $9^h.14'.5''$ | |
| Immerſio 1 θ Tauri | Pariſiis | 11. 5.28 | |
| Emerſio - - | ibidem | 11. 20.43½ | |
| Immerſio α Tauri | Pariſiis | 15. 35.11 | |
| Immerſio eiusdem | Petropoli | 17. 41.30 | dubia |

Ex his obſeruationibus pro locis Lunae ſequentes elicitae ſunt conclusiones

| *Coniunctio Lunae* Temp. med. Pariſ. Anno 1774 | | | Longit. Lunae | Latit. Lunae Auſtr. |
|---|---|---|---|---|
| cum α Tauri | d. 22. Ian. | $5^h.54'.24''$ | $2^s.6°.38'.7'',0$ | $4°.53'.15''$ |
| γ Tauri | 18. Febr. | 5. 41. 39 | 2. 2. 38. 40, 4 | 4. 56. 13 |
| α Tauri | 14. Apr. | 5. 47. 19 | 2. 6. 37. 51, 0 | 5. 0. 22 |
| 2 θ Tauri | 28. Aug. | 10. 56. 19 | 2. 4. 48. 52, 0 | 5. 13. 25 |
| γ Tauri | 24. Sept. | 15. 0. 41 | 2. 2. 39. 16, 8 | 5. 9. 56 |
| γ Tauri | 18. Nou. | 7. 4. 3 | 2. 2. 39. 34, 3 | 4. 58. 0 |
| 1 θ Tauri | - - - | 11. 16. 27 | 2. 4. 48. 42, 6 | 4. 59. 10 |
| α Tauri | - - - | 14. 52. 4 | 2. 6. 38. 44, 0 | 4. 59. 49. |

Pro differentiis meridianorum vero colligitur ex obſeruationibus d. 22. Ian. inter Stockholmiam et Petropolin — 48'. 58'', quae nonnullis ſecundis dubia eſſe poteſt, quia de temporibus veris obſeruationum aliquantillum eſſe poſſit dubium. Ex obſeruationibus d. 14. Aprilis habetur differentia meridianorum inter obſeruatorium Pariſienſe

| | |
|---|---|
| et Mediolanum | 0°. 27'. 22'' |
| Geneuam | 0. 15. 14 |
| Petropolin | 1. 51. 55 |

quae concluſiones non niſi vno vel altero ſecundo dubiae eſſe poterunt. Ex obſeruationibus circa γ Tauri d. 18. Nou. concluditur differentia meridiano-

 rum

rum inter obſeruatorium Pariſienſe et Petropolitanum $1^h. 51'. 57''$. Sub finem huius Diſſertationis Auctor varias ſubiecit cantelas, ad quas in computo huiusmodi obſeruationum attendi debet, quae cuius ſint pretii, apud Aſtronomos eſto iudicium.

## IV.

## Experimenta acu magnetica Petropoli inſtituta.

### Auctore W. L. Krafft pag. 543.

Magnetis bina illa celebratiſſima phaenomena, declinatio et inclinatio, etſi, theoriam magneticam ſi ſpectes, neutrum ſibi potiori prae altero iure phyſicorum attentionem vindicare poſſe videtur, minime tamen eandem adhuc experta ſunt experimentatorum induſtriam; vix enim pro tribus quatuorue locis inclinatio acus magneticae ea praeciſione eſt definita, quam ob acus inclinatorias ad inſignem perfectionis gradum iam euectas in huiuscemodi obſeruationibus hodie merito ſperare licet. Eo vtiliorem igitur operam Auctor collocaſſe cenſendus eſt in obſeruanda acu inclinatoria, cum ſex abhinc annis eadem obſeruatio hic loci multa cura iam fuerit inſtituta, ita, vt comparatione facta, annuae variationis, ſi qua ineſt inclinationi, quaedam certe veſtigia inde dignoſci queant. Principio diſſertationis Auctor fundamenta, quibus vſus inſtrumenti inclinatorii et methodus eius ope quantitatem inclinationis

tionis magneticae definiendi innititur, ex primis mechanicae principiis repetit eamque ad obſeruationes ſuas, duabus acubus inſtitutas, adplicat. Inſignis vtiliſſimo huic inſtrumento perfectio conciliaretur, ſi commodior methodus pateret, ſitum centri gravitatis acus reſpectu centri oſcillationis et quidem pro acu viribus magneticis iam imbuta definiendi, quam conſueta illa, quae polorum magneticorum inuerſione abſoluitur. Deduxit Auctor ex obſeruationibus ſuis, inclinationem acus magneticae 16 poll. 7 lin. decim. pedis Lond. longae = 75°. 37′. Petropoli ad finem anni 1774. annuam vero eius vatiationem, ſi modo vniformis ſit, exiſtimat heic loci ſtatui poſſe, = 18. minut. prim. quod quidem iudicium vlterioribus obſeruationibus, quas Auctor non negliget, emendabitur. Ad idem tempus acus quatuor pollices longa a ſeptentrione ad occidentem declinauir angulo = 4°. 50′ vnde ſequi videtur, in his regionibus declinationem ſubinde hiſce quidem temporibus fieri maiorem.

## V.

## Duarum Eclypſium Solis die $\frac{15}{26}$. Octobris 1772 et d. $\frac{11}{22}$. Martii 1773 obſervationes factae in vrbe Dmitriewsk a Petro Inochodzow pag. 623.

Praeſtanti tubo Achromatico Dollondiano 12 pedum obſeruauit Inoch. prioris Eclypſis finem $1^h.22'.58''\frac{1}{3}$;

 poſte-

poſterioris vero initium $18^h. 43'. 39''$ temporis veri. E quibus obſeruationibus deducitur differentia meridianorum inter Pariſios et Dmitriewsk $2^h. 52'. 11''$. Eleuationem poli huius loci inuenit $50°. 5'. 6''$.

## VI.

## De Differentia Meridianorum Petropolitani et Pekinenſis.

### Auctore P. Hallerſtein pag. 630.

Refert P. *Hallerſtein* ſe obſeruationes anteceſſoris ſui Pat. *Ingnatii Koegler* circa eclipſes Satellitum Iouis, comparaſſe cum illis, quae a Cel. de *l'Isle* in Obſeruatorio Petropolitano inſtitutae erant, ex qua comparatione inuenit pro differentia meridianorum obſeruatorii Petropolitani et Collegii Pekinenſis $5^h. 44'. 16''$; quae tamen concluſio ipſi non niſi inter quatuor aut quinque ſecunda certa videbatur, ob inſignem diſcrepantiam Tuborum, quibus hae obſeruationes inſtitutae erant. Poſtmodum vero quum reſciuiſſet conſilium quod Cel. *Hell* dedit, pro comparandis huiusmodi obſeruationibus, idem ſequutus, ſuperiorum obſeruationum denuo facta comparatione pro differentia meridianorum inuenit $5^h. 44'. 20''$, qui numerus potior ipſi videtur, quam is quem prius inuenerat, Verum in tanta concluſionum diſcrepantia, vbi diſſenſus vsque ad ſex minuta prima aſſurgit, certitudo vix maior quam decem ſcrupulo-

rum

rum ſecundorum exſpectari poterit. Propius quidem ſcopum attigiſſe videtur P. *Hallerſtein*, ſi ſumto primum medio ex comparatione immerſionum et emerſionum, certos ſibi ſtatuiſſet limites, pro eliminandis obſeruationibus, quae vltra eosdem a medio declinarent. Hinc ſi is ſtatuatur regula vt eliminandae ſint obſeruationes, quae plus quam duobus minutis primis a medio differunt, quum ex immerſionibus habeatur medium ſumendo differentia meridianorum $5^h. 44'. 15''$, concludendae erunt pro immerſionibus concluſio prima, ſecunda et vltima, his igitur reiectis, ſi denuo medium ſumatur, elicietur medium $5^h. 44'. 16''$. Simili ſtabilita regula pro emerſionibus, eliminandae ſunt concluſiones prima et vltima ex reliquis vero fiet medium ſumendo $5^h. 44'. 24''$. Concluſiones vero ſine dubio adhuc tutiores inuenientur, ſi omnes illae eliminentur comparationes, quae plus quam minuto primo a mediis diſcrepant.

## VII.

## Eclipſes Satellitum Iouis Anno 1774. Petropoli in ſpecula Aſtronomica obſeruatas, recenſuit.

## A. I. Lexell pag. 636.

Continet haec diſſertatio catalogum earum obſeruationum, quae circa Eclipſes Satellitum Iouis, anno 1774. Petropoli inſtitutae ſunt.

VIII.

# VIII.

## Epitome obſeruationum meteorologicarum Petropoli anno 1774. ſecundum Calendarium correctum inſtitutarum.

### Auctore I. A. Euler pag. 639.

Altitudo Barometri maxima fuit 29, 21 poll. duodec. pedis pariſini menſe Decembri; minima 26, 98; vbi Cel. Auctor obſeruat, altitudinem Barometri hoc anno maximam, prorſus et omnium fuiſſe maximam, quae vnquam Petropoli obſeruatae fuerunt; porro recenſet variationes quasdam Barometri *ſubitaneas*. Gradus frigoris maximi fuit 191° diu. de l'Islianae, d. 20 Febr. calor vero maximus ad 106° pertigit d. 8. Iulii; frigus ergo mitius, et calor etiam minor fuit hoc anno, quam binis annis proxime praecedentibus; hiems vero quantum frigoris vi hoc anno remiſit, tantundem diuturnitate compenſauit; 25 enim dies frigidiores gradu 150 hoc anno plures fuerunt, quam binis praeterlapſis. Subiungit Cel. Auctor obſeruationes ventorum et reliquorum coeli phaenomenorum.

INDEX

# INDEX.
## DISSERTATIONVM.

### *Mathematica.*

*L. Euler*, De valore formulae integralis

$$\int \frac{z^{m-1} \pm z^{n-m-1}}{1 \pm z^{n}} dz$$

caſu, quo poſt integrationem ponitur $z = 1$ pag. 3.

*Eiusdem*, De valore formulae integralis

$$\int \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (l\,z)^{\mu}$$

caſu, quo poſt integrationem ponitur $z = 1$ pag. 30.

*Eiusdem*, Noua Methodus quantitates integrales determinandi pag. 66.

*Eiusdem*, Demonſtratio Theorematis Newtoniani, de euolutione poteſtatum binomii, pro caſibus quibus exponentes non ſunt numeri integri pag. 103.

*Eiusdem*, Problema Diophanteum ſingulare p. 112.

*Eiusdem*, De Tabula Numerorum Primorum vsque ad Millionem et vltra continuanda; in qua ſimul omnium numerorum non primorum minimi diuiſores exprimantur pag. 132.

*A. I. Lexell*, De reſolutione Polygonorum rectilineorum. Diſſertatio Prima pag. 184.

## *Phyſico-Mathematica.*

*Dan. Bernoulli*, Commentatio phyſico mechanica generalior principii de coëxiſtentia vibrationum ſimplicium haud perturbatarum in ſyſtemate compoſito pag. 239.

*Eiusdem*, Commentatio phyſico-mechanica ſpecialior de motibus reciprocis compoſitis, multifariis, nondum exploratis, qui pendulis bimembribus facilius obſeruari poſſunt, in confirmationem principii ſui de coëxiſtentia vibrationum ſimpliciorum pag. 260.

*L. Euler*, De Oſcillationibus minimis penduli quotcunque ponduſculis onuſti pag. 285.

*Eiusdem*, De motu oſcillatorio binarum lancium ex libra ſuſpenſarum pag. 302.

*Eiusdem*, Explicatio motus oſcillatorii mirabilis in libra maiore obſeruati pag. 325.

*Eiusdem*, De motu turbinatorio chordarum muſicarum; vbi ſimul vniuerſa theoria tam aequilibrii, quam motus corporum flexibilium ſimulque etiam elaſticorum breuiter explicatur pag. 340.

## Phyſica.

*P. Cibot*, Deſcriptio Phalli quinquaguli ſeu fungi Sinenſium *Mo-ku-ſin* pag. 373.

*C. F. Wolff*, De ſtructura Veſiculae felleae Leonis pag. 379.

*P. S. Pallas*, Equus Hemionus, Mongolis Dshikketaei dictus pag. 394.

*Eiusdem*, Tetrao Arenaria, pag. 418.

*I. T. Koelreuter*, Obſeruationes in Gado Lota inſtitutae, pag. 424.

*P. S. Pallas*, Lacerta Apoda deſcripta, pag. 435.

*A. I. Güldenſtaedt*, Acerina; piſcis, ad percee genus pertinens, deſcriptus; pag. 455.

*Eiusdem*, Sex auium deſcriptiones; pag. 563.

*I. Lepechin*, Quatuor Fucorum ſpecies deſcriptae p. 476.

*E. Laxmann*, Minera argenti cornea chemice examinata et deſcripta pag. 482.

## Aſtronomica.

*L. Euler*, Commentatio Hypothetica de periculo, a nimia Cometae appropinquatione metuendo pag. 499.

*A. I. Lexell*, De differentia inter parallelum Lunae verum et apparentem pag. 549.

*Eius-*

*Eiusdem*, Nonnulla loca Lunae, ex obſeruationibus circa occultationes fixarum a Luna, Anno 1774 Petropoli, et alibi inſtitutis, determinata pag. 580.

*W. L. Krafft*, Experimenta acu magnetica Petropoli inſtituta pag. 610.

P. *Inochodzow*, Duarum Eclipſium Solis die $\frac{15}{26}$ Octobris 1772 et d. $\frac{11}{22}$. Martii 1773. obſeruationes factae in vrbe Dmitrieffisk pag. 623.

P. *Hallerſtein*, De Differentia Meridianorum Petropolitani et Pekinenſis pag. 630.

*A. I. Lexell*, Eclipſes Satellitum Iouis, Anno 1774, Petropoli in ſpecula Aſtronomica obſeruatae, pag. 636.

*I. A. Euler*, Epitome obſeruationum meteorologicarum Petropoli anno 1774. ſecundum Calendarium correctum inſtitutarum pag. 639.

MATHE-

# MATHEMATICA.

# DE
# VALORE FORMVLAE INTEGRALIS

$$\int \frac{z^{m-1} \pm z^{n-m-1}}{1 \pm z^n} dz$$

## CASV QVO POST INTEGRATIONEM PONITVR $z = 1$.

Auctore

*L. EVLERO.*

§. 1.

Hic mihi propoſitum eſt, duo inſignia theoremata, ad quae iam dudum ex conſideratione arcuum circularium, qui vel eundem habent ſinum vel tangentem, fueram perductus, ex ipſis principiis calculi integralis demonſtrare; duo autem illa theoremata ita ſe habent

$$\text{I. } \int \frac{z^{m-1} + z^{n-m-1}}{1 + z^n} dz = \frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}$$

$$\text{II. } \int \frac{z^{m-1} - z^{n-m-1}}{1 - z^n} dz = \frac{\pi}{n \tan g. \frac{m\pi}{n}}$$

ſi quidem integratio a termino $z = 0$ vsque ad terminum $z = 1$ extendatur, vbi $\pi$ denotat ſemiperipheriam circuli, cuius radius $= 1$. Has quidem formulas iam integratas dedi in *Calculo integrali*, verum ibi ſubſidia integrationis ſcilicet reſolutionem denominatoris $1 + z^n$, tum vero etiam reſolutionem ipſius fractionis in fractiones partiales ex mea *introductione in analyſin infinitorum* petiui, nunc autem, ne opus ſit haec adminicula aliunde conquirere, in ipſa integratione omnia principia, quibus innititur, ſuccincte complectar, inprimis autem reductio ad caſum, quo poſt integrationem ponitur $z = 1$, peculiaria artificia circa ſummationem ſerierum poſtulat, quae etiam in ſequentibus dilucide ſum expoſiturus, quae tractatio eo maioris momenti videtur, quod ſimilis integratio etiam in his formulis multo latius patentibus ſuccedit, cuiusmodi ſunt:

$$\int \frac{z^{m-1} \pm z^{n-m-1}}{1 \pm z^n} dz \, (l z)^{\mu}$$

ſi quidem exponens $\mu$ numeros integros denotet, quemadmodum alia occaſione fuſius explicabo.

## Problema 1.

§. 2. Formulam differentialem $\frac{z^{m-1} dz}{1 + z^n}$ integrare, vbi ſcilicet eſſe debet $m < n$.

## Solutio.

Hic igitur denominator $1 + z^n$ in ſuos factores ſimplices reſolui debet; vbi vero ante omnia

notandum eſt, ſi $n$ fuerit numerus impar, vnum factorem fore $1 + z$, pro reliquis factoribus imaginariis, bini contineantur in hac forma

$$pp - 2pz \operatorname{coſ.} \Phi + zz,$$

quae poſito nihilo aequalis praebet

$$z = p(\operatorname{coſ.} \Phi \pm \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} \Phi):$$

Iisdem igitur caſibus ipſe denominator $1 + z^n$ euaneſcere debet. Cum igitur ſit

$$z = p(\operatorname{coſ.} \Phi \pm \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} \Phi), \text{ erit}$$
$$zz = pp(\operatorname{coſ.} 2\Phi \pm \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} 2\Phi)$$
$$z^3 = p^3(\operatorname{coſ.} 3\Phi \pm \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} 3\Phi) \text{ et}$$
$$z^n = p^n(\operatorname{coſ.} n\Phi \pm \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} n\Phi)$$

hoc igitur duplici valore loco $z^n$ ſubſtituto fiet

$$\text{I. } 1 + z^n = 1 + p^n \operatorname{coſ.} n\Phi + p^n \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} n\Phi = 0$$
$$\text{II. } 1 + z^n = 1 + p^n \operatorname{coſ.} n\Phi - p^n \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} n\Phi = 0$$

quarum aequationum ſumma praebet

$$2 + 2p^n \operatorname{coſ.} n\Phi = 0,$$

differentia vero earundem

$$2p^n \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} n\Phi = 0,$$

ex poſteriore ſequitur $\operatorname{ſin.} n\Phi = 0$, ex priore vero

$$1 + p^n \operatorname{coſ.} n\Phi = 0,$$

id quod fieri nequit in rationalibus, niſi ſit $p = 1$, et $\operatorname{coſ.} n\Phi = -1$ quo ipſo fit $\operatorname{ſin.} n\Phi = 0$, vti conditio ex poſteriore poſtulat: omnes autem anguli quorum Coſinus eſt $= -1$ ſunt

$$\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi \text{ etc.}$$

quibus ergo angulus $n\Phi$ aequari poteſt; vnde ſequentes pro $\Phi$ obtinebimus valores:

$$\frac{\pi}{n},\ \frac{3\pi}{n},\ \frac{5\pi}{n},\ \frac{7\pi}{n}\ \text{etc.}$$

ex quibus tot capi debent, donec denominator reſultet $1+z^n$, quemadmodum ex ſingulis caſibus facile iudicatur

I. ſi $n=1$ erit $\Phi=\pi$, hincque $1+z=1+z$

II. ſi $n=2$ erit $\Phi=90^\circ$, hincque $1+zz=1+zz$

III. ſi $n=3$ erit $\Phi=60^\circ$ et $=180^\circ$ hinc $1+z^3=(1+z)(1-z+zz)$

IV. ſi $n=4$ erit $\Phi=45^\circ$ et $=135^\circ$ hinc $1+z^4=(1-z\surd 2+zz)(1+z\surd 2+zz)$

V. ſi $n=5$ erit $\Phi=36$ et $=108$ et $=180$, hincque

$$1+z^5=(1+z)(1+2z\,\text{coſ.}\,72^\circ+zz)(1-2z\,\text{coſ.}\,36^\circ+zz).$$

Cum igitur ingenere denominatoris $1+z^n$ vnus factor duplex ſit

$$1-2z\,\text{coſ.}\,\Phi+zz$$

ſi quidem angulo $\Phi$ debitos tribuamus valores, fractio $\frac{z^m-1}{1+z^n}$ fractionem inuoluet partialem huius formae

$$\frac{A+Bz}{1-2z\,\text{coſ.}\,\Phi+zz},$$

vbi totum negotium redit ad coefficientes A et B determinandos. Hi autem facilius reperientur ſi factores contemplemur ſimplices imaginarios, qui ſunt

I°. $z-\text{coſ.}\,\Phi-\surd-1\,\text{ſin.}\,\Phi$

II°. $z-\text{coſ.}\,\Phi+\surd-1\,\text{ſin.}\,\Phi$

tum enim fractio propoſita tales inuoluet fractiones partiales

$$\frac{\mathfrak{a}}{z-\text{coſ.}\,\Phi-\surd-1\,\text{ſin.}\,\Phi}+\frac{\mathfrak{b}}{z-\text{coſ.}\,\Phi+\surd-1\,\text{ſin.}\,\Phi}.$$

Iam

Iam pro coefficiente $\alpha$ inueniendo ſtatuatur

$$\frac{z^{m-1}}{1+z^n} = \frac{\alpha}{z - \text{coſ.}\,\Phi - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi} + R$$

vbi R complectitur omnes reliquas fractiones partiales; ſit autem breuitatis ergo

$$\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi = f,$$

vt habeamus

$$\frac{z^{m-1}}{1+z^n} = \frac{\alpha}{z-f} + R,$$

ſeu multiplicando per $z-f$

$$\frac{z^m - f z^{m-1}}{1+z^n} = \alpha + R(z-f),$$

indeque capiendo $z=f$ habebimus

$$\alpha = \frac{z^m - f z^{m-1}}{1+z^n}, \text{ caſu } z=f.$$

Hoc autem caſu tam numerator quam denominator euaneſcit; erit ergo

$$\alpha = \frac{m z^{m-1} - (m-1) f z^{m-2}}{n z^{n-1}},$$

et poſito iterum $z=f$

$$\alpha = \frac{f^{m-1}}{n f^{n-1}} = \tfrac{1}{n} f^{m-n}.$$

Cum igitur ſit

$$f = \text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi$$

erit

$$f^{m-n} = \text{coſ.}\,(m-n)\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,(m-n)\,\Phi,$$

hinc-

hincque

$$\alpha = \frac{1}{n}(\text{coſ.}(m-n)\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}(m-n)\Phi) \text{ et}$$
$$\beta = \frac{1}{n}(\text{coſ.}(m-n)\Phi - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}(m-n)\Phi);$$

quibus valoribus inuentis, binae noſtrae fractiones partiales erunt

$$\frac{\alpha}{z - \text{coſ.}\Phi - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\Phi} + \frac{\beta}{z - \text{coſ.}\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\Phi},$$

quae ad eandem denominationem perductae dant

$$\frac{(\alpha+\beta)z - (\alpha+\beta)\text{coſ.}\Phi + (\alpha-\beta)\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\Phi}{1 - 2z\,\text{coſ.}\Phi + zz}$$

ſeu loco $\alpha$ et $\beta$ valores inuentos ſubſtituendo

$$\frac{\frac{2z}{n}\text{coſ.}(m-n)\Phi - \frac{2\,\text{coſ.}\Phi}{n}\text{coſ.}(m-n)\Phi - \frac{2}{n}\text{ſin.}\Phi\,\text{ſin.}(m-n)\Phi}{1 - 2z\,\text{coſ.}\Phi + zz}$$

hacque fractione partiali cum ſupra poſita

$$\frac{A + Bz}{1 - 2z\,\text{coſ.}\Phi + zz}$$

comparata, colligimus

$$A = -\frac{2}{n}\text{coſ.}\Phi\,\text{coſ.}(m-n)\Phi - \frac{2}{n}\text{ſin.}\Phi\,\text{ſin.}(m-n)\Phi$$
$$= -\frac{2}{n}\text{coſ.}(m-n-1)\Phi \text{ et}$$

$$B = \frac{2}{n}\text{coſ.}(m-n)\Phi;$$

cum autem ſit

$$\text{ſin.}\,n\Phi = 0 \text{ et } \text{coſ.}\,n\Phi = -1$$

erit $\text{coſ.}(m-n)\Phi = -\text{coſ.}\,m\Phi$, et $\text{ſin.}(m-n)\Phi = -\text{ſin.}\,m\Phi$, ideoque

$$A = \frac{2}{n}\text{coſ.}(m-1)\Phi \text{ et } B = -\frac{2}{n}\text{coſ.}\,m\Phi,$$

conſequenter ex hac fractione partiali naſcitur integrale

$$B\,l\sqrt{(1 - 2z\,\text{coſ.}\Phi + zz)} + \frac{A + B\,\text{coſ.}\Phi}{\text{ſin.}\Phi}\,\text{A tang.}\,\frac{z - \text{coſ.}\Phi}{\text{ſin.}\Phi}$$

vbi

vbi ſi loco A et B valores ſubſtituantur, erit hoc integrale

$$-\frac{2}{n}\operatorname{coſ.} m\Phi\, l\sqrt{(1-2z\operatorname{coſ.}\Phi+zz)}+\frac{2}{n}\operatorname{ſin.} m\Phi\, \operatorname{A\,tang.}\frac{z-\operatorname{coſ.}\Phi}{\operatorname{ſin.}\Phi}+C$$

quae conſtans ex termino $z=0$ definita praebet integrale hoc determinatum

$$-\frac{2}{n}\operatorname{coſ.} m\Phi\, l\sqrt{(1-2z\operatorname{coſ.}\Phi+zz)}+\frac{2}{n}\operatorname{ſin.} m\Phi\, \operatorname{A\,tang.}\frac{z\operatorname{ſin.}\Phi}{1-z\operatorname{coſ.}\Phi}$$

vbi tantum opus eſt loco $\Phi$ debitos ſuos valores ſcribere, indeque omnia integralia partialia iunctim ſumere. Praeterea vero caſibus, quibus denominator $1+z^n$ factorem habet $1+z$ quod euenit, ſi $n$ fuerit numerus impar; pars integralis inde oriunda adiici debet, quae ita inuenitur: ſtatuatur

$$\frac{z^{m-1}}{1+z^n}=\frac{\alpha}{1+z}+R,$$

vnde fit

$$\frac{z^{m-1}+z^m}{1+z^n}=\alpha+R(1+z),$$

factoque $z=-1$ prodit

$$\alpha=\frac{z^{m-1}+z^m}{1+z^n}$$

quia autem hoc caſu tam numerator quam denominator euaneſcit, loco vtriusque ſuum differentiale ponatur, fietque

$$\alpha=\frac{(m-1)z^{m-2}+mz^{m-1}}{nz^{n-1}}$$

vbi numerator $z^{m-2}(m-1+mz)$ poſito $z=-1$, abit in $-(-1^m)$ et denominator in $+n$ adeoque $\alpha=\frac{-(-1)^m}{n}$;

pars igitur integralis hinc nata erit $\frac{-(-1^m)}{n} l(1+z)$ caſibus igitur vbi $m$ eſt numerus par, hoc integrale erit $-\frac{1}{n} l(1+z)$: ſin autem $m$ eſt numerus impar fit illud $+\frac{1}{n} l(1+z)$. Quod ſi iam loco $\Phi$ ſubſtituamus ſuos valores

$$\frac{\pi}{n}, \quad \frac{3\pi}{n}, \quad \frac{5\pi}{n}, \quad \frac{7\pi}{n}$$

integrale quaeſitum erit

$$\int \frac{z^{m-1} dz}{1+z^n} = -\frac{2}{n} \operatorname{coſ.} \frac{m\pi}{n} l \sqrt{1 - 2z \operatorname{coſ.} \Phi + zz} + \frac{2}{n} \operatorname{ſin.} \frac{m\pi}{n} \text{ A tang.} \frac{z \operatorname{ſin.} \frac{\pi}{n}}{1 - z \operatorname{coſ.} \frac{\pi}{n}}$$

$$-\frac{2}{n} \operatorname{coſ.} \frac{3m\pi}{n} l \sqrt{1 - 2z \operatorname{coſ.} \Phi + zz} + \frac{2}{n} \operatorname{ſin.} \frac{3m\pi}{n} \text{ A tang.} \frac{z \operatorname{ſin.} \frac{3\pi}{n}}{1 - z \operatorname{coſ.} \frac{3\pi}{n}}$$

$$-\frac{2}{n} \operatorname{coſ.} \frac{5m\pi}{n} l \sqrt{1 - 2z \operatorname{coſ.} \Phi + zz} + \frac{2}{n} \operatorname{ſin.} \frac{5m\pi}{n} \text{ A tang.} \frac{z \operatorname{ſin.} \frac{5\pi}{n}}{1 - z \operatorname{coſ.} \frac{5\pi}{n}}$$

etc. etc.

quibus inſuper caſu, quo $n$ fit numerus impar, adiungi debet

$$\frac{-(-1^m)}{n} l(1+z).$$

## Scholion.

§. 3. Ne opus ſit integrationem formulae

$$\int \frac{(A + Bz)\, dz}{1 - 2z \operatorname{coſ.} \Phi + zz}$$

aliunde repetere, reſoluatur numerator $A + Bz$ in has partes

— B

$-B\cos.\Phi + Bz$ et $A + B\cos.\Phi$,

atque ex priore manifeſto oritur integrale

$$Bl\sqrt{1-2z\cos.\Phi+zz};$$

pro altera autem parte cum ſit

$$\int\frac{dz\sin.\Phi}{1-2z\cos.\Phi+zz} = \text{Arc. tang.}\frac{z\sin.\Phi}{1-z\cos.\Phi},$$

altera pars huius integralis

$$(A+B\cos.\Phi)\int\frac{dz}{1-2z\cos.\Phi+zz} \text{ fiet}$$

$$\frac{A+B\cos.\Phi}{\sin.\Phi}\text{ Arc. tang.}\frac{z\sin.\Phi}{1-z\cos.\Phi}$$

ſicque illius formulae integratio ita ſe habebit

$$\int\frac{(A+Bz)dz}{1-2z\cos.\Phi+zz} = Bl\sqrt{1-2z\cos.\Phi+zz} + \frac{A+B\cos.\Phi}{\sin.\Phi}\text{ Arc. tang.}\frac{z\sin.\Phi}{1-z\cos.\Phi}$$

quod integrale iam euaneſcit poſito $z=0$ ita, vt conſtantis additione non ſit opus.

## Problema.

§. 4. Formulam differentialem $\frac{z^{m-1}dz}{1-z^n}$ integrare, vbi ſcilicet eſſe debet $m < n$.

## Solutio.

Hic obſeruandum eſt, denominatorem ſemper factorem habere $1-z$; tum vero, quoties $n$ fuerit numerus par, etiam factor aderit $1+z$, reliqui autem factores ſimplices omnes erunt imaginarii, quorum bini talem conſtituunt factorem duplicem

$$pp - 2pz\cos.\Phi + zz,$$

 qui

qui cum euaneſcat poſito vel

$z = p\,(\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi$

vel $z = p\,(\text{coſ.}\,\Phi - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi)$,

iisdem caſibus ipſe denominator $1 - z^n$ euaneſcet; tum autem erit

$z^n = p^n\,(\text{coſ.}\,n\,\Phi \pm \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\,\Phi)$,

ideoque denominator fiet,

$1 - p^n\,(\text{coſ.}\,n\,\Phi \pm \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\,\Phi)$

qui cum euaneſcere debeat, fieri oportet

I°. $1 - p^n \text{coſ.}\,n\Phi = 0$ et II°. $p^n \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\Phi = 0$,

ex quo concludimus

$\text{ſin.}\,n\,\Phi = 0$ et $\text{coſ.}\,n\,\Phi = \pm 1$;

vt autem fiat

$1 - p^n\,\text{coſ.}\,n\,\Phi = 0$,

capi debet

$\text{coſ.}\,n\,\Phi = + 1$,

eritque $p = 1$, ita vt factor duplex ſit

$1 - 2\,z\,\text{coſ.}\,\Phi + z\,z.$

Loco $n\,\Phi$ igitur omnes arcus ſumi poſſunt, quorum Coſinus $= + 1$ qui ſunt

$0\,\pi,\ 2\,\pi,\ 4\,\pi,\ 6\,\pi,\ 8\,\pi$ etc.

valoresque anguli ipſi $\Phi$ erunt

$\frac{0\,\pi}{n},\ \frac{2\,\pi}{n},\ \frac{4\,\pi}{n},\ \frac{6\,\pi}{n}$ etc.

et factores ſimplices denominatoris hinc oriundi erunt

$z - \text{coſ.}\,\Phi \pm \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi.$

Pon-

Ponamus breuitatis gratia

$$f = \text{coſ.}\,\Phi \pm \surd -1\ \text{ſin.}\,\Phi$$

ita, vt $f$ geminum valorem inuoluat, et factor ſimplex erit $z - f$; ſtatuatur ergo fractio partialis hinc oriunda $= \frac{\alpha}{z-f}$; ponaturque

$$\frac{z^{m-1}}{1+z^n} = \frac{\alpha}{z-f} + R,$$

et per $z - f$ multiplicando erit

$$\frac{z^m - f z^{m-1}}{1+z^n} = \alpha + R(z-f),$$

hinc ſumto $z = f$ inuenitur

$$\alpha = \frac{z^m - f z^{m-1}}{1 - z^n}.$$

Caſu autem $z = f$ tam numerator quam denominator ſimul euaneſcunt, ideoque loco vtriusque differentiale capi debet, reperiturque $\alpha = -\frac{1}{n} f^{m-n}$; cum autem ſit

$$f = \text{coſ.}\,\Phi \pm \surd -1\ \text{ſin.}\,\Phi, \text{ erit}$$

$$f^{m-n} = \text{coſ.}\,(m-n)\,\Phi \pm \surd -1\ \text{ſin.}\,(m-n)\,\Phi$$

ſiue ob

$$\text{ſin.}\,n\Phi = 0,\ \text{coſ.}\,n\Phi = 1,\ \text{coſ.}\,(m-n)\Phi = \text{coſ.}\,m\Phi \text{ et}$$

$$\text{ſin.}\,(m-n)\,\Phi = \text{ſin.}\,m\,\Phi \text{ erit}$$

$$f^{m-n} = \text{coſ.}\,m\,\Phi \pm \surd -1\ \text{ſin.}\,m\,\Phi$$

ex quo duplici factore imaginario hae duae oriuntur fractiones partiales

$$-\frac{1}{n}\cdot\frac{\text{coſ.}\,m\,\Phi + \surd -1\ \text{ſin.}\,m\,\Phi}{z - \text{coſ.}\,\Phi - \surd -1\ \text{ſin.}\,\Phi} - \frac{1}{n}\,\frac{\text{coſ.}\,m\,\Phi - \surd -1\ \text{ſin.}\,m\,\Phi}{z - \text{coſ.}\,\Phi + \surd -1\ \text{ſin.}\,\Phi},$$

 quae

quae contrahuntur in hanc

$$-\frac{2}{n}\frac{(z\cos.m\Phi-\cos.\Phi\cos.m\Phi-\sin.\Phi\sin.m\Phi}{1-2z\cos.\Phi+zz};$$

hinc igitur pars integralis naſcitur

$$-\frac{2}{n}\int\frac{zdz\cos.m\Phi-dz\cos.\Phi\cos.m\Phi-dz\sin.\Phi\sin.m\Phi}{1-2z\cos.\Phi+zz},$$

cuius integrale erit

$$-\frac{2}{n}\cos.m\Phi\, l\sqrt{-2z\cos.\Phi+zz}+\frac{2}{n}\sin.m\Phi\text{ Angl. tang. }\frac{z-\cos.\Phi}{\sin.\Phi}+C$$

ſeu conſtante definita; hocce nanciſcimur integrale determinatum

$$-\frac{2}{n}\cos.m\Phi\, l\sqrt{1-2z\cos.\Phi+zz}+\frac{2}{n}\sin.m\Phi\text{ Angl. tang. }\frac{z\sin.\Phi}{1-z\cos.\Phi}$$

caſu igitur quo $\Phi=0$ erit hoc integrale $=-\frac{2}{n}l(1-z)$ cuius autem tantum ſemiſſis ſumi debet $=-\frac{1}{n}l(1-z)$ caſibus autem, quibus $n$ eſt numerus par et $\Phi=\pi$, haec producitur pars integralis

$$-\frac{2}{n}\cos.m\pi\, l(\sqrt{1+2z+zz})$$

cuius autem iterum tantum ſemiſſis

$$-\frac{1}{n}\cos.m\pi\, l(1+z)$$

capi oportet; vbi notandum, ſi $m$ ſit numerus par, fore $\cos.m\pi=-1$; conſequenter integrale quaeſitum ſequenti modo exprimetur

$\int z^{m-1}$

$$\int \frac{z^{m-1}dz}{1-z^n} = -\tfrac{1}{n} l(1-z)$$

$$-\tfrac{1}{n}\operatorname{coſ}.\tfrac{2m\pi}{n}\, l\sqrt{1-2z\operatorname{coſ}.\tfrac{2\pi}{n}+zz}+\tfrac{2}{n}\operatorname{ſin}.\tfrac{2m\pi}{n}\operatorname{A tang}.\frac{z\operatorname{ſin}.\frac{2\pi}{n}}{1-z\operatorname{coſ}.\frac{2\pi}{n}}$$

$$-\tfrac{1}{n}\operatorname{coſ}.\tfrac{4m\pi}{n}\, l\sqrt{1-2z\operatorname{coſ}.\tfrac{4\pi}{n}+zz}+\tfrac{2}{n}\operatorname{ſin}.\tfrac{4m\pi}{n}\operatorname{A tang}.\frac{z\operatorname{ſin}.\frac{4\pi}{n}}{1-z\operatorname{coſ}.\frac{4\pi}{n}}$$

$$-\tfrac{1}{n}\operatorname{coſ}.\tfrac{6m\pi}{n}\, l\sqrt{1-2z\operatorname{coſ}.\tfrac{6\pi}{n}+zz}+\tfrac{2}{n}\operatorname{ſin}.\tfrac{6m\pi}{n}\operatorname{A tang}.\frac{z\operatorname{ſin}.\frac{6\pi}{n}}{1-z\operatorname{coſ}.\frac{6\pi}{n}}$$

etc. etc.

## Problema.

§. 5. Formulae differentialis

$$\frac{z^{m-1}+z^{\mu-1}}{1+z^n}dz$$

integrale inuenire: exiſtente $m+\mu=n$, ita tamen, vt tam $m$ quam $\mu$ ſint numeri poſitiui.

## Solutio.

Hic igitur nil aliud opus eſt, niſi vt termini integrales formulae $\int\frac{z^{m-1}dz}{1+z^n}$ ſupra inuenti geminentur, dum altera vice loco $m$ ſcribitur $\mu$, cum ſit pro terminis logarithmicis $\frac{m\pi}{n}+\frac{\mu\pi}{n}=\pi$ erit

$$\operatorname{coſ}.\tfrac{\mu\pi}{n}=-\operatorname{coſ}.\tfrac{m\pi}{n};\ \operatorname{coſ}.\tfrac{3\mu\pi}{n}=-\operatorname{coſ}.\tfrac{3m\pi}{n}$$

$$\operatorname{coſ}.\tfrac{5\mu\pi}{n}=-\operatorname{coſ}.\tfrac{5m\pi}{n}\ \text{etc.}$$

vnde

vnde patet, omnes terminos logarithmicos ſe inuicem deſtruere. Porro vero pro arcubus circularibus cum ſit

$$\text{ſin.}\frac{\mu\pi}{n} = \text{ſin.}\frac{m\pi}{n};\quad \text{ſin.}\frac{3\mu\pi}{n} = \text{ſin.}\frac{3m\pi}{n} \text{ etc.}$$

hi termini duplicabuntur ita, vt integrale quaeſitum prodíturum ſit

$$\frac{4}{n}\text{ſin.}\frac{\mu\pi}{n}\text{A tang.}\frac{z\,\text{ſin.}\frac{\pi}{n}}{1-z\,\text{coſ.}\frac{\pi}{n}} + \frac{4}{n}\text{ſin.}\frac{3\mu\pi}{n}\text{A tang.}\frac{z\,\text{ſin.}\frac{3\pi}{n}}{1-z\,\text{coſ.}\frac{3\pi}{n}}$$

$$+\frac{4}{n}\text{ſin.}\frac{5\mu\pi}{n}\text{A tang.}\frac{z\,\text{ſin.}\frac{5\pi}{n}}{1-z\,\text{coſ.}\frac{5\pi}{n}} + \text{etc.}$$

quorum terminorum, ſi $i$ denotet numerum quemcunque imparem, forma generalis erit

$$\frac{4}{n}\text{ſin.}\frac{im\pi}{n}\text{A tang.}\frac{z\,\text{ſin.}\frac{i\pi}{n}}{1-z\,\text{coſ.}\frac{i\pi}{n}}$$

terminos autem eousque continuare oportet, quoad numerus non ſuperet exponentem $n$, ita, vt, ſi $n$ fuerit numerus impar, vltimus terminus contineat $i = n$; ſin autem $n$ ſit numerus par, valor futurus ipſius $i$ ſit $i = n - 1$.

## Corollarium.

§. 6. Cum caſus $n = 1$ hinc excludatur, caſu $n = 2$ integrale erit

$2\,\text{ſin.}\frac{m\pi}{2}\text{A tang.}\,z$: Caſu $n = 3$ integrale erit

$\frac{4}{3}\text{ſin.}\frac{m\pi}{3}\text{A tang.}\frac{z\sqrt{3}}{2-z}$, et caſu $n = 4$ erit integrale

$\text{ſin.}\frac{m\pi}{4}\text{A tang.}\frac{\sqrt{2}-z}{z} + \text{ſin.}\frac{3m\pi}{4}\text{A tang.}\frac{z}{\sqrt{2}-z}$.

Proble-

## Problema.

§. 7. Formulae differentialis praecedentis integrale aſſignare, caſu quo $z = 1$; quandoquidem ſuperius integrale ita eſt ſumtum, vt euaneſcat poſito $z = 0$.

## Solutio.

Cum integralis quaeſiti quaelibet pars hanc habeat formam

$$\frac{4}{n} \sin. \frac{im\pi}{n} \text{ A tang. } \frac{z \sin. \frac{i\pi}{n}}{1 - z \cos. \frac{i\pi}{n}}$$

haec forma poſito $z = 1$ abit in hanc

$$\frac{4}{n} \sin. \frac{im\pi}{n} \text{ A tang. } \frac{\sin. \frac{i\pi}{n}}{1 - \cos. \frac{i\pi}{n}}$$

iam vero eſt

$$\frac{\sin. \frac{i\pi}{n}}{1 - \cos. \frac{i\pi}{n}} = \cot. \frac{i\pi}{2n} = \text{tang.} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{2n}\right),$$

ideoque

$$\text{A tang. } \frac{\sin. \frac{i\pi}{n}}{1 - \cos. \frac{i\pi}{n}} = \frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{2n},$$

vnde generatim pars integralis erit

$$\frac{4}{n} \sin. \frac{im\pi}{n} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{2n}\right) = \frac{2\pi}{n} \sin. \frac{im\pi}{n} - \frac{2i\pi}{nn} \sin. \frac{im\pi}{n}$$

integrale ergo quaeſitum per binas ſequentes progreſſiones exprimitur

$$\frac{2\pi}{n}\left(\sin. \frac{m\pi}{n} + \sin. \frac{3m\pi}{n} + \sin. \frac{5m\pi}{n} + \ldots\ldots + \sin. \frac{im\pi}{n}\right)$$

$$- \frac{2\pi}{nn}\left(1.\sin. \frac{m\pi}{n} + 3.\sin. \frac{3m\pi}{n} + 5.\sin. \frac{5m\pi}{n} + \ldots\ldots + i \sin. \frac{im\pi}{n}\right)$$

 vbi

vbi ſi breuitatis gratia ſcribamus $\frac{m\pi}{n} = \vartheta$, erit integrale iſtud commodius expreſſum ita

$$\frac{2\pi}{n}(\text{ſin.}\ \vartheta + \text{ſin.}\ 3\vartheta + \text{ſin.}\ 5\vartheta + \ldots\ldots + \text{ſin.}\ i\vartheta)$$
$$-\frac{2\pi}{nn}(1.\text{ſin}\ \vartheta + 3\ \text{ſin.}\ 3\vartheta + 5\ \text{ſin.}\ 5\vartheta + \ldots\ldots + i\ \text{ſin.}\ i\vartheta)$$

vbi, quoties $n$ fuerit numerus impar, erit $i = n$, ſin autem $n$ numerus par erit $i = n - 1$.

Cum igitur totum negotium huc redeat, vt hae duae ſeries ſummentur; ſtatuamus

$$s = \text{ſin.}\ \vartheta + \text{ſin.}\ 3\vartheta + \text{ſin.}\ 5\vartheta + \ldots\ldots + \text{ſin.}\ i\vartheta \text{ et}$$
$$t = 1.\text{ſin}\ \vartheta + 3.\ \text{ſin.}\ 3\vartheta + 5\ \text{ſin.}\ 5\vartheta + \ldots\ldots + i\ \text{ſin.}\ i\vartheta$$

ita vt noſtrum integrale ſit

$$\frac{2\pi}{n}s - \frac{2\pi}{nn}t$$

pro priore ſerie cum ſit

$$2\ \text{ſin.}\ \vartheta\ \text{ſin.}\ i\vartheta = \text{coſ.}\ (i-1)\vartheta - \text{coſ.}\ (i+1)\vartheta, \text{ erit}$$
$$2\,s.\text{ſin.}\ \vartheta = \text{coſ.}\ 0.\vartheta - \text{coſ.}\ 2\vartheta - \text{coſ.}\ 4\vartheta - \text{coſ.}\ 6\vartheta - \ldots\ \text{coſ.}\ (i+1)\vartheta$$
$$+ \text{coſ.}\ 2\vartheta + \text{coſ.}\ 4\vartheta + \text{coſ.}\ 6\vartheta + \ldots\ldots$$

ita vt ſit $2\,s.\ \text{ſin.}\ \vartheta = 1 - \text{coſ.}\ (i+1)\vartheta$, ergo

$$s = \frac{1}{2\ \text{ſin.}\ \vartheta} - \frac{\text{coſ.}\ (i+1)\vartheta}{2\ \text{ſin.}\ \vartheta}.$$

Pro altera autem ſerie, ſpectemus primum angulum $\vartheta$ vt variabilem, et cum ſit

$$d.\text{coſ.}\ i\vartheta = -i\,d\vartheta\ \text{ſin.}\ i\vartheta \text{ erit } \int i\,d\vartheta\ \text{ſin.}\ i\vartheta = -\text{coſ.}\ i\vartheta;$$

quo notato reperietur

$$\int t\,d\vartheta = -\text{coſ.}\ \vartheta - \text{coſ.}\ 3\vartheta - \text{coſ.}\ 5\vartheta - \ldots\ldots - \text{coſ.}\ i\vartheta$$

quae ſeries multiplicetur per 2 ſin. $\vartheta$ et cum ſit

$$2\ \text{ſin.}\ \vartheta\ \text{coſ.}\ i\vartheta = -\text{ſin.}\ (i-1)\vartheta + \text{ſin.}\ (i+1)\vartheta, \text{ erit}$$
$$2\ \text{ſin.}\ \vartheta \int t\,d\vartheta = -\ \text{ſin.}\ (i+1)\vartheta,$$

quo-

quocirca habebimus

$$\int t\, d\vartheta = -\frac{\sin.(i+1)\vartheta}{2\sin.\vartheta}, \text{ hincque}$$

$$t = -\frac{(i+1)\cos.(i+1)\vartheta}{2\sin.\vartheta} + \frac{\sin.(i+1)\vartheta\cos.\vartheta}{2\sin.\vartheta^2}$$

quibus valoribus inuentis integrale noſtrum ita ſe habebit

$$\frac{\pi}{n\sin.\vartheta} - \frac{\pi\cos.(i+1)\vartheta}{n\sin.\vartheta} + \frac{\pi(i+1)\cos.(i+1)\vartheta}{nn\sin.\vartheta} - \frac{\pi\sin.(i+1)\vartheta\cos.\vartheta}{nn\sin.\vartheta^2}$$

cum nunc ſit vel $i = n - 1$, vel $i = n$, prout $n$ fuerit numerus par vel impar, vtrumque caſum ſeorſim euoluamus.

I. Si $n$ ſit numerus par, erit $i = n - 1$, et $i + 1 = n$, et quia $\vartheta = \frac{m\pi}{n}$ erit $(i+1)\vartheta = m\pi$; hinc

$$\sin.(i+1)\vartheta = 0, \text{ et } \cos.(i+1)\vartheta = \pm 1;$$

quocirca formula noſtra erit $= \frac{\pi}{n\sin.\vartheta}$, conſequenter integrale quaeſitum hoc caſu erit $\frac{\pi}{\sin.\frac{m\pi}{n}}$.

II. At ſi ſit $i = n$, ideoque $(i+1) = n+1$, erit angulus

$$(i+1)\vartheta = (n+1)\frac{m\pi}{n} = m\pi + \frac{m\pi}{n} = m\pi + \vartheta,$$

vnde fit

$$\cos.(i+1)\vartheta = \pm\cos.\vartheta, \text{ et } \sin.(i+1)\vartheta = \pm\sin.\vartheta$$

quibus valoribus ſubſtitutis formula euadet

$$\frac{\pi}{n\sin.\vartheta} \mp \frac{\pi\cos.\vartheta}{n\sin.\vartheta} \pm \frac{(n+1)\pi\cos.\vartheta}{nn\sin.\vartheta} \mp \frac{\pi\cos.\vartheta}{nn\sin.\vartheta}$$

quae contrahitur in $\frac{\pi}{n\sin\vartheta} = \frac{\pi}{n\sin.\frac{m\pi}{n}}$.

Conſequenter, ſiue $n$ ſit numerus par, ſiue impar erit

$$\int \frac{z^{m-1} + z^{\mu-1}}{1 + z^n} dz = \frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}.$$

## Corollarium 1.

§. 8. Si ergo fuerit $m + \mu = n$, et poſt integrationem ita inſtitutam, vt integrale euaneſcat poſito $z = 0$, capiatur $z = 1$, ſemper fiet

$$\int \frac{z^{m-1} + z^{\mu-1}}{1 + z^n} dz = \frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}.$$

## Corollarium 2.

§. 9. Cum per ſeriem infinitam ſit

$$\frac{1}{1 + z^n} = 1 - z^n + z^{2n} - z^{3n} + z^{4n} - z^{5n} + \text{etc.}$$

noſtrae formulae integrale in genere erit

$$+\frac{z^m}{m} - \frac{z^{m+n}}{m+n} + \frac{z^{m+2n}}{m+2n} - \frac{z^{m+3n}}{m+3n} + \frac{z^{m+4n}}{m+4n} - \text{etc.}$$
$$+\frac{z^\mu}{\mu} - \frac{z^{\mu+n}}{\mu+n} + \frac{z^{\mu+2n}}{\mu+2n} - \frac{z^{\mu+3n}}{\mu+3n} + \frac{z^{\mu+4n}}{\mu+4n} - \text{etc.}$$

vnde poſito $z = 1$ ſequentis ſeriei infinitae ſummatio habebitur

$$\frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}} = \begin{cases} +\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} - \frac{1}{m+3n} + \frac{1}{m+4n} - \text{etc.} \\ +\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu+n} + \frac{1}{\mu+2n} - \frac{1}{\mu+3n} + \frac{1}{\mu+4n} - \text{etc.} \end{cases}$$

vel

vel ob $n = m + \mu$ huius

$$\frac{\pi}{(m+\mu)\,\text{ſin.}\frac{m\pi}{m+\mu}} = \begin{array}{l} +\frac{1}{m} - \frac{1}{2m+\mu} + \frac{1}{3m+2\mu} - \frac{1}{4m+3\mu} + \text{etc.} \\ +\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu+m} + \frac{1}{3\mu+2m} - \frac{1}{4\mu+3m} + \text{etc.} \end{array}$$

## Exempla.

I. Si $m = 1$ et $\mu = 1$ erit

$$\frac{\pi}{2} = \begin{array}{l} +1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.} \\ +1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.} \end{array} \text{ ideoque}$$

$$\frac{\pi}{4} = +1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

II. Si $m = 1$ et $\mu = 2$ erit $m + \mu = 3$ et ſin. $\frac{m\pi}{m+\mu} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ideoque

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \begin{array}{l} +1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} + \text{etc.} \\ +\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{14} - \frac{1}{17} + \text{etc.} \end{array} \text{ ſiue}$$

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{etc.}$$

III. Si $m = 1$ et $\mu = 3$ erit $\mu + m = 4$ et ſin. $\frac{m\pi}{m+\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ideoque

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \begin{array}{l} +1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{21} + \text{etc.} \\ +\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \text{etc.} \end{array} \text{ ſeu}$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = +1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{etc.}$$

Addatur huic ſeries exemplo I inuenta prodibitque

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 2 - \frac{2}{7} + \frac{2}{9} - \frac{2}{15} + \frac{2}{17} - \text{etc. ſiue}$$

$$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \text{etc.}$$

vbi termini poſitiui in forma $8a + 1$; negatiui vero in forma $8a - 1$ continentur.

 Pro-

## Problema.

§. 10. Formulam integralem

$$\int \frac{z^{m-1} - z^{\mu-1}}{1 - z^n} dz$$

exiſtente $m + \mu = n$ integrare.

## Solutio.

Cum igitur a formula integrali:

$$\int \frac{z^{m-1} dz}{1 - z^n} \text{ haec formula } \int \frac{z^{\mu-1} dz}{1 - z^n}$$

ſubtrahi debeat, primi logarithmi ſe deſtruunt; id quod ob

$$\frac{2m\pi}{n} + \frac{2\mu\pi}{n} = 2\pi,$$

et hinc ob

$$\text{coſ.} \frac{2m\pi}{n} = \text{coſ.} \frac{2\mu\pi}{n}$$

etiam de ſecundis valet; pro tertiis idem euenit, quia

$$\frac{4m\pi}{n} + \frac{4\mu\pi}{n} = 4\pi,$$

et hinc quia

$$\text{coſ.} \frac{4m\pi}{n} = \text{coſ.} \frac{4\mu\pi}{n};$$

atque hoc modo omnes logarithmi plane ſe deſtruent; arcus vero circulares, quia

$$\text{ſin.} \frac{2\mu\pi}{n} = -\text{ſin.} \frac{2m\pi}{n} \text{ et ſin.} \frac{4\mu\pi}{n} = -\text{ſin.} \frac{4m\pi}{n},$$

omnes manifeſto duplicabuntur; vnde integrale quaeſitum per meros arcus circulares exprimitur; eritque

$\int z^{m-1}$

$$\int \frac{z^{m-1} - z^{\mu-1}}{1 - z^n} dz = \frac{4}{n} \text{ſin.} \frac{2m\pi}{n} \text{ A tang.} \frac{z \text{ ſin.} \frac{2\pi}{n}}{1 - z \text{ coſ.} \frac{2\pi}{n}}$$

$$+ \frac{4}{n} \text{ſin.} \frac{4m\pi}{n} \text{ A tang} \frac{z \text{ ſin.} \frac{4\pi}{n}}{1 - z \text{ coſ.} \frac{4\pi}{n}} + \frac{4}{n} \text{ſin.} \frac{6m\pi}{n} \text{ A tang.} \frac{z \text{ ſin.} \frac{6\pi}{n}}{1 - z \text{ coſ.} \frac{6\pi}{n}}$$

$$+ \frac{4}{n} \text{ſin.} \frac{8m\pi}{n} \text{ A tang.} \frac{z \text{ ſin.} \frac{8\pi}{n}}{1 - z \text{ coſ.} \frac{8\pi}{n}}$$

vnde, ſi $i$ denotet numerum parem quemcunque, ſinguli hi termini in hac forma generali continebuntur

$$\frac{4}{n} \text{ſin.} \frac{im\pi}{n} \text{ Arc. tang.} \frac{z \text{ ſin.} \frac{i\pi}{n}}{1 - z \text{ coſ.} \frac{i\pi}{n}}.$$

Has autem formulas eo vsque continuari oportet, quamdiu $i$ non ſuperet exponentem $n$; quare ſi $n$ ſit numerus par, vltimus valor erit $i = n$, ſin autem $n$ ſit impar vltimus ille valor erit $i = n - 1$. Caeterum notaſſe iuuabit, totum hoc integrale euaneſcere ſumto $z = 0$.

## Problema.

§. 11. Praecedentis formulae integralis valorem inueſtigare pro caſu quo ponitur $z = 1$.

## Solutio.

Cum omnium partium forma generalis hoc caſu abeat in hanc

$$\frac{4}{n} \text{ſin.} \frac{im\pi}{n} \text{ A tang.} \frac{\text{ſin.} \frac{i\pi}{n}}{1 - \text{coſ.} \frac{i\pi}{n}}.$$

Eſt

Eſt vero, vti ante iam vidimus

$$\frac{\text{ſin.}\frac{i\pi}{n}}{1-\text{coſ.}\frac{i\pi}{n}} = \cot\frac{i\pi}{2n} = \text{tang.}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{i\pi}{2n}\right)$$

vnde iſte arcus erit

$\frac{\pi}{2}-\frac{i\pi}{n}$, ideoque tota forma

$$\frac{2\pi}{n}\,\text{ſin.}\,\frac{im\pi}{n}-\frac{2i\pi}{nn}\,\text{ſin.}\,\frac{im\pi}{n}.$$

Ponamus breuitatis gratia $\frac{m\pi}{n}=\vartheta$, vt habeamus hanc formulam

$$\frac{2\pi}{n}\,\text{ſin.}\,i\vartheta-\frac{2i\pi}{nn}\,\text{ſin.}\,i\vartheta$$

quod ſi iam loco $i$ ſucceſſiue ſcribamus numeros 2, 4, 6, 8 etc. vsque ad vltimum $i$, qui eſt vel $n$, vel $n-1$, valor integralis quaeſitus per has duas ſeries exprimetur

$$\frac{2\pi}{n}(\text{ſin.}\,2\vartheta+\text{ſin.}\,4\vartheta+\text{ſin.}\,6\vartheta+\ldots\ldots+\text{ſin}\,i\vartheta)$$
$$-\frac{2\pi}{nn}(2\,\text{ſin.}\,2\vartheta+4\,\text{ſin.}\,4\vartheta+6\,\text{ſin.}\,6\vartheta+\ldots\ldots+i\,\text{ſin.}\,i\vartheta)$$

ſtatuamus igitur vt ſupra

$$t=2\,\text{ſin.}\,2\vartheta+4\,\text{ſin.}\,4\vartheta+6\,\text{ſin.}\,6\vartheta+\ldots\ldots+i\,\text{ſin.}\,i\vartheta$$
$$s=\text{ſin.}\,2\vartheta+\text{ſin.}\,4\vartheta+\text{ſin.}\,6\vartheta+\ldots\ldots+\text{ſin.}\,i\vartheta$$

ita vt valor quem quaerimus futurus ſit

$$\frac{2\pi}{n}s-\frac{2\pi}{nn}t.$$

Iam ſeriem priorem multiplicemus per $2\,\text{ſin.}\,\vartheta$, et cum ſit

$2\,\text{ſin.}\,\vartheta\,\text{ſin}\,i\vartheta=\text{coſ.}(i-1)\vartheta-\text{coſ.}(i+1)\vartheta$ erit

$$2s.\text{ſin.}\vartheta=\text{coſ.}\vartheta-\text{coſ.}3\vartheta-\text{coſ.}5\vartheta-\text{coſ.}7\vartheta\ldots\ldots-\text{coſ.}(i+1)\vartheta$$
$$+\text{coſ.}3\vartheta+\text{coſ.}5\vartheta+\text{coſ.}7\vartheta$$

ſeu

ſeu $2 s. \text{ſin.} \vartheta = \text{coſ.} \vartheta - \text{coſ.} (i+1) \vartheta$ ergo

$$s = \frac{\text{ſin.} \vartheta}{2 \text{ ſin.} \vartheta} - \frac{\text{coſ.} (i+1) \vartheta}{2 \text{ ſin.} \vartheta}.$$

Altera ſeries multiplicetur per $d \vartheta$ et cum ſit $\int (i\, d\vartheta \text{ ſin.}\, i\vartheta = -\text{coſ.}\, i\vartheta)$ prodibit integrando

$$\int t\, d\vartheta = -\text{coſ.}\, 2\vartheta - \text{coſ.}\, 4\vartheta - \text{coſ.}\, 6\vartheta - \ldots\ldots - \text{coſ.}\, i\vartheta$$

quae denuo multiplicata per $2 \text{ ſin.} \vartheta$ ob $2 \text{ ſin.} \vartheta \text{ coſ.}\, i\vartheta = \text{ſin.} (i+1)\vartheta - \text{ſin.} (i-1)\vartheta$ praebet

$$2 \text{ ſin.} \vartheta \int t\, d\vartheta = \text{ſin.} \vartheta - \text{ſin.}\, 3\vartheta - \text{ſin.}\, 5\vartheta - \text{ſin.}\, 7\vartheta - \ldots\ldots - \text{ſin.} (i+1)\vartheta$$
$$+ \text{ſin.}\, 3\vartheta + \text{ſin.}\, 5\vartheta + \text{ſin.}\, 7\vartheta$$

hinc per $2 \text{ ſin.} \vartheta$ diuidendo fit

$$\int t\, d\vartheta = -\tfrac{1}{2} - \frac{\text{ſin.} (i+1)\vartheta}{2 \text{ ſin.} \vartheta},$$

vnde colligimus

$$t = -\frac{(i+1) \text{ coſ.} (i+1)\vartheta}{2 \text{ ſin.} \vartheta} + \frac{\text{ſin.} (i+1)\vartheta \text{ coſ.} \vartheta}{2 \text{ ſin.} \vartheta^2}.$$

His igitur valoribus $s$ et $t$ inuentis integrale quaeſiſitum erit

$$\frac{\pi \text{ coſ.} \vartheta}{n \text{ ſin.} \vartheta} - \frac{\pi \text{ coſ.} (i+1)\vartheta}{n \text{ ſin.} \vartheta} + \frac{\pi (i+1) \text{ coſ.} (i+1)\vartheta}{n\, n \text{ ſin.} \vartheta} - \frac{\pi \text{ ſin.} (i+1)\vartheta \text{ coſ.} \vartheta}{n\, n \text{ ſin.} \vartheta^2}$$

cum nunc ſit $\vartheta = \frac{m\pi}{n}$, duo caſus euoluendi ſuperſunt, alter quo $n$ eſt numerus par et $i = n$, alter vero quo $n$ eſt numerus impar et $i = n - 1$.

I. Si $i = n$, erit $(i+1)\vartheta = m\pi + \frac{m\pi}{n} = m\pi + \vartheta$, vnde ob $\text{ſin.}\, m\pi = 0$ erit

$$\text{coſ.} (i+1)\vartheta = \text{coſ.}\, m\pi \text{ coſ.} \vartheta, \text{ et ſin} (i+1)\vartheta = \text{coſ.}\, m\pi \text{ ſin.} \vartheta,$$

quibus ſubſtitutis habebimus $\frac{\pi \text{ coſ.} \vartheta}{n \text{ ſin.} \vartheta}$ reliqua ſcilicet membra ſe mutuo deſtruunt ita, vt valor quaeſitus ſit $\frac{\pi \text{ coſ.} \vartheta}{n \text{ ſin.} \vartheta} = \frac{\pi}{n \text{ tang.} \vartheta}$.

 II.

II. Si $i = n - 1$ ideoque $i + 1 = n$ erit $(i+1)\vartheta = m\pi$ et $\cos.(i+1)\vartheta = \cos. m\pi$, at $\sin.(i+1)\vartheta = 0$, vnde formula noſtra fiet $\frac{\pi \cos. \vartheta}{n \sin. \vartheta}$, vbi ſcilicet reliqui termini praeter hunc ſeſe mutuo deſtruxerunt. Vnde patet, ſiue exponens $n$ fuerit par, ſiue impar, vtroque caſu valorem integralis quaeſiti eſſe $= \frac{\pi}{n \operatorname{tang.} \frac{m\pi}{n}}$.

## Corollarium 1.

§. 12. Si ergo fuerit $m + \mu = n$, et poſt integrationem ita inſtitutam, vt integrale euaneſcat poſito $z = 0$, capiatur $z = 1$, ſemper fiet

$$\int \frac{z^{m-1} - z^{\mu-1}}{1 - z^n} dz = \frac{\pi}{n \operatorname{tang.} \frac{m\pi}{n}}.$$

## Corollarium 2.

§. 13. Cum per ſeriem infinitam ſit

$$\frac{1}{1 - z^n} = 1 + z^n + z^{2n} + z^{3n} + z^{4n} + z^{5n} + \text{etc.}$$

integrale noſtrae formulae erit in genere

$$\frac{z^m}{m} + \frac{z^{m+n}}{m+n} + \frac{z^{m+2n}}{m+2n} + \frac{z^{m+3n}}{m+3n} + \text{etc.}$$

$$-\frac{z^\mu}{\mu} - \frac{z^{\mu+n}}{\mu+n} - \frac{z^{\mu+2n}}{\mu+2n} - \frac{z^{\mu+3n}}{\mu+3n} - \text{etc.}$$

vnde poſito $z = 1$, ſequentis ſeriei infinitae ſummatio habebitur

$\frac{\pi}{n \operatorname{tang.}}$

$$\frac{\pi}{n \operatorname{tang.} \frac{m\pi}{n}} = \begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} + \frac{1}{m+3n} + \frac{1}{m+4n} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu+n} - \frac{1}{\mu+2n} - \frac{1}{\mu+3n} - \frac{1}{\mu+4n} - \text{etc.} \end{cases}$$

quae ſeries a ſuperiori tantum ratione ſignorum diſcrepat; vel cum ſit $n = m + \mu$ erit

$$\frac{\pi}{(m+\mu) \operatorname{tang.} \frac{m\pi}{m+\mu}} = \begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{1}{2m+\mu} + \frac{1}{3m+2\mu} + \frac{1}{4m+3\mu} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu+m} - \frac{1}{3\mu+2m} - \frac{1}{4\mu+3m} - \text{etc.} \end{cases}$$

## Exempla.

I. Quia hae duae ſeries ſe mutuo deſtruunt caſu $\mu = m$, hoc caſu fiet

$$\frac{\pi}{2\, m \operatorname{tang.} \frac{\pi}{2}} = 0.$$

II. Sumamus $m = 1$ et $\mu = 2$ colligiturque

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \frac{1}{16} + \frac{1}{19} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{11} - \frac{1}{14} - \frac{1}{17} - \text{etc.} \end{cases} \text{ ſiue}$$

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc.}$$

ſi ergo hanc ſeriem per 2 multiplicemus, habebimus

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{4} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{8} + \frac{2}{10} - \text{etc.}$$

ſupra autem (§. 9.) inueneramus

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

hinc, ſi ab illa ſerie hanc ſubtrahamus, prodibit

$$0 = 1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{3}{8} + \frac{3}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{3}{14} + \text{etc.}$$

 quae

quae ita commode in periodos diſtribuitur:

$$0 = \begin{matrix} [+\frac{1}{1} - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5}] \\ [+\frac{1}{7} - \frac{3}{8} + \frac{3}{10} - \frac{1}{11}] \\ [+\frac{1}{13} - \frac{3}{14} + \frac{3}{16} - \frac{1}{17}] \\ \text{etc.} \end{matrix}$$

vnde ſequitur fore

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \text{etc.} = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{14} - \text{etc.}\right)$$

## Scholion.

§. 14. Aequalitas harum duarum ſerierum eo magis eſt notatu digna, quod eius veritas non parum abſtruſa videtur: rem igitur ſequenti modo tentemus. Ponamus pro priore

$$s = \frac{z}{1} - \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} - \frac{z^{11}}{11} + \frac{z^{13}}{13} - \frac{z^{17}}{17} + \text{etc.}$$

eritque differentiando

$$\frac{ds}{dz} = 1 - z^4 + z^6 - z^{10} + z^{12} - z^{16} + z^{18} \text{ etc.} = \frac{1 - z^4}{1 - z^6}$$

vnde fit

$$s = \int \frac{(1 - z^4)\,dz}{1 - z^6},$$

in quo integrali poni debet $z = 1$; qua forma cum problemate poſtremo comparata fit $m = 1$; $\mu = 5$ et $n = 6$; ita vt ſit $m + \mu = n$; hinc ergo colligitur

$$s = \frac{\pi}{6 \text{ tang. } \frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Pro altera ſerie ponamus

$$t = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^8}{8} - \frac{z^{10}}{10} + \frac{z^{14}}{14} - \text{etc.}$$

vt,

vt, poſito $z = 1$ fieri debeat $s = 3t$; erit ergo differentiando

$$\frac{dt}{dz} = z - z^3 + z^7 - z^9 + z^{13} - z^{15} + z^{19} - \text{etc.} = \frac{z - z^3}{1 - z^6}$$

vnde fit

$$t = \int \frac{(z - z^3)\,dz}{1 - z^6};$$

qua aequatione cum problemate vltimo comparata, ob $m = 2$; $\mu = 4$; $n = 6$ poſitoque $z = 1$ prodit

$$t = \frac{\pi}{6 \text{ tang. } \frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}},$$

quocirca erit $3t = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ hincque

$$s = 3t = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

# DE VALORE FORMVLAE INTEGRALIS

$$\int \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (l z)^{\mu}$$

## CASV QVO POST INTEGRATIONEM PONITVR $z = 1$.

Auctore

*L. EVLERO.*

§. 1.

Ex conſideratione innumerabilium arcuum circularium, qui communem habent vel ſinum vel tangentem, iam olim ſummationem duarum ſerierum infinitarum deduxi, quae ob ſummam generalitatem maxime memoratu dignae videbantur. Si enim literae $m$ et $n$ numeros quoscunque denotant; poſita diametri ratione ad peripheriam vt 1 ad $\pi$, illae duae ſummationes hoc modo ſe habebant:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} \text{ etc.} = \frac{\pi}{n \operatorname{ſin.} \frac{m\pi}{n}}$$

et

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \text{etc} = \frac{\pi}{n \operatorname{tang.} \frac{m\pi}{n}}$$

atque

atque ex his duabus ſeriebus iam tum temporis elicueram ſummationes omnium ſerierum illarum, quarum denominatores ſecundum poteſtates numerorum naturalium progrediuntur, quemadmodum in introductione in analyſin infinitorum et alibi fuſius expoſui. Nunc autem eaedem ſeries me perduxerunt ad integrationem formulae in titulo expreſſae, quae eo magis attentione digna videtur, quod huiusmodi integrationes aliis methodis neutiquam exſequi liceat.

§. 2. Statim autem patet: has duas ſeries infinitas oriri ex euolutione quarundam formularum integralium, ſi poſt integrationem quantitati variabili certus valor, veluti vnitas tribuatur; ita prior ſeries deducitur ex euolutione huius formulae integralis

$$\int \frac{z^{m-1} + z^{n-m-1}}{1 + z^n} dz$$

poſteriore vero ex euolutione iſtius

$$\int \frac{z^{m-1} - z^{n-m-1}}{1 - z^n} dz$$

ſi quidem poſt integrationem ſtatuatur $z = 1$. Deinceps autem ex ipſis principiis calculi integralis demonſtraui, valorem integralis prioris harum duarum formularum, ſi quidem ponatur $z = 1$, reduci ad hanc formulam ſimplicem

$$\frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}$$

integrale autem poſterius, eodem caſu $z = 1$, ad iſtam

$$\frac{\pi}{n \tang. \frac{m\pi}{n}}$$ ita,

ita, vt ex ipſis calculi integralis principiis certum ſit eſſe

$$\int \frac{z^{m-1} + z^{n-m-1}}{1 + z^n} dz = \frac{\pi}{n \text{ ſin. } \frac{m\pi}{n}}$$

$$\int \frac{z^{m-1} - z^{n-m-1}}{1 - z^n} dz = \frac{\pi}{n \text{ tang. } \frac{m\pi}{n}}$$

ſi quidem poſt integrationem ita inſtitutam, vt integrale euaneſcat poſito $z = 0$, ſtatuatur $z = 1$.

§. 3. Quo iam hanc duplicem integrationem ad formam propoſitam reducamus, faciamus $n = 2\lambda$ et $m = \lambda - \omega$, vnde binae illae ſeries infinitae hanc induent formam

$$\frac{1}{\lambda-\omega} + \frac{1}{\lambda+\omega} - \frac{1}{3\lambda-\omega} - \frac{1}{3\lambda+\omega} + \frac{1}{5\lambda-\omega} + \frac{1}{5\lambda+\omega} - \text{etc.}$$

et

$$\frac{1}{\lambda-\omega} - \frac{1}{\lambda+\omega} + \frac{1}{3\lambda-\omega} - \frac{1}{3\lambda+\omega} + \frac{1}{5\lambda-\omega} - \frac{1}{5\lambda+\omega} + \text{etc.}$$

harum igitur ſerierum prioris ſumma erit

$$\frac{\pi}{2\lambda \text{ ſin. } \frac{\pi(\lambda-\omega)}{2\lambda}} = \frac{\pi}{2\lambda \text{ coſ. } \frac{\pi\omega}{2\lambda}}$$

poſterioris vero ſumma erit

$$\frac{\pi}{2\lambda \text{ tang. } \frac{\pi(\lambda-\omega)}{2\lambda}} = \frac{\pi}{2\lambda \text{ cotang. } \frac{\pi\omega}{2\lambda}} = \frac{\pi \text{ tang. } \frac{\pi\omega}{2\lambda}}{2\lambda}.$$

Quod ſi ergo breuitatis gratia ponamus

$$\frac{\pi}{2\lambda \text{ coſ. } \frac{\pi\omega}{2\lambda}} = S, \text{ et } \frac{\pi}{2\lambda} \text{ tang. } \frac{\pi\omega}{2\lambda} = T,$$

habe-

habebimus ſequentes duas integrationes

$$\int \frac{z^{\lambda - \omega} + z^{\lambda + \omega}}{1 + z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z} = S, \text{ et}$$

$$\int \frac{z^{\lambda - \omega} - z^{\lambda + \omega}}{1 - z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z} = T.$$

§. 4. Circa has binas integrationes ante omnia obſeruo, eas perinde locum habere, ſiue pro literis $\lambda$ et $\omega$ accipiantur numeri integri, ſiue fracti. Sint enim $\lambda$ et $\omega$ numeri fracti quicunque, qui euadant integri, ſi multiplicentur per $\alpha$, quo poſito fiat $z = x^{\alpha}$, eritque $\frac{dz}{z} = \frac{\alpha dx}{x}$, et poteſtas quaecunque $z^{\vartheta} = x^{\alpha\vartheta}$; prior igitur formula erit

$$\int \frac{x^{\alpha(\lambda - \omega)} + x^{\alpha(\lambda + \omega)}}{1 + x^{2\alpha\lambda}} \cdot \frac{\alpha dx}{x}$$

vbi, cum iam omnes exponentes ſint numeri integri, valor huius formulae poſito poſt integrationem $x = 1$, quandoquidem tunc etiam fit $z = 1$, a praecedente eo tantum differt, quod hic habeamus $\alpha\lambda$ et $\alpha\omega$ loco $\lambda$ et $\omega$, ac praeterea hic adſit factor $\alpha$, quocirca valor iſtius formulae erit

$$\alpha. \frac{\pi}{2\alpha\lambda \operatorname{coſ}. \frac{\pi\omega}{2\lambda}} = \frac{\pi}{2\lambda \operatorname{coſ}. \frac{\pi\omega}{2\lambda}}$$

qui ergo valor eſt $= S$ prorſus vt ante; quae identitas etiam manifeſto eſt in altera formula, vnde patet, etiamſi pro $\lambda$ et $\omega$ fractiones quaecunque accipiantur, integrationem hic exhibitam nihilo minus locum eſſe habituram; quae circumſtantia probe

 notari

notari meretur, quoniam in ſequentibus literam $\omega$ tanquam variabilem ſumus tractaturi.

§. 5. Poſtquam igitur binae iſtae formulae integrales literis S et T indicatae fuerint integratae, ita, vt euaneſcant poſito $z = 0$, integralia ſpectari poterunt non ſolum vt functiones quantitatis $z$, ſed etiam vt functiones binarum variabilium $z$ et $\omega$, quandoquidem numerum $\omega$ tanquam quantitatem variabilem tractare licet, quin etiam exponentem $\lambda$ pro quantitate variabili habere liceret; ſed quia hinc formulae integrales alius generis eſſent proditurae, atque hic contemplari conſtitui, ſolam quantitatem $\omega$, praeter ipſam variabilem $z$, hic vt quantitatem variabilem ſum tractaturus.

§. 6. Cum igitur ſit

$$S = \int \frac{z^{\lambda - \omega} + z^{\lambda + \omega}}{1 + z^{2\lambda}} \frac{dz}{z}$$

in qua integratione ſola $z$ vt variabilis ſpectatur, erit vtique ſecundum ſignandi morem iam ſatis vſu receptum

$$\left(\frac{dS}{dz}\right) = \frac{z^{\lambda - \omega} + z^{\lambda + \omega}}{1 + z^{2\lambda}} \cdot \frac{1}{z}$$

haec iam formula denuo differentietur, poſita ſola litera $\omega$ variabili, eritque

$$\left(\frac{ddS}{dz\,d\omega}\right) = \frac{-z^{\lambda - \omega} + z^{\lambda + \omega}}{1 + z^{2\lambda}} \cdot \frac{1}{z} lz$$

quae formula ducta in $dz$, ac denuo integrata ſola $z$ habita pro variabili, dabit

$\int dz$

$$\int dz\left(\frac{ddS}{dz\,d\omega}\right)=\int-\frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\frac{dz}{z}lz$$

vbi notetur eſſe

$$S=\frac{\pi}{2\lambda\cos\!.\frac{\pi\omega}{2\lambda}}$$

ita, vt hinc deducamus

$$\left(\frac{dS}{d\omega}\right)=\frac{\pi\pi\sin\!.\frac{\pi\omega}{2\lambda}}{4\lambda\lambda\cos\!.\frac{\pi\omega^2}{2\lambda}},$$

hoc igitur valore ſubſtituto nanciſcimur hanc integrationem

$$\int\frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\frac{dz}{z}lz=\frac{\pi\pi\sin\!.\frac{\pi\omega}{2\lambda}}{4\lambda\lambda\cos\!.\frac{\pi\omega^2}{2\lambda}}.$$

§. 7. Quod ſi iam altera formula ſimili modo tractetur, cum ſit

$T=\frac{\pi}{2\lambda}\,\text{tang.}\frac{\pi\omega}{2\lambda}$ erit

$$\left(\frac{dT}{d\omega}\right)=\frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda\cos\!.\frac{\pi\omega^2}{2\lambda}}$$

ex formula autem integrali erit

$$\left(\frac{dT}{d\omega}\right)=\int-\frac{z^{\lambda-\omega}-z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}}.\frac{dz}{z}lz$$

vnde colligimus ſequentem integrationem

$$\int\frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}}\frac{dz}{z}lz=\frac{-\pi\pi}{4\lambda\lambda\cos\!.\frac{\pi\omega^2}{2\lambda}}.$$

§. 8. Quoniam literas S et T etiam per ſeries expreſſas dedimus, erit etiam per ſimiles ſeries

$$\left(\frac{dS}{d\omega}\right) = \frac{1}{(\lambda-\omega)^2} - \frac{1}{(\lambda+\omega)^2} - \frac{1}{(3\lambda-\omega)^2} + \frac{1}{(3\lambda+\omega)^2} + \frac{1}{(5\lambda-\omega)^2} - \text{etc.}$$

$$= \frac{\pi\pi \operatorname{ſin.} \frac{\pi\omega}{\lambda}}{4\lambda\lambda \operatorname{coſ.} \frac{\pi\omega^2}{2\lambda}}.$$

Similique modo etiam pro altera ſerie

$$\left(\frac{dT}{d\omega}\right) = \frac{1}{(\lambda-\omega)^2} + \frac{1}{(\lambda+\omega)^2} + \frac{1}{(3\lambda-\omega)^2} + \frac{1}{(3\lambda+\omega)^2} + \frac{1}{(5\lambda-\omega)^2} + \text{etc.}$$

$$= \frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda \operatorname{coſ.} \frac{\pi\omega^2}{2\lambda}}$$

ſicque ſummas harum ſerierum quoque duplici modo repraeſentauimus, ſcilicet per formulam euolutam quantitatem $\pi$ inuoluentem, tum vero etiam per formulam integralem; quae ita eſt comparata, vt eius integrale nulla methodo adhuc conſueta aſſignari poſſit.

§. 9. Applicemus has integrationes ad aliquot caſus particulares: ac primo quidem ſumamus $\omega = 0$, quo quidem caſu prior integratio ſponte in oculos incurrit, at poſterior praebet:

$$\int \frac{2z^{\lambda}}{1-z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} lz = -\frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda}, \text{ ſiue}$$

$$\int \frac{z^{\lambda-1}\, dz\, lz}{1-z^{2\lambda}} = -\frac{\pi\pi}{8\lambda\lambda}$$

hincque ſimul iſtam ſummationem adipiſcimur

$$\frac{1}{\lambda\lambda} + \frac{1}{\lambda\lambda} + \frac{1}{9\lambda\lambda} + \frac{1}{9\lambda\lambda} + \frac{1}{25\lambda\lambda} + \frac{1}{25\lambda\lambda} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda}$$

ſiue

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{8},$$

id quod iam dudum a me eſt demonſtratum.

§. 10. Hic ſtatim patet, perinde eſſe, quinam numerus pro $\lambda$ accipiatur; ſit igitur $\lambda = 1$, et habebitur iſta integratio

$$\int \frac{dz\,lz}{1 - z^2} = -\frac{\pi\pi}{8},$$

ex qua ſequentia integralia ſimpliciora

$$\int \frac{dz\,lz}{1 - z} \quad \text{et} \quad \int \frac{dz\,lz}{1 + z}$$

deriuare licet, ope huius ratiocinii; ſtatuatur

$$\int \frac{z\,dz\,lz}{1 - zz} = P,$$

et poſito $zz = v$, vt ſit $z\,dz = \frac{dv}{2}$ et $lz = \frac{1}{2}lv$ prodibit

$$\frac{1}{4}\int \frac{dv\,lv}{1 + v} = P,$$

ſi ſcilicet poſt integrationem fiat $v = 1$ quippe quo caſu etiam fit $z = 1$; ſic igitur erit

$$\int \frac{dv\,lv}{1 - v} = 4P,$$

nunc prior illa formula addatur ad inuentam eritque

$$\int \frac{dz\,lz + z\,dz\,lz}{1 - zz} = P - \frac{\pi\pi}{v}$$

haec autem formula ſponte reducitur ad hanc:

$$\int \frac{dz\,lz}{1 - z} = P - \frac{\pi\pi}{8}$$

modo autem vidimus eſſe:

$\int \frac{dv\,lv}{1 - v}$ ſiue $\int \frac{dz\,lz}{1 - z} = 4P$, ita, vt ſit $4P = P - \frac{\pi\pi}{8}$,

vnde manifeſto fit $P = -\frac{\pi\pi}{25}$, ex quo ſequitur fore

$$\int \frac{dz\,lz}{1 + z} = -\frac{\pi\pi}{6};$$

ſimili modo erit

$$\int \frac{dz\,lz - z\,dz\,lz}{1 - zz} = -P - \frac{\pi\pi}{8} = -\frac{\pi\pi}{12}$$

 quae,

quae, ſupra et infra per $1-z$ diuidendo, praebet

$$\int\frac{dz\,lx}{1+z}=-\frac{\pi\pi}{12}$$

quare iam adepti ſumus tres integrationes memoratu maxime dignas

I. $\int\frac{dz\,lz}{1+z}=-\frac{\pi\pi}{12}$

II. $\int\frac{dz\,lz}{1-z}=-\frac{\pi\pi}{6}$

III. $\int\frac{dz\,lz}{1-zz}=-\frac{\pi\pi}{8}$ quibus adiungi poteſt

IV. $\int\frac{z\,dz\,lz}{1-zz}=-\frac{\pi\pi}{24}$.

§. 11. Quemadmodum igitur hae formulae ex ipſis calculi integralis principiis ſunt deductae, ita etiam earum veritas per reſolutionem in ſeries facile comprobatur; cum enim ſit

$$\frac{1}{1+z}=1-z+zz-z^3+z^4-z^5+\text{etc.},$$

et ingenere

$$\int z^n\,dz\,lz=\frac{z^{n+1}}{n+1}\,lz-\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}$$

qui valor poſito $z=1$ reducitur ad $\frac{1}{(n+1)^2}$, patet fore

$$\int\frac{dz\,lz}{1+z}=-1+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{25}+\text{etc.}=-\frac{\pi\pi}{12}\ \text{ſiue}$$

$$1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{25}-\text{etc.}=\frac{\pi\pi}{12}$$

ſimili modo ob

$$\frac{1}{1-z}=1+z+zz+z^3+z^4+\text{etc. erit}$$

$$\int\frac{dz\,lz}{1-z}=-1-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{25}-\text{etc.}=-\frac{\pi\pi}{6},\ \text{ſeu}$$

$$1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{25}+\text{etc.}=\frac{\pi\pi}{6},$$

tum

tum vero ob

$\frac{1}{1-zz} = 1 + zz + z^4 + z^6 + z^8 +$ etc. erit

$\int \frac{dz\, lz}{1-zz} = -1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{25} - \frac{1}{49} - \frac{1}{81} -$ etc. $= -\frac{\pi\pi}{8}$, ſiue

$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} = \frac{\pi\pi}{8}$.

Eodem modo etiam

$\int \frac{z\, dz\, lz}{1-zz} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{36} - \frac{1}{64} -$ etc. $= -\frac{\pi\pi}{24}$

ſiue $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} +$ etc. $= \frac{\pi\pi}{24}$

quae quidem ſummationes iam ſunt notiſſimae. Neque tamen quisquam adhuc methodo directa oſtendit eſſe

$\int \frac{dz\, lz}{1+z} = -\frac{\pi\pi}{12}$,

§. 12. Ponamus nunc $\omega = 1$, et noſtrae integrationes has induent formas

1°. $\int \frac{-z^{\lambda-2}(1-zz)\, dz\, lz}{1+z^{2\lambda}} = \frac{\pi\pi \text{ ſin. } \frac{\pi}{2\lambda}}{4\lambda\lambda \text{ coſ. } \frac{\pi^2}{2\lambda}}$ et

2°. $\int \frac{-z^{\lambda-2}(1+zz)\, dz\, lz}{1-z^{2\lambda}} = + \frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda \text{ coſ. } \frac{\pi^2}{2\lambda}}$

vnde pro diuerſis valoribus ipſius $\lambda$, quos quidem binario non minores accipere licet, ſequentes obtinentur integrationes

I°. ſi $\lambda = 2$ erit

1°. $\int \frac{-(1-zz)\, dz\, lz}{1+z^4} = \frac{\pi\pi}{8\sqrt{2}}$

2°. $\int \frac{-(1+zz)\, dz\, lz}{1-z^4} = + \frac{\pi\pi}{8}$ ſiue $\int \frac{-dz\, lz}{1-zz} = + \frac{\pi\pi}{8}$

II°. ſi $\lambda = 3$ habebimus

1.

1. $\int \frac{-z(1+zz)dz\,lz}{1+z^6} = \frac{\pi\pi}{54}$, et

2. $\int \frac{-z(1+zz)dz\,lz}{1-z^6} = \int \frac{-z\,dz\,lz}{1-zz+z^4} = \frac{\pi\pi}{27}$.

Hae autem duae formulae ponendo $zz = v$ abibunt in ſequentes

1. $\int \frac{-dv(1-v)lv}{1+v^3} = \frac{2\pi\pi}{27}$ etc.

2. $\int \frac{dv\,lv}{1-v+vv} = -\frac{4\pi\pi}{27}$.

III°. Sit $\lambda = 4$ et conſequemur

1°. $\int \frac{-zz(1-zz)dz\,lz}{1+z^8} = \frac{\pi\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}}{16(2+\sqrt{2}} = \frac{\pi\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}}{32(2+\sqrt{2})}$ et

2°. $\int \frac{-zz(1+zz)dz\,lz}{1-z^8} = \int \frac{-zz\,dz\,lz}{(1-zz)(1+z^4)} = \frac{\pi\pi}{16(2+\sqrt{2})}$

quae poſtrema forma reducitur ad hanc

$$\int -\frac{dz\,lz}{1-zz} + \int \frac{(1-zz)dz\,lz}{1+z^4} = \frac{\pi\pi}{8(2+\sqrt{2})}$$

eſt vero $\int \frac{-dz\,lz}{1-zz} = \frac{\pi\pi}{8}$ vnde reperitur

$$\int \frac{dz\,lz(1-zz)}{1+z^4} = -\frac{\pi\pi(1+\sqrt{2})}{8(2+\sqrt{2})} = -\frac{\pi\pi}{8\sqrt{2}}$$

qui valor iam in ſupcriori caſu $\lambda = 2$ eſt inuentus.

§. 13. Nihil autem impedit, quo minus etiam faciamus $\lambda = 1$, dummodo integralia ita capiantur vt euaneſcant, poſito $z = 0$, tum autem reperiemus

1°. $\int \frac{-(1-zz)dz\,lz}{z(1+zz)} = \infty$ et

2°. $\int \frac{-(1+zz)dz\,lz}{z(1-zz)} = \infty$

vnde hinc nihil concludere licet. Ceterum etiam noſtrae ſeries ſupra inuentae manifeſto declarant, earum

rum ſummas eſſe infinitas, quandoquidem primus terminus vtriusque $\frac{1}{(\lambda-\omega)^2}$ fit infinitus, ſumto vti fecimus $\lambda = 1$ et $\omega = 1$.

§. 14. His caſibus euolutis, vlterius progrediamur ac ponamus formulas integrales inuentas

$$\int \frac{-z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} lz = S' \text{ et}$$

$$\int \frac{-z^{\lambda-\omega}-z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} lz = T'$$

ita vt ſit

$$S' = \frac{\pi\pi \sin. \frac{\pi\omega}{2\lambda}}{4\lambda\lambda \cos. \frac{\pi\omega^2}{2\lambda}}, \text{ et } T' = \frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda \cos. \frac{\pi\omega^2}{2\lambda}}$$

atque vt ante iam differentiemus ſolo numero $\omega$ pro variabili habito; quo facto ſequentes nanciſcimur integrationes

$$\int \frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (lz)^2 = \left(\frac{dS'}{d\omega}\right), \text{ et}$$

$$\int \frac{z^{\lambda-\omega}-z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (lz)^2 = \left(\frac{dT'}{d\omega}\right).$$

Hunc in finem ponamus breuitatis ergo angulum $\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \Phi$ vt ſit

$$S' = \frac{\pi\pi \sin. \Phi}{4\lambda\lambda \cos. \Phi^2} = \frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda} \cdot \frac{\sin. \Phi}{\cos. \Phi^2} \text{ et}$$

$$T' = \frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda} \cdot \frac{1}{\cos. \Phi^2}, \text{ ac reperiemus}$$

$$d \frac{\sin. \Phi}{\cos. \Phi^2} = \frac{\cos. \Phi^2 + 2 \sin. \Phi^2}{\cos. \Phi^3} d\Phi = \frac{1+\sin. \Phi^2}{\cos. \Phi^3} d\Phi$$

vbi eſt $d\Phi = \frac{\pi d\omega}{2\lambda}$; vnde colligimus

$$\left(\frac{dS'}{d\omega}\right) = \frac{\pi^3}{8\lambda^3}\left(\frac{1+\text{ſin.}\frac{\pi\omega^2}{2\lambda}}{\text{coſ.}\frac{\pi\omega^3}{2\lambda}}\right) = \frac{\pi^3}{8\lambda^3}\left(\frac{2}{\text{coſ.}\frac{\pi\omega^3}{2\lambda}} - \frac{1}{\text{coſ.}\frac{\pi\omega}{2\lambda}}\right)$$

ſimili modo ob $T' = \frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda}\cdot\frac{1}{\text{coſ.}\,\Phi^2}$, erit

$d.\frac{1}{\text{coſ.}\,\Phi^2} = \frac{2\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^3}$, hincque

$$\left(\frac{dT'}{d\omega}\right) = \frac{\pi^3}{8\lambda^3}\cdot\frac{2\,\text{ſin.}\frac{\pi\omega}{2\lambda}}{\text{coſ.}\frac{\pi\omega^3}{2\lambda}}.$$

conſequenter integrationes hinc natae erunt

$$\int\frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\frac{dz}{z}(lz)^2 = \frac{\pi^3}{8\lambda^3}\left(\frac{2}{\text{coſ.}\frac{\pi\omega^3}{2\pi}} - \frac{1}{\text{coſ.}\frac{\pi\omega}{2\lambda}}\right)$$

$$\int\frac{z^{\lambda-\omega}-z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}}\frac{dz}{z}(lz)^2 = \frac{\pi^3}{8\lambda^3}\frac{2\,\text{ſin.}\frac{\pi\omega}{2\lambda}}{\text{coſ.}\frac{\pi\omega^3}{2\lambda}}.$$

§. 15. Si iam eodem modo ſeries §. 8. inventas denuo differentiemus, ſumta ſola $\omega$ variabili, perueniamus ad ſequentes ſummationes

$$\frac{\pi^3}{8\lambda^3}\left\{\frac{2}{\text{coſ.}\frac{\pi\omega^3}{2\lambda}} - \frac{1}{\text{coſ.}\frac{\pi\omega}{2\lambda}}\right\} = +\frac{2}{(\lambda-\omega)^3} + \frac{2}{(\lambda+\omega)^3} - \frac{2}{(3\lambda-\omega)^3} - \frac{2}{(3\lambda+\omega)^3} + \frac{2}{(5\lambda-\omega)^3} + \frac{2}{(5\lambda+\omega)^3} - \text{etc.}$$

$$\frac{\pi^3}{8\lambda^3}\cdot\frac{2\,\text{ſin.}\frac{\pi\omega}{2\lambda}}{\text{coſ.}\frac{\pi\omega^3}{2\lambda}} = \frac{2}{(\lambda-\omega)^3} - \frac{2}{(\lambda+\omega)^3} + \frac{2}{(3\lambda-\omega)^3} - \frac{2}{(3\lambda+\omega)^3} + \frac{2}{(5\lambda-\omega)^3} - \text{etc.}$$

§. 16. Si iam hic ſumamus $\omega = 0$ et $\lambda = 1$, prior integratio hanc induit formam

$$\int\frac{2\,dz\,(lz)^2}{1+zz} = \frac{\pi^3}{8} = \frac{2}{1^3} + \frac{2}{1^3} - \frac{2}{3^3} - \frac{2}{3^3} + \frac{2}{5^3} + \frac{2}{5^3} - \frac{2}{7^3} - \frac{2}{7^3} + \text{etc.}$$

ita vt ſit

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \text{etc.} = \frac{\pi^3}{32}$$

quem-

quemadmodum iam dudum demonſtraui. Altera autem integratio hoc caſu in nihilum abit. Ex priori vero integrali

$$\int \frac{dz\, lz^2}{1+zz} = \frac{\pi^3}{16},$$

alia deriuare non licet, vti ſupra fecimus ex formula

$$\int \frac{dz\, lz}{1-zz} = -\frac{\pi\pi}{8},$$

propterea quod hic denominator $1+zz$ non habet factores reales.

§. 17. Sumamus igitur $\lambda = 2$ et $\omega = 1$, ac prior integratio dabit

$$\int \frac{(1+zz)\, dz\, (lz)^2}{1+z^4} = \frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}};$$

ſeries autem hinc nata erit

$$\frac{2}{1^3} + \frac{2}{3^3} - \frac{2}{5^3} - \frac{2}{7^3} + \frac{2}{9^3} + \frac{2}{11^3} - \text{etc.},$$ ita vt ſit

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} = \frac{3\pi^3}{64\sqrt{2}}$$

quae ſuperiori addita praebet

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{15^3} + \frac{1}{17^3} - \frac{1}{23^3} = \frac{\pi^3(8+2\sqrt{2})}{128\sqrt{2}}:$$

Altera vero integratio hoc caſu dat

$$\int \frac{dz\,(lz)^2}{1+zz} = \frac{\pi^3}{16}$$

quae cum paragrapho praecedenti perfecte congruit, quemadmodum etiam ſeries hinc nata eſt

$$\frac{2}{1^3} - \frac{2}{3^3} + \frac{2}{5^3} - \frac{2}{7^3} + \frac{2}{9^3} - \frac{2}{11^3} + \frac{2}{13^3} \text{ etc.}$$

§. 18. Quo autem facilius ſequentes integrationes per continuam differentiationem elicere valea-

mus, eas in genere repraeſentemus: et cum pro priore ſit

$$S = \frac{\pi}{2\lambda \operatorname{coſ.} \frac{\pi\omega}{2\lambda}}$$

integrationes hinc ortae ita ordine procedent:

I. $\int \frac{z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} = S$.

II. $\int \frac{-z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} lz = (\frac{dS}{d\omega})$

III. $\int \frac{z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (lz)^2 = (\frac{ddS}{d\omega^2})$

IV. $\int \frac{-z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (lz)^3 = (\frac{d^3 S}{d\omega^3})$

V. $\int \frac{z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (lz)^4 = (\frac{d^4 S}{d\omega^4})$

VI. $\int \frac{-z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (lz)^5 = (\frac{d^5 S}{d\omega^5})$

VII. $\int \frac{z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (lz)^6 = (\frac{d^6 S}{d\omega^6})$

etc. etc. etc.

§. 19. Pro his differentiationibus continuis $\omega$ facilius abſoluendis, ponamus breuitatis ergo $\frac{\pi}{2\lambda} = \alpha$, vt ſit

$$S = \frac{\alpha}{\operatorname{coſ.} \alpha\omega};$$

tum vero ſit

$$\operatorname{ſin.} \alpha\omega = p \text{ et } \operatorname{coſ.} \alpha\omega = q,$$

erit-

eritque

$$dp = \alpha q\, d\omega \quad \text{et} \quad dq = -\alpha p\, d\omega;$$

Praeterea vero notetur eſſe

$$d.\frac{p^n}{q^{n+1}} = \alpha\, d\omega \left\{ \frac{n\, p^{n-1}}{q^n} + \frac{(n+1)\, p^{n+1}}{q^{n+2}} \right\}.$$

His praemiſſis ob $S = \alpha . \frac{1}{q}$ erit

$\left(\frac{dS}{d\omega}\right) = \alpha\alpha . \frac{p}{qq}$, deinde

$\left(\frac{ddS}{d\omega^2}\right) = \alpha^3 \left(\frac{1}{q} + \frac{2pp}{q^3}\right)$, porro

$$\left(\frac{d^3S}{d\omega^3}\right) = \alpha^4 \left(\frac{5p}{qq} + \frac{6p^3}{q^4}\right)$$

$$\left(\frac{d^4S}{d\omega^4}\right) = \alpha^5 \left(\frac{5}{q} + \frac{28pp}{q^3} + \frac{24p^4}{q^5}\right)$$

$$\left(\frac{d^5S}{d\omega^5}\right) = \alpha^6 \left(\frac{61p}{qq} + \frac{180p^3}{q^4} + \frac{120p^5}{q^6}\right)$$

$$\left(\frac{d^6S}{d\omega^6}\right) = \alpha^7 \left(\frac{61}{q} + \frac{662pp}{q^3} + \frac{1320p^4}{q^5} + \frac{720p^6}{q^7}\right)$$

$$\left(\frac{d^7S}{d\omega^7}\right) = \alpha^8 \left(\frac{1385p}{qq} + \frac{7266p^3}{q^4} + \frac{10920p^5}{q^6} + \frac{5040p^7}{q^8}\right)$$

hi autem valores ob $pp = 1 - qq$ ad ſequentes reducuntur:

$$S = \alpha . \frac{1}{q}$$

$$\left(\frac{dS}{d\omega}\right) = \alpha\alpha p . \frac{1}{qq}$$

$$\left(\frac{ddS}{d\omega^2}\right) = \alpha^3 \left(\frac{1.2}{q^3} - \frac{1}{q}\right)$$

$$\left(\frac{d^3S}{d\omega^3}\right) = \alpha^4 p \left(\frac{1.2.3}{q^4} - \frac{1}{qq}\right)$$

$$\left(\frac{d^4S}{d\omega^4}\right) = \alpha^5 \left(\frac{1.2.3.4}{q^5} - \frac{20}{q^3} + \frac{1}{q}\right)$$

$$\left(\frac{d^5S}{d\omega^5}\right) = \alpha^6 p \left(\frac{1.2.3.4.5}{q^6} - \frac{60}{q^4} + \frac{1}{qq}\right)$$

$$\left(\frac{d^6S}{d\omega^6}\right) = \alpha^7 \left(\frac{1 \ldots 6}{q^7} - \frac{840}{q^5} + \frac{182}{q^3} - \frac{1}{q}\right).$$

§. 20. Has poſteriores formas reperire licet ope horum duorum lemmatum

$$\text{I. } d.\frac{1}{q^{n+1}} = \alpha d\omega \frac{(n+1)p}{q^{n+2}};\quad \text{II. } d.\frac{p}{q^{n+1}} = \alpha d\omega \left\{\frac{n+1}{q^{n+2}} - \frac{n}{q^{n}}\right\}$$

hinc enim reperiemus

$$S = \alpha \tfrac{1}{q}$$
$$\left(\frac{dS}{d\omega}\right) = \alpha\,\alpha.\, \frac{p}{qq}$$
$$\left(\frac{ddS}{d\omega^2}\right) = \alpha^3 \left(\frac{2}{q^3} - \frac{1}{q}\right)$$
$$\left(\frac{d^3S}{d\omega^3}\right) = \alpha^4 \left(\frac{2\cdot 3\,p}{q^4} - \frac{p}{qq}\right)$$
$$\left(\frac{d^4S}{d\omega^4}\right) = \alpha^5 \left(\frac{2\cdot 3\cdot 4}{q^5} - \frac{20}{q^3} + \frac{1}{q}\right)$$
$$\left(\frac{d^5S}{d\omega^5}\right) = \alpha^6 \left(\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,p}{q^6} - \frac{3\cdot 20\,p}{q^4} + \frac{p}{qq}\right)$$
$$\left(\frac{d^6S}{d\omega^6}\right) = \alpha^7 \left(\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,p}{q^7} - \frac{840}{q^5} + \frac{182}{q^3} - \frac{1}{q}\right)$$
$$\left(\frac{d^7S}{d\omega^7}\right) = \alpha^8 \left(\frac{2\cdot\ldots\cdot 7\,q}{q^8} - \frac{5\cdot 840}{q^6} + \frac{3\cdot 182}{q^4} - \frac{p}{qq}\right).$$

§. 21. Ipſae autem ſeries his formulis reſpondentes

$$S = \frac{1}{\lambda-\omega} + \frac{1}{\lambda+\omega} - \frac{1}{3\lambda-\omega} - \frac{1}{3\lambda+\omega} + \frac{1}{5\lambda-\omega} + \frac{1}{5\lambda+\omega} - \text{etc.}$$
$$\left(\frac{dS}{d\omega}\right) = \frac{1}{(\lambda-\omega)^2} - \frac{1}{(\lambda+\omega)^2} - \frac{1}{(3\lambda-\omega)^2} + \frac{1}{(3\lambda+\omega)^2} + \frac{1}{(5\lambda-\omega)^2} - \frac{1}{(5\lambda+\omega)^2} - \text{etc.}$$
$$\left(\frac{ddS}{d\omega^2}\right) = \frac{1\cdot 2}{(\lambda-\omega)^3} + \frac{1\cdot 2}{(\lambda+\omega)^3} - \frac{1\cdot 2}{(3\lambda-\omega)^3} - \frac{1\cdot 2}{(3\lambda+\omega)^3} + \frac{1\cdot 2}{(5\lambda-\omega)^3} + \text{etc.}$$
$$\left(\frac{d^3S}{d\omega^3}\right) = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(\lambda-\omega)^4} - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(\lambda+\omega)^4} - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(3\lambda-\omega)^4} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(3\lambda+\omega)^4} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(5\lambda-\omega)^4} - \text{etc.}$$
$$\left(\frac{d^4S}{d\omega^5}\right) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(\lambda-\omega)^5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(\lambda+\omega)^5} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(3\lambda-\omega)^5} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(3\lambda+\omega)^5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(5\lambda-\omega)^5} + \text{etc.}$$
$$\left(\frac{d^5S}{d\omega^5}\right) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(\lambda-\omega)^6} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(\lambda+\omega)^6} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(3\lambda-\omega)^6} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(3\lambda+\omega)^6} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(5\lambda-\omega)^6} - \text{etc.}$$
$$\left(\frac{d^6S}{d\omega 5}\right) = \frac{1\ldots 6}{(\lambda-\omega)^7} + \frac{1\ldots 6}{(\lambda+\omega)^7} - \frac{1\ldots 6}{(3\lambda-\omega)^7} - \frac{1\ldots 6}{(3\lambda+\omega)^7} + \frac{1\ldots 6}{(5\lambda-\omega)^7} - \text{etc.}$$
$$\left(\frac{d^7S}{d\omega^7}\right) = \frac{1\ldots 7}{(\lambda-\omega)^8} - \frac{1\ldots 7}{(\lambda+\omega)^8} - \frac{1\ldots 7}{(3\lambda-\omega)^8} + \frac{1\ldots 7}{(3\lambda+\omega)^8} + \frac{1\ldots 7}{(5\lambda-\omega)^8} - \text{etc.}$$

etc. etc. etc.

Circa

Circa hos autem valores probe meminiſſe opportet, eſſe

$$\alpha = \frac{\pi}{2\lambda},\ p = \text{ſin.}\,\alpha\omega = \text{ſin.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda} \text{ et } q = \text{coſ.}\,\alpha\omega = \text{coſ.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}.$$

§. 22. Eodem modo expediamus valores ſeu formulas integrales alterius generis, pro quibus eſt

$$T = \frac{\pi}{2\lambda}\ \text{tang.}\ \frac{\pi\omega}{2\lambda}$$

vnde continuo differentiando oriuntur ſequentes integrationes

$$\text{I. } \int \frac{z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} = T$$

$$\text{II. } \int \frac{-z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}} \frac{dz}{z}\, lz = \left(\frac{dT}{d\omega}\right)$$

$$\text{III. } \int \frac{z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}} \frac{dz}{z}\, (lz)^2 = \left(\frac{ddT}{d\omega^2}\right)$$

$$\text{IV. } \int \frac{-z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}} \frac{dz}{z}\, (lz)^3 = \left(\frac{d^3T}{d\omega^3}\right)$$

$$\text{V. } \int \frac{z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}} \frac{dz}{z}\, (lz)^4 = \left(\frac{d^4T}{d\omega^4}\right)$$

$$\text{VI. } \int \frac{-z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}} \frac{dz}{z}\, (lz)^5 = \left(\frac{d^5T}{d\omega^5}\right)$$

$$\text{VII. } \int \frac{z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}} \frac{dz}{z}\, (lz)^6 = \left(\frac{d^6T}{d\omega^6}\right).$$

§. 23. Ponatur iterum $\frac{\pi}{2\lambda} = \alpha$; ſin. $\alpha\omega = p$, et coſ $\alpha\omega = q$, vt ſit

$$T = \frac{\alpha p}{q},$$

quae

quae formula ſecundum lemmata §. 20. continuo differentiata dabit

$$T = \alpha . \frac{p}{q}$$

$$\left(\frac{dT}{d\omega}\right) = \alpha\,\alpha . \frac{1}{qq}$$

$$\left(\frac{ddT}{d\omega^2}\right) = \alpha^3 \frac{2p}{q^3}$$

$$\left(\frac{d^3T}{d\omega^3}\right) = \alpha^4 \left(\frac{6}{q^4} - \frac{4}{qq}\right)$$

$$\left(\frac{d^4T}{d\omega^4}\right) = \alpha^5 \left(\frac{24p}{q^5} - \frac{8p}{q^3}\right)$$

$$\left(\frac{d^5T}{d\omega^5}\right) = \alpha^6 \left(\frac{120}{q^6} - \frac{120}{q^4} + \frac{16}{qq}\right)$$

$$\left(\frac{d^6T}{d\omega^6}\right) = \alpha^7 \left(\frac{720p}{q^7} - \frac{480p}{q^5} + \frac{32p}{q^3}\right)$$

$$\left(\frac{d^7T}{d\omega^7}\right) = \alpha^8 \left(\frac{5040}{q^8} - \frac{6720}{q^6} + \frac{2016}{q^4} - \frac{64}{qq}\right).$$

§. 24. Series autem infinitae, quae hinc naſcuntur, erunt

$$T = \frac{1}{\lambda-\omega} - \frac{1}{\lambda+\omega} + \frac{1}{3\lambda-\omega} - \frac{1}{3\lambda+\omega} + \frac{1}{5\lambda-\omega} - \frac{1}{5\lambda+\omega} + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{dT}{d\omega}\right) = \frac{1}{(\lambda-\omega)^2} + \frac{1}{(\lambda+\omega)^2} + \frac{1}{(3\lambda-\omega)^2} + \frac{3}{(3\lambda+\omega)^2} + \frac{1}{(5\lambda-\omega)^2} + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{ddT}{d\omega^2}\right) = \frac{1.2}{(\lambda-\omega)^3} - \frac{1.2}{(\lambda+\omega)^3} + \frac{1.2}{(3\lambda-\omega)^3} - \frac{1.2}{(3\lambda+\omega)^3} + \frac{1.2}{(5\lambda-\omega)^3} - \text{etc.}$$

$$\left(\frac{d^3T}{d\omega^3}\right) = \frac{1.2.3}{(\lambda-\omega)^4} + \frac{1.2.3}{(\lambda+\omega)^4} + \frac{1.2.3}{(3\lambda-\omega)^4} + \frac{1.2.3}{(3\lambda+\omega)^4} + \frac{1.2.3}{(5\lambda-\omega)^4} + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{d^4T}{d\omega^4}\right) = \frac{1.2.3.4}{(\lambda-\omega)^5} - \frac{1.2.3.4}{(\lambda+\omega)^5} + \frac{1.2.3.4}{(3\lambda-\omega)^5} - \frac{1.2.3.4.}{(3\lambda+\omega)^5} + \frac{1.2.3.4}{(5\lambda-\omega)^5} - \text{etc.}$$

$$\left(\frac{d^5T}{d\omega^5}\right) = \frac{1.2.3.4.5}{(\lambda-\omega)^6} + \frac{1.2.3.4.5}{(\lambda+\omega)^6} + \frac{1.2.3.4.5}{(3\lambda-\omega)^6} + \frac{1.2.3.4.5}{(3\lambda+\omega)^6} + \frac{1.2.3.4.5}{(5\lambda-\omega)^6} + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{d^6T}{d\omega^6}\right) = \frac{1\ldots6}{(\lambda-\omega)^7} - \frac{1\ldots6}{(\lambda+\omega)^7} + \frac{1\ldots6}{(3\lambda-\omega)^7} - \frac{1\ldots6}{(3\lambda+\omega)^7} + \frac{1\ldots6}{(5\lambda-\omega)^7} - \frac{1\ldots6}{(5\lambda+\omega)^7} + \text{etc.}$$

§. 25. Operae pretium erit, hinc caſus ſimpliciſſimos euoluere, qui oriuntur ponendo $\lambda = 1$ et $\omega = 0$, ita vt ſit $a = \frac{\pi}{2}$, $p = 0$ et $q = 1$, vnde habebimus

Pro

Pro ordine priore

$$S = \frac{\pi}{2}$$
$$\left(\frac{dS}{d\omega}\right) = 0$$
$$\left(\frac{ddS}{d\omega^2}\right) = \frac{\pi^3}{8}$$
$$\left(\frac{d^3S}{d\omega^3}\right) = 0$$
$$\left(\frac{d^4S}{d\omega^4}\right) = \frac{5\pi^5}{32}$$
$$\left(\frac{d^5S}{d\omega^5}\right) = 0$$
$$\left(\frac{d^6S}{d\omega^6}\right) = \frac{61\pi^7}{128}$$
$$\left(\frac{d^7S}{d\omega^7}\right) = 0$$
etc.

Pro ordine poſteriore

$$T = 0$$
$$\left(\frac{dT}{d\omega}\right) = \frac{\pi\pi}{4}$$
$$\left(\frac{ddT}{d\omega^2}\right) = 0$$
$$\left(\frac{d^3T}{d\omega^2}\right) = \frac{\pi^4}{8}$$
$$\left(\frac{d^4T}{d\omega^4}\right) = 0$$
$$\left(\frac{d^5T}{d\omega^5}\right) = \frac{\pi^6}{4}$$
$$\left(\frac{d^6T}{d\omega^6} = 0\right.$$
$$\left(\frac{d^7T}{d\omega^7}\right) = \frac{17\pi^8}{16}$$
etc.

§. 26. Hinc ergo, omiſſis valoribus euaneſcentibus, ex priore ordine habebimus ſequentes formulas integrales cum ſeriebus inde natis

$$\int \frac{dz}{1+zz} = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc.}$$
$$\int \frac{dz(lz)^2}{1+zz} = \frac{\pi^3}{16} = \frac{2}{1^3} - \frac{2}{3^3} + \frac{2}{5^3} - \frac{2}{7^3} + \frac{2}{9^3} - \frac{2}{11^3} + \text{etc.}$$
$$\int \frac{dz(lz)^4}{1+zz} = \frac{5\pi^5}{64} = \frac{24}{1^5} - \frac{24}{3^5} + \frac{24}{5^5} - \frac{24}{7^5} + \frac{24}{9^5} - \frac{24}{11^5} + \text{etc.}$$
$$\int \frac{dz(lz)^6}{1+zz} = \frac{61\pi^7}{256} = \frac{720}{1^7} - \frac{720}{3^7} + \frac{720}{5^7} - \frac{720}{7^7} + \frac{720}{9^7} - \text{etc.}$$

etc. etc. etc.

§. 27. Ex altero autem ordine pro eodem caſu oriuntur

$$\int \frac{-dz\,lz}{1-zz} = \frac{\pi\pi}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \text{etc.}$$
$$\int \frac{-dz(lz)^3}{1-zz} = \frac{\pi^4}{16} = \frac{6}{1^4} + \frac{6}{3^4} + \frac{6}{5^4} + \frac{6}{7^4} + \frac{6}{9^4} + \frac{6}{11^4} + \frac{6}{13^4} + \text{etc.}$$
$$\int \frac{-dz(lz)^5}{1-zz} = \frac{\pi^6}{8} = \frac{120}{1^6} + \frac{120}{3^6} + \frac{120}{5^6} + \frac{120}{7^6} + \frac{120}{9^6} + \frac{120}{11^6} + \frac{120}{13^6} + \text{etc.}$$

etc. etc. etc.

§. 28. Quemadmodum ex primo integrali ordinis poſterioris deduximus has formulas

$$\int \frac{dz\,lz}{1-z} = -\frac{\pi\pi}{6} \text{ et } \int \frac{dz\,lz}{1+z} = -\frac{\pi\pi}{12};$$

ſimiles quoque formulae integrales ex ſequentibus deduci poſſunt; cum enim ſit

$$\int \frac{dz\,(lz)^3}{1-zz} = -\frac{\pi^4}{16},$$

ponamus eſſe

$$\int \frac{z\,dz\,(lz)^3}{1-zz} = P, \text{ eritque } \int \frac{dz\,(lz)^3}{1-z} = P - \frac{\pi^4}{16}$$

$$\text{et } \int \frac{dz\,(lz)^3}{1+z} = -P - \frac{\pi^4}{16}$$

nunc vero ſtatuatur $zz = v$, vt ſit $z\,dz = \frac{1}{2}dv$, et $lz = \frac{1}{2}lv$, ideoque $lz^3 = \frac{1}{8}lv^3$, quibus ſubſtitutis erit

$$P = \frac{1}{16}\int \frac{dv\,(lv)^3}{1-v} = \frac{1}{16}\left(P - \frac{\pi^4}{16}\right),$$

vnde fit

$$16\,P = P - \frac{\pi^4}{16} \text{ ideoque } P = -\frac{\pi^4}{240}$$

ſicque has duas habebimus integrationes nouas

$$\int \frac{dz\,(lz)^4}{1-z} = -\frac{\pi^4}{15}, \text{ et}$$

$$\int \frac{dz\,(lz)^3}{1+z} = -\frac{7\pi^4}{120}$$

hinc autem per ſeries erit,

$$\int \frac{-dz\,(lz)^3}{1-z} = +\frac{\pi^4}{15} = 6\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{8^4} + \text{etc.}\right) \text{ et}$$

$$\int \frac{-dz\,(lz)^3}{1+z} = +\frac{7\pi^4}{120} = 6\left(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{6^4} + \frac{1}{7^4} - \frac{1}{8^4} + \text{etc.}\right)$$

§. 29. Porro $\int \frac{dz\,(lz)^5}{1-zz} = -\frac{\pi^6}{8}$ ponamus eſſe

$$\int \frac{z\,dz\,(lz)^5}{1-zz} = P,$$

vt hinc obtineamus

$$\int \frac{dz\,(lz)^5}{1-z} = P - \frac{\pi^6}{8}, \text{ et } \int \frac{dz\,(lz)^5}{1+z} = -P - \frac{\pi^6}{8}$$

nunc igitur ſtatuamus $zz = v$, eritque

$$P = \frac{1}{64}\int \frac{dv\,(lv)^5}{1-v} = \frac{1}{64}(P - \frac{\pi^6}{8}, \text{ vnde fit}$$

$$P = -\frac{\pi^6}{504},$$

nouaeque integrationes hinc deductae ſunt

$$\int \frac{dz\,(lz)^5}{1-z} = -\frac{8\pi^6}{63}, \text{ et}$$

$$\int \frac{dz\,(lz)^5}{1+z} = -\frac{31\pi^6}{252}$$

at vero per ſeries reperitur

$$\int \frac{dz\,(lz)^5}{1-z} = -\frac{8\pi^6}{63} = -120(1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.}$$

et

$$\int \frac{dz\,(lz)^5}{1+z} = -\frac{31\pi^6}{252} = -120(1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.}$$

ita vt ſit

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.} = \frac{\pi^6}{945} \text{ et}$$

$$1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{6^6} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{8^6} + \text{etc.} = \frac{31\pi^6}{30240} = \frac{31\pi^6}{32\cdot 945}.$$

§. 30. Conſideremus etiam caſus, quibus $\lambda = 2$ et $\omega = 1$ ita vt ſit $\alpha = \frac{\pi}{4}$, et $\alpha\omega = \frac{\pi}{4}$ hinc $p = q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vnde pro vtroque ordine ſequentes habebimus valores

**Pro ordine priore**

$S = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

$\left(\frac{dS}{d\omega}\right) = \frac{\pi\pi}{8\sqrt{2}}$

$\left(\frac{ddS}{d\omega^2}\right) = \frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$

$\left(\frac{d^3S}{d\omega^3}\right) = \frac{11\pi^4}{128\sqrt{2}}$

$\left(\frac{d^4S}{d\omega^4}\right) = \frac{57\pi^5}{512\sqrt{2}}$

$\left(\frac{d^5S}{d\omega^5}\right) = \frac{361\pi^6}{2048\sqrt{2}}$

$\left(\frac{d^6S}{d\omega^6}\right) = \frac{2763\pi^7}{8192\sqrt{2}}$

$\left(\frac{d^7S}{d\omega^7}\right) = \frac{24611\pi^8}{32768\sqrt{2}}$

etc.

**Pro ordine poſteriore**

$T = \frac{\pi}{4}$

$\left(\frac{dT}{d\omega}\right) = \frac{\pi\pi}{8}$

$\left(\frac{ddT}{d\omega^2}\right) = \frac{\pi^3}{16}$

$\left(\frac{d^3T}{d\omega^3}\right) = \frac{\pi^4}{16}$

$\left(\frac{d^4T}{d\omega^4}\right) = \frac{5\pi^5}{64}$

$\left(\frac{d^5T}{d\omega^5}\right) = \frac{\pi^5}{8}$

$\left(\frac{d^6T}{d\omega^6}\right) = \frac{61\pi^7}{256}$

$\left(\frac{d^7T}{d\omega^7}\right) = \frac{17\pi^8}{32}$

etc.

§. 31. Hinc igitur ſequentes integrationes, cum ſeriebus reſpondentibus reſultant; ac primo quidem ex ordine primo

$$\int \frac{(1+zz)\,dz}{1+z^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \text{etc.}$$

$$\int \frac{-(1-zz)\,dz\,lz}{1+z^4} = \frac{\pi\pi}{8\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} - \frac{1}{13^2} + \text{etc.}$$

$$\int \frac{(1+zz)\,dz\,(lz)^2}{1+z^4} = \frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}} = \frac{2}{1^3} + \frac{2}{3^3} - \frac{2}{5^3} - \frac{2}{7^3} + \frac{2}{9^3} + \frac{2}{11^3} - \frac{2}{13^3} - \text{etc.}$$

$$\int \frac{-(1-zz)\,dz\,(lz)^3}{1+z^4} = \frac{11\pi^4}{128\sqrt{2}} = \frac{6}{1^4} - \frac{6}{3^4} - \frac{6}{5^4} + \frac{6}{7^4} + \frac{6}{9^4} - \frac{6}{11^4} - \frac{6}{13^4} + \text{etc.}$$

$$\int \frac{(1+zz)\,dz\,(lz)^4}{1+z^4} = \frac{57\pi^5}{512\sqrt{2}} = \frac{24}{1^5} + \frac{24}{3^5} - \frac{24}{5^5} - \frac{24}{7^5} + \frac{24}{9^5} + \frac{24}{11^5} - \frac{24}{13^5} - \text{etc.}$$

$$\int \frac{-(1-zz)\,dz\,(lz)^5}{1+z^4} = \frac{361\pi^6}{2048\sqrt{2}} = \frac{120}{1^6} - \frac{120}{3^6} - \frac{120}{5^6} + \frac{120}{7^6} + \frac{120}{9^6} - \frac{120}{11^6} - \frac{120}{13^6} + \text{etc.}$$

$$\int \frac{(1+zz)\,dz\,(lz)^6}{1+z^4} = \frac{2763\pi^7}{8192\sqrt{2}} = \frac{720}{1^7} + \frac{720}{3^7} - \frac{720}{5^7} - \frac{720}{7^7} + \frac{720}{9^7} + \frac{720}{11^7} - \frac{720}{13^7} - \text{etc.}$$

$$\int \frac{-(1-zz)\,dz\,(lz)^7}{1+z^4} = \frac{24611\pi^8}{32768\sqrt{2}} = \frac{5040}{1^8} - \frac{5040}{3^8} - \frac{5040}{5^8} + \frac{5040}{7^8} + \frac{5040}{9^8} - \frac{5040}{11^8} - \frac{5040}{13^8} + \text{etc.}$$

etc.

§. 32.

§. 32 Eodem modo integrationes alterius ordinis cum ſeriebus erunt

$$\int \frac{dz}{1+zz} = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc.}$$

$$\int \frac{-dz\,lz}{1-zz} = \frac{\pi\pi}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \text{etc.}$$

$$\int \frac{dz(lz)^2}{1+zz} = \frac{\pi^3}{16} = \frac{2}{1^3} - \frac{2}{3^3} + \frac{2}{5^3} - \frac{2}{7^3} + \frac{2}{9^3} - \frac{2}{11^3} + \frac{2}{13^3} - \text{etc.}$$

$$\int \frac{-dz(lz)^3}{1-zz} = \frac{\pi^4}{16} = \frac{6}{1^4} + \frac{6}{3^4} + \frac{6}{5^4} + \frac{6}{7^4} + \frac{6}{9^4} + \frac{6}{11^4} + \frac{6}{13^4} + \text{etc.}$$

$$\int \frac{dz(lz)^4}{1+zz} = \frac{5\pi^5}{64} = \frac{24}{1^5} - \frac{24}{3^5} + \frac{24}{5^5} - \frac{24}{7^5} + \frac{24}{9^5} - \frac{24}{11^5} + \frac{24}{13^5} - \text{etc.}$$

$$\int \frac{-dz(lz)^5}{1-zz} = \frac{\pi^6}{8} = \frac{120}{1^6} + \frac{120}{3^6} + \frac{120}{5^6} + \frac{120}{7^6} + \frac{120}{9^6} + \frac{120}{11^6} + \text{etc.}$$

$$\int \frac{dz(lz)^6}{1+zz} = \frac{61\pi^7}{256} = \frac{720}{1^7} - \frac{720}{3^7} + \frac{720}{5^7} - \frac{720}{7^7} + \frac{720}{9^7} - \frac{720}{11^7} + \text{etc.}$$

$$\int \frac{-dz(lz)^7}{1-zz} = \frac{17\pi^8}{32} = \frac{5040}{1^8} + \frac{5040}{3^8} + \frac{5040}{5^8} + \frac{5040}{7^8} + \frac{5040}{9^8} + \frac{5040}{11^8} + \text{etc.}$$

etc.

Hae autem ſeries ſunt eae ipſae, quas iam ſupra §§. 26 et 27. ſumus conſecuti.

§. 33. Praeterea autem ii caſus imprimis notari merentur, quibus formulae integrales in formas ſimpliciores reſolui poſſunt. Haec autem reſolutio tantum ſpectat ad fractionem

$$\pm \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^n},$$

omiſſo factore $\frac{dz}{z}(lz)^\mu$; ad quod oſtendendum ſumamus primo $\lambda = 3$ et $\omega = 1$, vnde fit $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $p = \text{ſin.}\,\frac{\pi}{4}$, et $q = \text{coſ.}\,\frac{\pi}{6}$, tum autem, in priori ordine occurrunt alternatim ſequentes fractiones

I. $\frac{zz(1+zz)}{1+z^6} = \frac{zz}{1-zz+z^4}$,

 quae

quae poſito $zz = v$ abit in $\frac{v}{1 - v + vv}$ ergo cum ſit $\frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \frac{dv}{v}$ et $lz = \frac{1}{2} lv$,

hinc talis forma

$$\frac{1}{2^{2i+1}} \int \frac{dv (lv)^{2i}}{1 - v + vv}$$

integrari poterit caſu ſcilicet $v = 1$.

II. $-\frac{zz(1 - zz)}{1 + z^6} = + \frac{2}{3(1 + zz)} - \frac{(2 - zz)}{3(1 - zz + z^4)}$, quae poſito $zz = v$ abit in $\frac{-2}{3(1 + v)} + \frac{2 - v}{3(1 - v + vv)}$ quae ergo forma ducta in $\frac{dz}{z} (lz)^{2i+1}$ vel in

$$\frac{1}{2^{2i+2}} \frac{dv}{v} (lv)^{2i+1}$$

ſemper integrari poteſt poſito $v = 1$.

§. 34. Eodem caſu ordo poſterior ſequentes ſuppeditat reſolutiones

I. $\frac{zz(1 - zz)}{1 - z^6} = \frac{zz}{1 + zz + z^4} = \frac{v}{1 + v + vv}$,

quae in $\frac{dz}{z} (lz)^{2i}$ vel in $\frac{1}{2^{2i+1}} \frac{dv}{v} (lz)^{2i}$ ducta ſemper eſt integrabilis

II. $\frac{+zz(1 + zz)}{1 - z^5} = \frac{-2}{3(1 - zz)} + \frac{2 + zz}{3(1 + zz + z^4)}$,

quae facto $zz = v$ fit

$$\frac{-2}{3(1 - v)} + \frac{2 + v}{3(1 + v + vv)}$$

quae ergo formulae in $\frac{dv}{v} (lv)^{2i+1}$ ductae fiunt integrabiles; quia autem in hac reſolutione numeratores per $z$ vel $v$ diuidere non licet, alia reſolutione eſt opus, quae reperitur

$zz-$

$\frac{-zz(1+zz)}{1-z^6} = \frac{-2zz}{3(1-zz)} - \frac{zz(1+2zz)}{3(1+zz+z^4)}$ ſiue

$\frac{-2v}{3(1-v)} - \frac{v(1+2v)}{3(1+v+vv)}$

quae formulae ductae in $\frac{dz}{z}(lz)^{2i+1}$ vel in $\frac{1}{2^{2i+2}}\frac{dv}{v}(lv)^{2i+1}$ integrationem quoque admittunt.

§ 35. Porro manente $\lambda = 3$ ſumatur $\omega = 2$, vt ſit $\alpha = \frac{\pi}{6}$; $p = \text{ſin.}\, \frac{2\pi}{3}$ et $q = \text{coſ.}\, \frac{\pi}{3}$ et ex ordine priore orientur ſequentes reductiones.

I°. $\frac{z(1+z^4)}{1+z^6} = \frac{2z}{3(1+zz)} + \frac{z(1+zz)}{3(1-zz+z^4)}$,

vnde multiplicando per $\frac{dz}{z}lz^{2i}$ oriuntur formulae integrationem admittentes caſu $z = 1$.

II. $\frac{-z(1-z^4)}{1+z^6} = -\frac{z(1-zz)}{1-zz+z^4}$

quae per $\frac{dz}{z}(lz)^{2i+1}$ multiplicata integrari poterit caſu $z = 1$; ex ordine vero poſteriori ſequentes prodibunt reductiones.

I. $\frac{z(1-z^4)}{1-z^6} = \frac{z(1+zz)}{1+zz+z^4}$,

quae ducta in $\frac{dz}{z}(lz)^{2i}$ fit integrabilis.

II. $\frac{-z(1+z^4)}{1-z^6} = \frac{-2z}{3(1-zz)} - \frac{z(1-zz)}{3(1+zz+z^4)}$,

quae formulae in $\frac{dz}{z}(lz)^{2i+1}$ ductae fiunt integrabiles.

§. 36. Operae iam erit pretium haec integralia actu euoluere, quare ex §. 33. eiusque numero I nanciſcimur ſequentes integrationes

1°. $\frac{1}{2}\int\frac{dv}{1-v+vv} = \alpha\frac{1}{q} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

2°. $\frac{1}{8}\int\frac{dv(lv)^2}{1-v+vv} = \alpha^3\left(\frac{2}{q^3} - \frac{1}{q}\right) = \frac{5\pi^3}{324\sqrt{3}}$

deinde

deinde vero ex eiusdem § numero II vbi etiam haec reductio locum habet

$$-\frac{zz(1-zz)}{1+z^6} = -\frac{zz}{3(1+zz)} - \frac{zz(1-2zz)}{3(1-zz+z^4)} = -\frac{2v}{3(1+v)} - \frac{v(1-2v)}{3(1-v+vv)}$$

quae ducta in $\frac{1}{4}\cdot\frac{dv}{v}lv$ dabit

$$-\frac{1}{6}\int\frac{dv\,lv}{1+v} - \frac{1}{12}\int\frac{dv(1-2v)lv}{1-v+vv} = \alpha\alpha\frac{p}{qq} = \frac{\pi\pi}{54}$$

quarum formularum prior integrationem admittit, eſt enim

$$\int\frac{dv\,lv}{1+v} = -\frac{\pi\pi}{12}$$

vnde inuenitur poſterior

$$\int\frac{dv(1-2v)lv}{1-v+vv} = -\frac{\pi\pi}{18}.$$

§. 37. Ex §. 34 eiusque numero I ſequitur

$1^\circ.\ \frac{1}{2}\int\frac{dv}{1+v+vv} = \frac{\alpha p}{q} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

$2^\circ.\ \frac{1}{8}\int\frac{dv(lv)^2}{1+v+vv} = \alpha^3\frac{2p}{q^3} = \frac{\pi^3}{81\sqrt{3}}$

deinde vero ex numero II fit

$$-\frac{1}{6}\int\frac{dv\,lv}{1-v} - \frac{1}{12}\int\frac{dv(1+2v)lv}{1+v+vv} = \alpha\alpha.\frac{1}{qq} = \frac{\pi\pi}{27}$$

ſupra autem inuenimus eſſe

$$\int\frac{dv\,lv}{1-v} = -\frac{\pi\pi}{6}$$

quo valore ſubſtituto fit

$$\int\frac{dv(1+2v)lv}{1+v+vv} = -\frac{\pi\pi}{9}$$

maxime igitur operae pretium eſt viſum has poſtremas integrationes euoluiſſe.

§. 38. Quod ſi ambae formulae integrales

$$\int\frac{dv(1-2v)lv}{1-v+vv} \quad\text{et}\quad \int\frac{dv(1+2v)lv}{1+v+vv}$$

in

in ſeries conuertantur reperitur

$$\int \frac{dv(1-2v)\,lv}{1-v+vv} = -1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{2}{9}+\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{25}-\tfrac{2}{36}-\tfrac{1}{49}+\text{etc. et}$$

$$\int \frac{dv(1+2v)\,lv}{1+v+vv} = -1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{25}+\tfrac{2}{36}-\tfrac{1}{49}+\text{etc.}$$

vnde has duas ſummationes attentione noſtra non indignas aſſequimur

$$\text{I. } 1-\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{9}-\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{25}+\tfrac{2}{36}+\tfrac{1}{49}-\tfrac{1}{64}-\tfrac{2}{81}-\tfrac{1}{100}\text{ etc.} = \frac{\pi\pi}{18}$$

$$\text{II. } 1+\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{9}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{25}-\tfrac{2}{36}+\tfrac{1}{49}+\tfrac{1}{64}-\tfrac{2}{81}+\tfrac{1}{100}\text{ etc.} = \frac{\pi\pi}{9}$$

quarum prior a poſteriore ablata praebet

$$\tfrac{2}{4}+\tfrac{2}{16}-\tfrac{4}{36}+\tfrac{2}{64}+\tfrac{2}{100}\text{ etc.} = \frac{\pi\pi}{18},$$

cuius duplum perducit ad hanc

$$1+\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{9}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{25}-\tfrac{2}{36}+\text{etc.} = \frac{\pi\pi}{9}$$

quae quoniam cum ſecunda congruit, veritas vtriusque ſummationis ſatis confirmatur; quod ſi vero ſecunda a duplo primae ſubtrahatur, remanebit iſta ſeries memorabilis

$$1-\tfrac{3}{4}-\tfrac{2}{9}-\tfrac{3}{16}+\tfrac{1}{25}+\tfrac{6}{36}+\tfrac{1}{49}-\tfrac{3}{64}-\tfrac{2}{81}-\tfrac{3}{100}+\text{etc.} = 0$$

quae in periodos 6 terminos complectentes diſtributa, manifeſtum ordinem in numeratoribus declarat, quippe qui ſunt $1-3-2-3+1+6$.

## Additamentum.

§. 39. Quemadmodum ſuperiores integrationes per continuam differentiationem formularum S et T deduximus, ita etiam per integrationem alias et prorſus ſingulares integrationes impetrabimus; ſi

enim vt ſupra fuerit $S = \int \frac{T\,dz}{z}$, exiſtente T formula illa

$$+ \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}},$$

quae praeter $z$ etiam exponentem variabilem $\omega$ inuoluere concipitur, erit per naturam integralium duas variabiles inuoluentium

$$\int S\,d\omega = \int \frac{dz}{z} \int T\,d\omega,$$

vbi inpriore formula integrali $\int S\,d\omega$, vbi $z$ pro conſtanti habetur, ſtatim ſcribi poteſt $z = 1$; hoc igitur lemmate praemiſſo, quia eſt

$$\int T\,d\omega = \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}\,lz},$$

ambas formulas ſupra tractatas nempe S et T hoc modo euoluamus, et quia vtramque triplici modo expreſſam dedimus; primo ſcilicet per ſeriem infitam; ſecundo, per formulam finitam: ac tertio per formulam integralem, etiam quantitates, quae pro integralibus $\int S\,d\omega$ et $\int T\,d\omega$ reſultabunt, erunt inter ſe aequales.

§. 40. Incipiamus a formula S, et cum per ſeriem fuerit

$$S = \frac{1}{\lambda-\omega} + \frac{1}{\lambda+\omega} - \frac{1}{3\lambda-\omega} - \frac{1}{3\lambda+\omega} + \frac{1}{5\lambda-\omega} + \frac{1}{5\lambda+\omega} - \text{etc.}$$

erit

$$\int S\,d\omega = -l(\lambda-\omega) + l(\lambda+\omega) + l(3\lambda-\omega) - l(3\lambda+\omega) - \text{etc.} + C$$

quam conſtantem ita definire decet, vt integrale euaneſcat poſito $\omega = 0$, quo facto erit

$\int S\,d\omega$

$$\int S\,d\omega = l\frac{\lambda+\omega}{\lambda-\omega} + l\,\frac{3\lambda-\omega}{3\lambda+\omega} + l\,\frac{5\lambda+\omega}{5\lambda-\omega} + l\,\frac{7\lambda-\omega}{7\lambda+\omega} + \text{etc.}$$

quae expreſſio reducitur ad ſequentem

$$\int S\,d\omega = l\,\frac{(\lambda+\omega)(3\lambda-\omega)(5\lambda+\omega)(7\lambda-\omega)(9\lambda+\omega)\ etc.}{(\lambda-\omega)(3\lambda+\omega)(5\lambda-\omega)(7\lambda+\omega)(9\lambda-\omega)\ etc.}$$

Deinde quia per formulam finitam erat

$$S = \frac{\pi}{2\lambda\ \text{coſ.}\ \frac{\pi\omega}{2\lambda}},\ \text{erit}\ \int S\,d\omega = \int\frac{\pi\,d\omega}{2\lambda\ \text{coſ.}\ \frac{\pi\omega}{2\lambda}},$$

vbi ſi breuitatis gratia ponatur $\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \Phi$, vt ſit

$$d\omega = \frac{2\Phi\lambda}{\pi}\ \text{erit}\ \int S\,d\omega = \int\frac{d\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi};$$

quia igitur nouimus eſſe

$$\int\frac{d\vartheta}{\text{ſin.}\,\vartheta} = l\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\vartheta$$

ſumamus ſin. $\vartheta$ = coſ. $\Phi$ ſiue $\vartheta = 90° - \Phi = \frac{\pi}{2} - \Phi$ eritque $d\vartheta = -d\Phi$ vnde fit

$$\int\frac{-d\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi} = l\ \text{tang.}\ (\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}\Phi),$$

quoniam autem eſt

$$\Phi = \frac{\pi\omega}{2\lambda}\ \text{erit}\ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\Phi = \frac{\pi(\lambda-\omega)}{4\lambda},$$

vnde noſtrum integrale erit

$$\int S\,d\omega = -l\ \text{tang.}\ \frac{\pi(\lambda-\omega)}{4\lambda} = +l\ \text{tang.}\ \frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda}$$

ex tertia autem formula integrali

$$S = \int\frac{z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\frac{dz}{z},\ \text{colligitur fore}$$

$$\int S\,d\omega = \int\frac{-z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\frac{dz}{z\,lz}$$

quod integrale a termino $z = 0$ vsque ad terminum $z = 1$ extendi aſſumitur; ſicque tres iſti va-

lores inuenti inter ſe erunt aequales. Ac ne ob conſtantes forte addendas vllum dubium ſuperſit, ſingulae iſtae expreſſiones ſponte euaneſcunt caſu $\omega = 0$.

§. 41. Conſideremus hinc primo aequalitatem inter formulam primam et ſecundam: et quia vtraque eſt logarithmus, erit

$$\text{tang.}\ \frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda} = \frac{(\lambda+\omega)(3\lambda-\omega)(5\lambda+\omega)(7\lambda-\omega)\ \text{etc.}}{(\lambda-\omega)(3\lambda+\omega)(5\lambda-\omega)(7\lambda+\omega)\ \text{etc.}}$$

cum igitur huius fractionis numerator euaneſcat caſibus, vel $\omega = -\lambda$, vel $\omega = +3\lambda$, vel $\omega = -5\lambda$, vel $\omega = +7\lambda$ etc. euidens eſt iisdem caſibus quoque tangentem fieri $= 0$; denominator vero euaneſcit caſibus vel $\omega = \lambda$, vel $\omega = -3\lambda$ vel $\omega = +5\lambda$ vel $\omega = -\lambda$ etc. quibus ergo caſibus tangens in infinitum excreſcere debet, id quod etiam pulcherrime euenit. Ceterum haec expreſſio congruit cum ea, quam iam dudum inueni et in introductione expoſui.

§. 42. Productum autem iſtud infinitum per principia alibi ſtabilita ad formulas integrales reduci poteſt ope huius lemmatis latiſſime patentis

$$\frac{a(c+b)(a+k)(c+b+k)(a+2k)(c+b+2k)\ \text{etc.}}{b(c+a)(b+k)(c+a+k)(b+2k)(c+a+2k)\ \text{etc.}} = \frac{\int z^{c-1}dz(1-z^k)^{\frac{b-k}{k}}}{\int z^{c-1}dz(1-z^k)^{\frac{a-k}{k}}}$$

ſi quidem poſt vtramque integrationem fiat $z = 1$. Noſtro igitur caſu erit $a = \lambda + \omega$, $b = \lambda - \omega$, $c = 2\lambda$ et $k = 4\lambda$ vnde valor noſtri producti erit

$\int z^{\lambda-1}$

$$\frac{\int z^{2\lambda-1}\,dz\,(1-z^{4\lambda})^{\frac{-3\lambda-\omega}{4\lambda}}}{\int z^{2\lambda-1}\,dz\,(1-z^{4\lambda})^{\frac{-3\lambda+\omega}{4\lambda}}} = \text{tang.}\,\frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda}$$

formulae autem iſtae integrales concinniores euadant ſtatuendo $z^{2\lambda} = y$, tum enim erit

$$\text{tang.}\,\frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda} = \frac{\int dy\,(1-yy)^{\frac{-3\lambda-\omega}{4\lambda}}}{\int dy\,(1-yy)^{\frac{-3\lambda+\omega}{4\lambda}}}$$

quae expreſſio vtique omni attentione digna videtur. Denique ex formula integrali inuenta erit quoque

$$\int \frac{-z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\,\frac{dz}{z\,lz} = l\,\text{tang.}\,\frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda}.$$

§. 43. Operae erit pretium, etiam aliquot caſus particulares euoluere: ſit igitur primo $\lambda = 2$ et $\omega = 1$ ac per expreſſionem infinitam erit

$$\int S\,d\omega = l\,\frac{3.5}{1.7}.\frac{11.13}{9.15}.\frac{19.21}{17.23}.\frac{27.29}{25.31}.\frac{35.37}{33.39}.\frac{etc.}{etc.}$$

deinde per expreſſionem finitam habebimus

$$\int S\,d\omega = l\,\text{tang.}\,\frac{3\pi}{8}$$

at per formulam integralem

$$\int S\,d\omega = \int \frac{-(1-zz)}{1+z^4}.\frac{dz}{lz}.$$

Tum vero ex aequalitate duarum priorum expreſſionum

$$\text{tang.}\,\frac{3\pi}{8} = \frac{3.5}{1.7}.\frac{11.13}{9.15}.\frac{19.21}{17.23}\ \text{etc.}$$

hincque per binas formulas integrales

$$\text{tang.}\,\frac{3\pi}{8} = \frac{\int dy\,(1-yy)^{-\frac{5}{8}}}{\int dy\,(1-yy)^{-\frac{3}{8}}}.$$

§. 44. Ponamus nunc eſſe $\lambda = 3$ et $\omega = 1$ ac per expreſſionem infinitam erit

$$\int S\,d\omega = l\,\tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{8}{7}\cdot\tfrac{10}{11}\cdot\tfrac{14}{13}\cdot\tfrac{16}{17}\cdot\tfrac{10}{19}\cdot\tfrac{22}{23}\text{ etc.}$$

ſecundo, per expreſſionem finitam

$$\int S\,d\omega = l\,\text{tang.}\,\tfrac{\pi}{3} = l\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}\,l\,3,$$

ita, vt futurum ſit

$$\sqrt{3} = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 5}\cdot\frac{8\cdot 10}{7\cdot 11}\cdot\frac{14\cdot 16}{13\cdot 17}\text{ etc.}$$

huiusque producti valor per formulas integrales erit

$$\frac{\int dy\,(1-yy)^{-\frac{5}{6}}}{\int dy\,(1-yy)^{-\frac{3}{2}}}.$$

Denique formula integralis praebebit

$$\int S\,d\omega = \int \frac{-z(1-zz)}{1+z^6}\,\frac{dz}{lz}.$$

§. 45. Eodem modo etiam euoluamus alteram formulam T cuius valor per ſeriem erat

$$T = \frac{1}{\lambda-\omega} - \frac{1}{\lambda+\omega} + \frac{1}{3\lambda-\omega} - \frac{1}{3\lambda+\omega} + \frac{1}{5\lambda-\omega} - \frac{1}{5\lambda+\omega} + \text{etc.}$$

vnde ſit

$$\int T\,d\omega = -l(\lambda-\omega) - l(\lambda+\omega) - l(3\lambda-\omega) - l(3\lambda+\omega) - \text{etc.}$$

quae expreſſio vt euaneſcat poſito $\omega = 0$, erit

$$\int T\,d\omega = l\,\frac{\lambda\lambda}{\lambda\lambda-\omega\omega}\cdot\frac{9\lambda\lambda}{9\lambda\lambda-\omega\omega}\cdot\frac{25\lambda\lambda}{25\lambda\lambda-\omega\omega}\text{ etc.}$$

deinde vero cum per formulam finitam fuerit

$$T = \frac{\pi}{2\lambda}\,\text{tang.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}\text{ erit}$$

$$\int T\,d\omega = \int \frac{\pi\,d\omega}{2\lambda}\,\text{tang.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}\text{ vbi poſito }\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \Phi\text{ erit}$$

$$\int T\,d\omega = \int d\Phi\,\text{tang.}\,\Phi = -l\,\text{coſ.}\,\Phi\text{ ita vt ſit}$$

$$\int T\,d\omega = -l\,\text{coſ.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda};$$

cuius

cuius valor caſu $\omega = 0$ fit ſponte $= 0$ denique per formulam integralem habebimus

$$\int T\, d\omega = -\frac{z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z\, lz}$$

integrale itidem a termino $z = 0$ vsque ad terminum $z = 1$ extendi debet.

§. 46. Iam comparatio duorum priorum valorem hanc praebet aequationem

$$\frac{1}{\operatorname{coſ.}\frac{\pi\omega}{2\lambda}} = \frac{\lambda\lambda}{\lambda\lambda - \omega\omega} \cdot \frac{9\lambda\lambda}{9\lambda\lambda - \omega\omega} \cdot \frac{25\lambda\lambda}{25\lambda\lambda - \omega\omega} \cdot \frac{49\lambda\lambda}{49\lambda\lambda - \omega\omega} \text{ etc.}$$

$$\operatorname{coſ.}\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \left(1 - \frac{\omega\omega}{\lambda\lambda}\right)\left(1 - \frac{\omega\omega}{9\lambda\lambda}\right)\left(1 - \frac{\omega\omega}{25\lambda\lambda}\right)\left(1 - \frac{\omega\omega}{49\lambda\lambda}\right) \text{ etc.}$$

vel ſi factores ſinguli iterum in ſimplices euoluantur, erit

$$\operatorname{coſ.}\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \frac{\lambda+\omega}{\lambda} \cdot \frac{\lambda-\omega}{\lambda} \cdot \frac{3\lambda+\omega}{3\lambda} \cdot \frac{3\lambda-\omega}{3\lambda} \cdot \frac{5\lambda+\omega}{5\lambda} \cdot \frac{5\lambda-\omega}{5\lambda} \text{ etc.}$$

quae formula cum reductione generali ſupra allata comparata dat, $a = \lambda + \omega$, $b = \lambda$, $c = -\omega$ et $k = 2\lambda$ vnde colligimus

$$\operatorname{coſ.}\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \frac{\int z^{-\omega-1}\, dz\, (1 - z^{2\lambda})^{-\frac{1}{2}}}{\int z^{-\omega-1}\, dz\, (1 - 1^{2\lambda})^{\frac{\omega-\lambda}{2\lambda}}}.$$

Vt autem exponentes negatiuos $z^{-\omega-1}$ euitemus, ſuperius productum ita repraeſentemus

$$\operatorname{coſ.}\frac{\pi\omega}{2\omega} = \frac{\lambda-\omega}{\lambda} \cdot \frac{\lambda+\omega}{\lambda} \cdot \frac{3\lambda-\omega}{3\lambda} \cdot \frac{3\lambda+\omega}{3\lambda} \text{ etc.}$$

eritque facta comparatione $a = \lambda - \omega$, $b = \lambda$ $c = +\omega$ et $k = 2\lambda$ ſicque per formulas integrales erit

coſ.

$$\cos.\frac{\pi\omega}{2\lambda}=\frac{\int z^{\omega-1}dz(1-z^{2\lambda})^{-\frac{1}{2}}}{\int z^{\omega-1}dz(1-z^{2\lambda})^{\frac{-\lambda-\omega}{2\lambda}}}$$

quae expreſſio ad ſimpliciorem formam reduci nequit.

§. 47. Sit nunc etiam $\lambda=2$ et $\omega=1$ eruntque ternae noſtrae expreſſiones

I. $\int T\,d\omega=l\frac{4}{3}.\frac{36}{35}.\frac{100}{99}.\frac{196}{195}$ ſiue

$\int T\,d\omega=l\frac{2.2}{1.3}.\frac{6.6}{5.7}.\frac{10.10}{9.11}.\frac{14.14}{13.15}$ etc.

II. $\int T\,d\omega=-l\cos.\frac{\pi}{4}=+\frac{1}{2}l\,2$ ita, vt ſit

$\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{2.2}{1.3}.\frac{6.6}{5.7}.\frac{10.10}{9.11}.\frac{14.14}{13.15}$ etc.

quod productum per formulas integrales ita exprimitur

$$\frac{\int dz(1-z^4)^{-\frac{1}{2}}}{\int dz(1-z^4)^{-\frac{3}{4}}}=\sqrt{2}$$

III. $\int T\,d\omega=\int\frac{-(1+zz)}{1-z^4}\frac{dz}{z}=\int\frac{-dz}{(1-zz)lz}$

quod ergo integrale a termino $z=0$, vsque ad $z=1$ extenſum praebet eundem valorem $+\frac{1}{2}l\,2$, cuius aequalitatis ratio vtique difficillime patet.

§. 48. Sit denique vt ſupra $\lambda=3$ et $\omega=1$ ac ternae formulae ita ſe habebunt

I. $\int T\,d\omega=l\frac{9}{8}.\frac{81}{80}.\frac{225}{224}$ etc. $=l\frac{3.3}{2.4}.\frac{9.9}{8.10}.\frac{15.15}{14.16}.\frac{21.21}{20.22}$ etc.

II. $\int T\,d\omega=-l\cos.\frac{\pi}{6}=-l\frac{\sqrt{3}}{2}=+l\frac{2}{\sqrt{3}}$ ita vt ſit

$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{3.3}{2.4}.\frac{9.9}{8.10}.\frac{15.15}{14.16}.\frac{21.21}{20.22}$

ideo-

ideoque per binas formulas integrales

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\int dz\,(1 - z^6)^{-\frac{1}{2}}}{\int dz\,(1 - z^6)^{-\frac{1}{5}}}$$

III. $\int T\,d\omega = \int \frac{-(1 + zz)}{1 - z^6} \frac{dz}{lz}$

quae poſito $zz = v$ abit in hanc

$$\int T\,d\omega = \int \frac{-dv(1 + v)}{(1 - v^3)\,lv}.$$

Hinc igitur patet hac methodo plane noua perueniri ad formulas integrales, quas per methodos adhuc cognitas nullo modo euoluere vel ſaltem inter ſe comparare licuit.

# NOVA METHODVS QVANTITATES INTEGRALES DETERMINANDI.

Auctore

*L. EVLERO.*

§. 1.

Cum mihi ſaepius occurriſſent formulae differentiales, quae per logarithmum quantitatis variabilis erant diuiſae, veluti $\frac{P\,dz}{lz}$, nunquam perſpicere potui, ad quodnam genus quantitatum earum integralia ſint referenda, quin etiam maxime difficile videbatur eorum valores ſaltem vero proxime aſſignare. Quod quidem ad formulam integralem ſimpliciſſimam huius generis $\int\frac{dz}{lz}$ attinet, facile patet, ſi eam ita integrari concipiam, vt euaneſcat poſito $z = 0$, tum vero ſtatuatur $z = 1$, quantitatem infinite magnam eſſe prodituram; quod ſi enim variabilis $z$ iam proxime ad vnitatem acceſſerit, vt ſit $z = 1 - u$, exiſtente $\omega$ quantitate infinite parua, tum ob $dz = -du$ et $lz = l(1-u) = -u$ haec formula erit $\int\frac{du}{u}$, cuius valor vtique fit infinitus. At vero dantur omnino huiusmodi formulae integrales $\int\frac{P\,dz}{lz}$, quae, etiamſi ponatur $z = 1$, tamen valores finitae magnitudinis ſortiuntur: quod determi-

naſſe

naſſe eo magis operae pretium videtur, quod nulla adhuc cognita eſt via iſtos valores inueſtigandi.

§. 2. Conſideremus exempli gratia hanc formulam ſatis ſimplicem $\int\frac{(z-1)dz}{lz}$, quae memorata lege integrata valorem finitum habere facile oſtendi poteſt: Poſito enim $\frac{z-1}{lz}=y$, vt formula noſtra fiat $\int y\,dz$, ideoque exprimat aream curuae, pro abſciſſa $z$ applicatam habentis $=y$, iſta area a termino $z=0$ vsque ad terminum $z=1$ extenſa vtique valorem finitum non multo maiorem quam $\frac{1}{2}$ repraeſentabit; poſita enim abſciſſa $z=0$, fiet etiam applicata $y=0$, at ſumta $z=1$ pro applicata $y=\frac{z-1}{lz}$ tam numerator quam denominator euaneſcit, ergo eorum loco ſubſtitutis ſuis differentialibus fiet $y=z=1$. Pro abſciſſis autem mediis ponamus $z=e^{-n}$, exiſtente $e$ numero, cuius logarithmus hyperbolicus eſt vnitas, erit

$$y=\frac{e^{-n}-1}{-n}=\frac{e^{n}-1}{n\,e^{n}},$$

quae, ſi $n$ fuerit numerus valde magnus, vt abſciſſa $z$ fiat minima, applicata erit proxime $y=\frac{1}{n}$; qui ergo valor multo maior erit quam abſciſſa $z$; forma ſcilicet huius curuae ſimilis erit figurae adiectae, vbi A P denotat abſciſſam $z$ et P M applicatam $y$, abſciſſae vero A B $=1$ reſpondet applicata B C $=1$ qua curua deſcripta eius area A M C B non multum ſuperabit aream trianguli A B C quae eſt $=\frac{1}{2}$. Tab. I. Fig. 1.

§. 3. Nuper autem, in aliis inueſtigationibus occupatus, praeter expectationem inueni, hanc aream aequalem eſſe logarithmo hyperbolico binarii, ita vt ea per fractiones decimales ſit $l\,2 = 0,6931471805$; ſequenti autem ratiocinio huc ſum perductus: Cum reuera ſit $l\,z = \frac{z^0 - 1}{0}$, quia differentiando vtrinque prodit $\frac{dz}{z} = \frac{dz}{z}$, et ſumto $z = 1$ vtraque expreſſio euaneſcit, loco $0$ ſcribo $\frac{1}{i}$, denotante $i$ numerum infinitum, eritque $l\,z = i(z^{\frac{1}{i}} - 1)$, hincque applicata

$$y = \frac{z - 1}{i(z^{\frac{1}{i}} - 1)} = \frac{1 - z}{i(1 - z^{\frac{1}{i}})},$$

et formula integralis $\int \frac{(1 - z)\,dz}{i(1 - z^{\frac{1}{i}})}$. Nunc igitur ſtatuo $z^{\frac{1}{i}} = x$, vt fiat $z = x^i$, vbi notetur pro vtroque integrationes termino $z = 0$ et $z = 1$ etiam fore $x = 0$ et $x = 1$; quia igitur hinc fit $dz = i x^{i-1} dx$, formula integralis euadit

$$\int \frac{x^{i-1}\,dx\,(1 - x^i)}{(1 - x)},$$

quam ergo integrari oportet a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$.

§. 4. Spectemus nunc $i$ vt numerum valde magnum, et fractio $\frac{1 - x^i}{1 - x}$ reſoluitur in hanc progreſſionem geometricam

$1 + x$

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \ldots\ldots x^{i-1}$$

cuius ſinguli termini in $x^{i-1}dx$ ducti et integrati praebent hanc ſeriem

$$\frac{x^i}{i} + \frac{x^{i+1}}{i+1} + \frac{x^{i+2}}{i+2} + \frac{x^{i+3}}{i+3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{x^{2i-1}}{2i-1}$$

quae vtique euaneſcit facto $x = 0$. Nunc igitur ſumatur $x = 1$ et valor quaeſitus noſtrae formulae integralis erit

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \frac{1}{i+3} + \ldots\ldots + \frac{1}{2i-1}$$

vbi quidem litera $i$ denotat numerum infinite magnum, ita vt numerus horum terminorum ſit revera infinitus. Nihilo vero minus, quia ſinguli termini ſunt infinite parui, haec ſeries ſummam habebit finitam, quam ſequenti modo ad ſeriem ordinariam reducere licet.

§. 5. Series inuenta ſpectari poteſt tanquam differentia inter binas ſequentes progreſſiones harmonicas

$$A = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \ldots\ldots + \frac{1}{2i-1}$$

$$B = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \ldots\ldots + \frac{1}{i-1}$$

quandoquidem differentia $A - B$ ipſam ſeriem inventam exhibet; quia autem numerus terminorum ſeriei A eſt $2i - 1$, ſeriei vero $B = i - 1$, ille duplo maior eſt quam hic, quocirca, vt ſeriem regularem obtineamus, ſingulos terminos ſeriei B per ſaltum a ſeriei A termino ſecundo, quarto, ſexto,

 octauo

octauo etc. auferamus, quo pacto ſimul ad finem vtriusque peruenietur, eritque

$$A - B = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \text{etc.}$$

in infinitum, cuius ergo valor eſt $l\,2$, ita vt nunc quidem ſolide ſit demonſtratum, formulae integralis propoſitae $\int \frac{(z-1)\,dz}{l\,z}$ caſu $z = 1$ valorem reuera eſſe $= l\,2$.

§. 6. Simile ratiocinium etiam ad formulam integralem generaliorem $\int \frac{(z^m - 1)\,dz}{l\,z}$ accommodari poteſt, ac tandem reperietur caſu $z = 1$ eius valorem fore $l\,(m+1)$; quia igitur pari modo erit

$$\int \frac{(z^n - 1)\,dz}{l\,z} = l\,(n+1),$$

ſi hanc ab illa ſubtrahamus, prodit ſequens integratio

$$\int \frac{(z^m - z^n)\,dz}{l\,z} = l\,\frac{m+1}{n+1}$$

ſi ſcilicet integratio a termino $z = 0$ vsque ad terminum $z = 1$ extendatur.

§. 7. Quia autem haec demonſtratio per quantitates infinitas et infinite paruas procedit, merito aliam methodum planam et conſuetam deſideramus, quae ad easdem ſummas perducere valeat; quae quidem inueſtigatio maxime ardua videbitur. Interim tamen, cum nuper conſideratio functionum duas variabiles inuoluentium me ad integrationem formularum differentialium prorſus ſingularium perduxiſſet, quae aliis methodis fruſtra tentantur, ex eodem prin-

principio quoque integrationes hic exhibitas deriuandas eſſe intellexi. Hanc igitur methodum tanquam fontem prorſus nouum, ex quo integrationes, aliis methodis inacceſſas, haurire liceat, clare et perſpicue explicabo, cui negotio iſtam disquiſitionem praecipue deſtinaui.

## Lemma I.

§. 8. Si P fuerit functio quaecunque duarum variabilium $z$ et $u$, ac ponatur $\int P\,dz = S$, vt etiam S ſit functio binarum variabilium $z$ et $u$, tum erit

$$\int dz \left(\frac{dP}{du}\right) = \left(\frac{dS}{du}\right).$$

## Demonſtratio.

Cum in integratione formulae $\int P\,dz$ ſola $z$ vt variabilis ſpectetur, erit $\left(\frac{dS}{dz}\right) = P$, quae formula denuo differentiata ſola $u$ pro variabili habita praebet $\left(\frac{ddS}{du\,dz}\right) = \left(\frac{dP}{dv}\right)$, quae in $dz$ ducta et integrata producit $\left(\frac{dS}{du}\right) = \int dz \left(\frac{dP}{du}\right)$ quandoquidem ex principiis calculi integralis eſt

$$\int dz \left(\frac{ddS}{dz\,du}\right) = \left(\frac{dS}{du}\right)$$ q. e. d.

## Corollarium I.

§. 9. Eodem modo per huiusmodi differentialia vbi tantum $u$ pro variabili ſpectatur vlterius progredi licet, vnde ſequentes oriuntur integrationes

$$\left(\frac{ddS}{du^2}\right) = \int dz \left(\frac{ddP}{du^2}\right) \text{ et}$$

$$\left(\frac{d^3S}{du^3}\right) = \int dz \left(\frac{d^3P}{du^3}\right)$$

etc. etc.

Corol-

## Corollarium 2.

§. 10. Quod ſi ergo formula $\int P\,dz$ fuerit integrabilis, ita vt eius integrale S exhiberi poſſit, tum etiam omnes iſtae formulae integrales

$$\int dz\left(\frac{dP}{du}\right),\ \int dz\left(\frac{ddP}{du^2}\right),\ \int dz\left(\frac{d^3P}{du^3}\right)\ \text{etc.}$$

integrationem admittent, atque adeo ipſa integralia exhiberi poterunt.

## Scholion.

§. 11. Ex his quidem formulis ſi in genere tractentur, parum vtilitatis in calculum integralem redundat. At ſi functio P ita fuerit comparata, vt integrale $\int P\,dz$, caſu ſaltem particulari, quo poſt integrationem variabili $z$ certus quidam valor puta $z = a$ tribuitur, commode exhiberi poteſt, vt hoc caſu quantitas S abeat in functionem ſolius variabilis $u$ ſatis ſimplicem, tum integrationes memoratae perinde locum habebunt, ſi quidem poſt ſingulas integrationes ponatur $z = a$, atque hinc ad eiusmodi integrationes plerumque peruenitur, quas aliis methodis vix, ac ne vix quidem perficere liceat: atque hinc oritur

## Primum principium integrationum.

§. 12. Si P eiusmodi fuerit functio binarum variabilium $z$ et $u$, vt valor integralis $\int P\,dz$ ſaltem caſu certo $z = a$ commode exprimi queat, qui valor ſit $= S$, functio ſcilicet ipſius $u$ tantum; tum etiam ſequentia integralia ſi quidem poſt integrationem

tionem pariter ſtatuatur $z = a$ commode exhiberi poterunt ſcilicet

$$\int P\,dz = S$$
$$\int dz \left(\frac{dP}{du}\right) = \left(\frac{dS}{du}\right)$$
$$\int dz \left(\frac{ddP}{du^2}\right) = \left(\frac{ddS}{du^2}\right)$$
$$\int dz \left(\frac{d^3P}{du^3}\right) = \left(\frac{d^3S}{du^3}\right)$$
$$\int dz \left(\frac{d^4P}{du^4}\right) = \left(\frac{d^4S}{du^4}\right)$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

## Exemplum 1.

§. 13. Si fuerit $P = z^u$, erit quidem in genere

$$\int P\,dz = \frac{z^{u+1}}{u+1};$$

vnde caſu $z = 1$ hic valor ſatis ſimplex naſcitur $\frac{1}{u+1}$, ita vt ſit $S = \frac{1}{u+1}$, cum deinde per differentiationes continuas, dum ſola $u$ pro variabili habetur, prodeat

$\left(\frac{dP}{du}\right) = z^u\, lz$, tum vero $\left(\frac{ddP}{du^2}\right) = z^u\,(lz^2)$, porro $\left(\frac{d^3P}{du^3}\right) = z^u\,(lz)^3$, $\left(\frac{d^4P}{du^4}\right) = z^u\,(lz)^4$, etc.

hinc ſequentes obtinentur valores integrales, ſi quidem poſt ſingulas integrationes ſtatuatur $z = 1$

$$\int z^u\,dz = \frac{1}{u+1}$$
$$\int z^u\,dz\,lz = -\frac{1}{(u+1)^2}$$
$$\int z^u\,dz\,(lz)^2 = +\frac{1.2}{(u+1)^3}$$
$$\int z^u\,dz\,(lz)^3 = -\frac{1.2.3}{(u+1)^4}$$
$$\int z^u\,dz\,(lz)^4 = +\frac{1.2.3.4}{(u+1)^5}$$
$$\int z^u\,dz\,(lz)^5 = -\frac{1.2.3.4.5}{(u+1)^6}$$
$$\int z^u\,dz\,(lz)^6 = +\frac{1\ldots\ldots 6}{(u+1)^7}$$
$$\int z^u\,dz\,(lz)^7 = -\frac{1\ldots\ldots 7}{(u+1)^8}$$

 vnde

vnde concludimus generaliter fore

$$\int z^u\, dz\, (lz)^n = \pm \frac{1.2.3.4 \ldots n}{(u+1)^{n+1}}$$

vbi ſignum $+$ valet ſi $n$ ſit numerus par, alterum vero $-$ ſi $n$ ſit numerus impar. Hae quidem integrationes iam aliunde ſatis ſunt notae, id quod mirum non eſt, quoniam tam ſimplicem formulam pro P aſſumſimus: breuiter igitur repetamus eos caſus, quos iam nuper expediui.

## Exemplum 2.

§. 14. Si fuerit $P = \frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}}$ iam dudum demonſtraui, formulae $\int P\, dz$ valorem integralem caſu quo poſt integrationem ponitur $z = 1$, eſſe $S = \frac{\pi}{2n \operatorname{coſ.} \frac{\pi u}{2n}}$

hinc ergo cum ſit $\left(\frac{dP}{du}\right) = -\frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}}\, lz$

tum vero $\left(\frac{ddP}{du^2}\right) = +\frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}}\, (lz)^2$

et $\left(\frac{d^3P}{du^3}\right) = -\frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}}\, (lz)^3$

etc. etc.

ex

ex cognito valore S ſequentes nacti ſumus integrationes

I. $\int \frac{z^{n-u-1}+z^{n+u-1}}{1+z^{2n}} dz = S = \frac{\pi}{2n \operatorname{coſ.} \frac{\pi u}{2u}}$

II. $\int \frac{-z^{n-u-1}+z^{n+u-1}}{1+z^{2n}} dz\, lz = \left(\frac{dS}{du}\right)$

III. $\int \frac{z^{n-u-1}+z^{n+u-1}}{1+z^{2n}} dz\, (lz)^2 = \left(\frac{ddS}{du^2}\right)$

IV. $\int \frac{-z^{n-u-1}+z^{n+u-1}}{1+z^{2n}} dz\, (lz)^3 = \left(\frac{d^3S}{du^3}\right)$

V. $\int \frac{z^{n-u-1}+z^{n+u-1}}{1+z^{2n}} dz\, (lz)^4 = \left(\frac{d^4S}{du^4}\right)$

etc. etc.

## Exemplum 3.

§. 15. Si fuerit $P = \frac{z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{1 - z^{2n}}$

ſimili modo demonſtraui valorem formulae integralis $\int P\,dz$, caſu quo poſt integrationem ponitur $z = 1$, fore

$S = \frac{\pi}{2n} \text{ tang. } \frac{\pi u}{2n}$;

atque hinc ſequentes integrationes pro eodem caſu $z = 1$ fuerunt deductae

$$\text{I.}\quad \int \frac{z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{1 - z^{2n}}\, dz = S = \frac{\pi}{2n}\,\text{tang.}\,\frac{\pi u}{2n}$$

$$\text{II.}\quad \int \frac{-z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{1 - z^{2n}}\, dz\, lz = \left(\frac{dS}{du}\right)$$

$$\text{III.}\quad \int \frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 - z^{2n}}\, dz\, (lz)^2 = \left(\frac{ddS}{du^2}\right)$$

$$\text{IV.}\quad \int \frac{-z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{1 - z^{2n}}\, dz\, (lz)^3 = \left(\frac{d^3S}{du^3}\right)$$

$$\text{V.}\quad \int \frac{z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{1 - z^{2n}}\, dz\, (lz)^4 = \left(\frac{d^4S}{du^4}\right)$$

etc. etc.

## Scholion.

§. 16. Quo igitur vberiores fructus ex hoc principio expectare queamus, praecipuum negotium huc redit; vt eiusmodi functiones binarum variabilium $z$ et $u$ pro P inueſtigemus, ita vt valor formulae integralis ſaltem certo quodam caſu puta $z = 1$ ſuccincte aſſignari poſſit, quemadmodum in allatis exemplis fieri licuit. Quemadmodum autem hoc principium ex continua differentiatione eſt deductum, ita eodem modo continua integratio ad vſum noſtrum accommodari poterit.

## Lemma II.

§. 17. Si P fuerit functio duarum variabilium $z$ et $u$, ac ponatur $\int P\,dz = S$ vt etiam S ſit functio duarum variabilium $z$ et $u$, tum erit $\int S\,du$

$= \int d$

$=\int dz \int P\,du$, vbi in integralibus formulis $\int P\,du$ et $\int S\,du$ ſola $u$ pro variabili habetur, in formula autem $\int dz \int P\,du$ ſola $z$.

## Demonſtratio.

Ponatur $\int S\,du = V$, vt ſit $S = (\frac{dV}{du})$, ideoque $(\frac{dV}{du}) = \int P\,dz$ eritque $(\frac{ddV}{dz\,du}) = P$; vnde, per $du$ multiplicando et integrando, erit $(\frac{dV}{dz}) = \int P\,du$, ex quo ſequitur $V = \int dz \int P\,du = \int S\,du$. q. e. d.

## Corollarium 1.

§. 18. Hoc modo etiam integratio repeti poteſt; vnde orietur talis aequatio $\int du \int S\,du = \int dz \int du \int P\,du$; hinc autem plerumque parum vtilitatis expectari poteſt, niſi forte iſtae integrationes commode ſuccedant.

## Corollarium 2.

§. 19. Quod ſi ergo formula $\int P\,dz$ fuerit integrabilis, ſcilicet $=S$ altera hinc deducta $\int dz \int P\,du$ eatenus tantum integrari poterit, quatenus integrale $\int S\,du$ integrare licet.

## Secundum principium integrationum.

§. 20. Si P eiusmodi fuerit functio duarum variabilium $z$ et $u$, vt formulae integralis $\int P\,dz$ valor certo ſaltem caſu puta $z = a$ commode exhiberi queat, ita, vt hoc caſu quantitas S fiat functio ſolius variabilis $u$; tum etiam pro eodem caſu $z = a$

huius formulae integralis $\int dz \int P\,du$ valor aſſignari poterit, ſi modo formulam $\int S\,du$ integrare licuerit.

## Exemplum I.

§. 21. Sumamus $P = z^u$, eritque $\int P\,dz = \frac{z^{u+1}}{u+1}$; quae formula caſu $z = 1$ abit in $\frac{1}{u+1}$, quod ergo loco S ſcribatur. Tum vero quia eſt

$$\int P\,du = \int z^u\,du = \frac{z^u}{lz}, \text{ et quia}$$

$$\int S\,du = l(u+1), \text{ erit } \int \frac{z^u\,dz}{lz} = l(u+1);$$

ſi quidem poſt illam integrationem ponatur $z = 1$. Quia autem omnis integratio additionem conſtantis poſtulat, hic potius ſtatui oportebit

$$\int \frac{z^u\,dz}{lz} = l(u+1) + C;$$

atque hic quidem facile intelligitur, hanc conſtantem C eſſe debere infinitam, quoniam in formula integrali fractio $\frac{z^u}{lz}$ poſito $z = 1$ fit infinita, ita vt hinc parum pro inſtituto noſtro ſequi videatur.

## Corollarium I.

§. 22. Quoniam autem haec conſtans C non a variabili $u$ pendet, ea retinebit eundem valorem, quicunque numeri determinati pro $u$ accipiantur. Sumamus

mamus igitur primo $u=m$, tum vero etiam $u=n$, vt habeamus iſtos valores

$$\text{I. } \int \frac{z^m\,dz}{lz} = l(m+1) + C \text{ et}$$

$$\text{II. } \int \frac{z^n\,dz}{lz} = l(n+1) + C$$

quarum altera ab altera ſubtracta relinquet iſtam integrationem notatu digniſſimam

$$\int \frac{(z^m - z^n)\,dz}{lz} = l\frac{m+1}{n+1}$$

quemadmodum iam ſupra ex longe aliis principiis demonſtrauimus.

## Corollarium. 2.

§. 23. Si ad alteram integrationem aſcendamus, quia eſt $\int P\,du = \frac{z^u}{lz}$, erit $\int du \int P\,du = \frac{z^u}{(lz)^2}$; tum vero ob

$\int S\,du = l(u+1)+C$, erit $\int du \int S\,du = (u+1)(l(u+1)-1)+Cu+D$ ſicque habebimus

$$\int \frac{z^u\,dz}{(lz)^2} = (u+1)(l(u+1)-1) + Cu + D$$

vbi conſtantes C et D non ab $u$ pendent; quare vt eas eliminemus tres caſus determinatos euoluamus

$$\text{I. } \int \frac{z^m\,dz}{(lz)^2} = (m+1)l(m+1) - m - 1 + Cm + D$$

$$\text{II. } \int \frac{z^n\, dz}{(l z)^2} = (n+1)l(n+1) - n - 1 + Cn + D$$

$$\text{III. } \int \frac{z^k\, dz}{(l z)^2} = (k+1)l(k+1) - k - 1 + Ck + D$$

eritque $\text{I} - \text{III} = (m+1)l(m+1) - (k+1)l(k+1) + k - m + C(m-k)$

et $\text{II} - \text{III} = (n+1)l(n+1) - (k+1)l(k+1) + k - n + C(n-k)$

hincque deducimus

$$(\text{I}-\text{III})(n-k) - (\text{II}-\text{III})(m-k) = \begin{cases} (m+1)(n-k)l(m+1) \\ -(k+1)(n-k)l(k+1) + (k-m)(n-k) \\ -(n+1)(m-k)l(n+1) - (k-n)(m-k) \\ +(k+1)(m-k)lk+1) \end{cases}$$

atque hinc deducimus ſequentem integrationem

$$\int \frac{dz\,((n-k)z^m - (m-k)z^n + (m-n)z^k)}{(l z)^2} =$$

$$+(m+1)(n-k)l(m+1)$$
$$-(n+1)(m-k)l(n+1)$$
$$+(k+1)(m-n)l(k+1).$$

## Corollarium 3.

§. 14. Operae pretium erit aliquot caſus euoluere, vbi quidem numeros $m$, $n$ et $k$ inter ſe inaequales accipi conuenit, quia aliter omnes termini ſe deſtruerent.

I. Sit igitur $m = 2$, $n = 1$ et $k = 0$ erit

$$\int \frac{(z-1)^2\, dz}{(l z)^2} = 3\,l\,3 - 4\,l\,2 = l\,\tfrac{27}{16}$$

II. Sit $m = B$, $n = 1$ et $k = 0$ eritque

$$\int \frac{(z^3 - 3z + 2)\, dz}{(l z)^2} = \int dz(z-1)^2(z+2 = 4l4 - 6l2 = 2l2 = l4$$

III.

III. Sit $m = 3$, $n = 2$ et $k = 0$ et erit

$$\int \frac{(2z^3 - 3zz + 1)dz}{(lz)^2} = \int \frac{dz(z-1)^2(2z+1)}{(lz)^2} = 8l4 - 9l3 = l\frac{4^8}{3^9}$$

IV. Sit $m = 3$, $n = 2$ et $k = 1$ et prodit

$$\int \frac{(z^3 - 2zz + z)dz}{(lz)^2} = \int \frac{zdz(z-1)^2}{(lz)^2} = 4l4 - 6l3 + 2l2 = l\frac{2^{10}}{3^6}.$$

## Corollarium 4.

§. 25. In his caſibus notatu dignum occurrit, quod numerator in formulis integralibus factorem habet $(z-1)^2$, quod ideo neceſſario vſu venit, ne valores integralium euadant infiniti. Quia enim denominator $(lz)^2$ euaneſcit caſu $z = 1$, ſi ponamus $z = 1 - \omega$ exiſtente $\omega$ infinite paruo, erit

$$lz = -\omega \text{ et } (lz)^2 = +\omega\omega.$$

Neceſſe ergo eſt vt in numeratore adſit factor, qui caſu $z = 1 - \omega$ itidem praebeat $\omega\omega$, quod euenit ſi ibi factor fuerit $(z-1)^2$.

## Scholion.

§. 26. Integratio, quam in corollario primo ſumus nacti, ideo omni digna videtur attentione, quod valores integrales inde nati caſu $z = 1$ nullo adhuc modo aſſignare potuerim, etiamſi tam ſimpliciter per logarithmos exprimantur. At vero integrationes, in Corollario ſecundo inuentae, etiamſi multo magis arduae videantur, tamen ex prioribus ope reductionum cognitarum non difficulter deriuari poſſunt; id quod pro vnico caſu oſtendiſſe ſufficiet. Ponamus

$\int \frac{dz(z-1)^2}{(lz)^2} = \frac{p}{lz} + \int \frac{q\,dz}{lz}$ eritque differentiando

$$\frac{dz(z-1)^2}{(lz)^2} = \frac{dp}{lz} - \frac{p\,dz}{z(lz)^2} + \frac{q\,dz}{lz}$$

vnde aequatis terminis ſeorſim vel per $(lz)^2$ vel per $lz$ diuiſae habebimusque has duas aequalitates

$$(z-1)^2 = -\frac{p}{z} \text{ et } dp = -q\,dz$$

ex quarum priore oritur $p = -z(z-1)^2$, hincque

$$\frac{dp}{dz} = -3zz + 4z - 1 \text{ ideoque } q = 3zz - 4z + 1$$

ita vt ſit

$$\int \frac{dz(z-1)^2}{(lz)^2} = \frac{-z(z-1)^2}{lz} + \int \frac{(3zz-4z+1)dz}{lz}$$

hic autem prius membrum poſito $z = 1$ ſponte euaneſcit; poſito enim $z = 1 - \omega$ vt ſit $lz = -\omega$, erit $p = -\omega\omega(1-\omega)$ ideoque $\frac{p}{lz} = \omega(1-\omega) = 0$ ob $\omega = 0$, poſterius vero membrum in has partes diſcerpi poteſt

$$3\int \frac{(zz-z)dz}{lz} - \int \frac{(z-1)dz}{lz}$$

prioris autem partis integrale eſt $3\,l\frac{3}{2}$, poſterioris vero $-1\,l\,2$; ſicque totum hoc integrale erit

$$3\,l\tfrac{3}{2} - l\,2 = 3\,l\,3 - 4\,l\,2 = l\tfrac{27}{16}$$

prorſus vti inuenimus. Hoc igitur modo ſi in genere ſtatuamus

$\int \frac{V\,dz}{(lz)^2} = \frac{p}{lz} + \int \frac{q\,dz}{lz}$ erit differentiando

$$\frac{V\,dz}{(lz)^2} = \frac{dp}{lz} - \frac{p\,dz}{z(lz)^2} + \frac{q\,dz}{lz}$$

vnde iſtae duae fluunt aequalitates

$$p = -Vz \quad \text{et } q = -\frac{dp}{dz}.$$

Iam

Iam vt terminus $\frac{p}{lz}$ euaneſcat poſito $z = 1$, numerator $p$ factorem habere debet $(z-1)^2$; qui ergo etiam factor eſſe debet quantitatis V. Sit igitur

$V = \frac{U(z-1)^2}{z}$ eritque $p = -U(z-1)^2$, vnde fit

$dp = -dU(z-1)^2 - 2Udz(z-1) = (z-1)(dU(z-1) - 2Udz)$,

hincque fit

$qdz = (z-1)(2Udz - dU(z-1))$;

quia ergo $q$ factorem habet $z-1$ formula $\int\frac{qdz}{lz}$ ſemper in partes reſolui poteſt, quarum integralia per corollarium primum aſſignare licet, ſi modo U fuerit aggregatum ex quotcunque poteſtatibus ipſius $z$; vnde ſequens deducitur theorema.

## Theorema.

§. 27. Si fuerit

$P = Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + Dz^\delta + \text{etc.}$

ita, vt ſumma coefficientium

$A + B + C + D \text{ etc.} = 0$ tum erit

$\int\frac{Pdz}{lz} = Al(\alpha+1) + Bl(\beta+1) + Cl(\gamma+1) + Dl(\delta+1)$

ſi quidem poſt integrationem ſtatuatur $z = 1$.

## Demonſtratio.

Cum hoc ipſo caſu, quo poſt integrationem ponitur $z = 1$ fit

$$\int\frac{z^n dz}{lz} = l(n+1) + \Delta$$

denotante $\Delta$ illam conſtantem infinitam integratione ingreſſam erit

$$A\int\frac{z^{\alpha}\,dz}{lz} = A\,l(\alpha+1) + A\,\Delta$$

eodemque modo

$$B\int\frac{z^{\beta}\,dz}{lz} = B\,l(\beta+1) + B\,\Delta$$

etc. etc.

ſi haec integralia omnia in vnam ſummam colligantur erit

$$(A + B + C + D + \text{etc.})\,\Delta = 0,$$

hincque erit integrale quaeſitum

$$\int\frac{P\,dz}{lz} = A\,l(\alpha+1) + B\,l(\beta+1) + C\,l(\gamma+1) + D\,l(\delta+1)\ \text{etc.}$$

q. e. d.

## Corollarium 1.

§. 28. Quia ſupponimus

$$A + B + C + D + \text{etc.} = 0$$

euidens eſt formulam

$$P = A\,z^{\alpha} + B\,z^{\beta} + C\,z^{\gamma} + D\,z^{\delta} + \text{etc.}$$

factorem habere $z-1$ quemadmodum iam ante notauimus.

## Corollarium 2.

§. 29. Quia eſt

$$(z-1)^n = z^n - \tfrac{n}{1}z^{n-1} + \tfrac{n(n-1)}{1.\,2}z^{n-2} - \tfrac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}z^{n-3}$$

hoc valore loco P poſito, erit $A=1$ et $\alpha=n$; deinde $B=-\frac{n}{1}$ et $\beta=n-1$; porro $C=\frac{n(n-1)}{1.\,2}$ et $\gamma=n-2$; etc.

hinc

hinc igitur erit

$$\int\frac{(z-1)^n dz}{lz}=l(n+1)-\frac{n}{1}ln+\frac{n.n-1}{1.2}l(n-1)-\frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}l(n-2)$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}l(n-3)+\text{etc.}$$

ſi modo exponens $n$ fuerit nihilo maior, vel ſaltem vnitate non minor, quia alioquin caſu $z=1$ fractio $\frac{(z-1)^n}{lz}$ fieret infinita; hoc autem non obſtante area ſupra conſiderata fiet finita, ita vt ſufficiat dummodo ſit $n>0$.

## Exemplum 2.

§. 30. Sit $P=\frac{z^{n-u-1}+z^{n+u-1}}{1+z^{2n}}$ erit $\int Pdz=\frac{\pi}{2n\,\text{coſ.}\frac{\pi u}{2n}}$;

ſi quidem poſt integrationem ponatur $z=1$ quem ergo valorem literae S tribuimus. Nunc ſpectata $z$ vt conſtante erit

$$\int P\,du=\frac{1}{1+z^{2n}}\left(\int z^{n-u-1}du+\int z^{n+u-1}du\right)$$

ideoque

$$\int P\,du=-\frac{z^{n-u-1}+z^{n+u-1}}{(1+z^{2n})lz}\text{ vnde fiet}$$

$$\int S\,du=\int\frac{z^{n-u-1}+z^{n+u-1}}{1+z^{2n}}\frac{dz}{lz};$$

cum igitu ſit $\text{coſ.}\frac{\pi u}{2n}=\text{ſin.}\frac{\pi(n-u)}{2n}$ erit

$$\int S\,du=\int\frac{\pi\,du}{2n\,\text{ſin.}\frac{\pi(n-u)}{2n}};$$

 hinc

hinc ſi ponamus

$$\frac{\pi(n-u)}{2n} = \Phi, \text{ erit } d\Phi = -\frac{\pi\, du}{2n}, \text{ ideoque}$$

$$\int S\, du = -\int \frac{d\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi} = -l\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi,$$

quocirca habebimus

$$\int S\, du = -l\,\text{tang.}\,\frac{\pi(n-u)}{4n},$$

ita vt poſito poſt integrationem $z = 1$ aſſecuti ſimus hanc integrationem

$$\int \frac{-z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}} \frac{dz}{lz} = -l\,\text{tang.}\,\frac{\pi(n-u)}{4n} = +l\,\text{tang.}\,\frac{\pi(n+u)}{4n}.$$

## Exemplum 3.

§. 31. Sit $P = \frac{z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{1 - z^{2n}}$ erit

$$\int P\, dz = \frac{\pi}{2n}\,\text{tang.}\,\frac{\pi u}{2n} = S$$

vnde fit

$$\int S\, du = -l\,\text{coſ.}\,\frac{\pi u}{2n},$$

hinc cum ſit

$$\int P\, du = -\frac{z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{(1 - z^{2n})\, lz}$$

naciſcimur ſequentem integrationem, ſi quidem integrale a termino $z = 0$ vsque ad terminum $z = 1$ extendatur

$$\int \frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 - z^{2n}} \frac{dz}{lz} = +l\,\text{coſ.}\,\frac{\pi u}{2n}.$$

Haec quidem duo poſteriora exempla iam ante fuſius expediui; vnde iis magis euoluendis non immoror: ſed ad ſequens problema progredior. Pro-

## Problema.

Si proponantur hac duae ſeries infinitae

$P = z\,\text{coſ.}\,u + z^2\,\text{coſ.}\,2u + z^3\,\text{coſ.}\,3u + z^4\,\text{coſ.}\,4u + z^5\,\text{coſ.}\,5u + \text{etc. et}$

$Q = z\,\text{ſin.}\,u + z^2\,\text{ſin.}\,2u + z^3\,\text{ſin.}\,3u + z^4\,\text{ſin.}\,4u + z^5\,\text{ſin.}\,5u + \text{etc.}$

quae binas variabiles $z$ et $u$ inuoluunt, inuenire relationes inter formulas integrales $\int\frac{P\,dz}{z}$, $\int P\,du$ et $\int\frac{Q\,dz}{z}$, $\int Q\,du$ aliasque formulas integrales per continuam integrationem inde natas.

## Solutio.

§. 32. Cum vtraque ſeries ſit recurrens, reperitur per formulas finitas

$$P = \frac{z\,\text{coſ.}\,u - zz}{1 - 2z\,\text{coſ.}\,u + zz} \text{ et } Q = \frac{z\,\text{ſin.}\,u}{1 - 2z\,\text{coſ.}\,u + zz}$$

vnde ſit

$$\int\frac{P\,dz}{z} = \int\frac{dz\,\text{coſ.}\,u - z\,dz}{1 - 2z\,\text{coſ.}\,u + zz} = -l\sqrt{1 - 2z\,\text{coſ.}\,u + zz}$$

et $\int Q\,du = \int\frac{z\,du\,\text{ſin.}\,u}{1 - 2z\,\text{coſ.}\,u + zz} = +l\sqrt{1 - 2z\,\text{coſ.}\,u + zz}$

ita vt ſit

$\int\frac{P\,dz}{z} = -\int Q\,du$; tum vero etiam erit

$$\int\frac{Q\,dz}{z} = \int\frac{dz\,\text{ſin.}\,u}{1 - 2z\,\text{coſ.}\,u + zz} = \text{A tang.}\,\frac{z\,\text{ſin.}\,u}{1 - z\,\text{coſ.}\,u};$$

at ſi iſte arcus differentietur ſumto ſolo angulo $u$ variabili, erit

$$\frac{1}{du}\,\text{A tang.}\,\frac{z\,\text{ſin.}\,u}{1 - z\,\text{coſ.}\,u} = \frac{z\,\text{coſ.}\,u - zz}{1 - 2z\,\text{coſ.}\,u + zz}$$

ita vt ſit $\int\frac{Q\,dz}{z} = \int P\,du$.

§. 33. Verum eaedem relationes facilius ex ipſis ſeriebus deriuantur: Cum enim ſit

$P = z$

$$P = z\,\text{coſ.}\,u + z^2\,\text{coſ.}\,2u + z^3\,\text{coſ.}\,3u + z^4\,\text{coſ.}\,4u\ \text{etc. erit}$$

$$\int \frac{P\,dz}{z} = \frac{z\,\text{coſ.}\,u}{1} + \frac{zz\,\text{coſ.}\,2u}{2} + \frac{z^3\,\text{coſ.}\,3u}{3}\ \text{etc.}$$

$$\text{et}\ \int P\,du = \frac{z\,\text{ſin.}\,u}{1} + \frac{zz\,\text{ſin.}\,2u}{2} + \frac{z^3\,\text{ſin.}\,3u}{3}\ \text{etc.}$$

et quia eſt

$$Q = z\,\text{ſin.}\,u + zz\,\text{ſin.}\,2u + z^3\,\text{ſin.}\,3u + \text{etc. erit}$$

$$\int \frac{Q\,dz}{z} = \frac{z\,\text{ſin.}\,u}{1} + \frac{zz\,\text{ſin.}\,2u}{2} + \frac{z^3\,\text{ſin.}\,3u}{3}\ \text{etc.}$$

$$\text{et}\ \int Q\,du = -\frac{z\,\text{coſ.}\,u}{1} - \frac{z^2\,\text{coſ.}\,2u}{2} - \frac{z^3\,\text{coſ.}\,3u}{3}\ \text{etc.}$$

vnde manifeſtum eſt fore

$$\int \frac{P\,dz}{z} = -\int Q\,du \ \text{et}\ \int \frac{Q\,dz}{z} = \int P\,du.$$

§. 34. Quo hoc modo vlterius progredi liceat ſtatuamus breuitatis gratia

$$P' = \frac{z\,\text{coſ.}\,u}{1} + \frac{z^2\,\text{coſ.}\,2u}{2} + \frac{z^3\,\text{coſ.}\,3u}{3}\ \text{etc. et}\ Q' = \frac{z\,\text{ſin.}\,u}{1} + \frac{z^2\,\text{ſin.}\,2u}{2} + \frac{z^3\,\text{ſin.}\,3u}{3}\ \text{etc.}$$

$$P'' = \frac{z\,\text{coſ.}\,u}{1^2} + \frac{z^2\,\text{coſ.}\,2u}{2^2} + \frac{z^3\,\text{coſ.}\,3u}{3^2}\ \text{etc. et}\ Q'' = \frac{z\,\text{ſin.}\,u}{1^2} + \frac{zz\,\text{ſin.}\,2u}{2^2} + \frac{z^3\,\text{ſin.}\,3u}{3^2}\ \text{etc.}$$

$$P''' = \frac{z\,\text{coſ.}\,u}{1^3} + \frac{zz\,\text{coſ.}\,2u}{2^3} + \frac{z^3\,\text{coſ.}\,3u}{3^3}\ \text{etc. et}\ Q''' = \frac{z\,\text{ſin.}\,u}{1^3} + \frac{zz\,\text{ſin.}\,2u}{2^3} + \frac{z^3\,\text{ſin.}\,3u}{3^3}\ \text{etc.}$$

$$P'''' = \frac{z\,\text{coſ.}\,u}{1^4} + \frac{zz\,\text{coſ.}\,2u}{2^4} + \frac{z^3\,\text{coſ.}\,3u}{3^4}\ \text{etc. et}\ Q'''' = \frac{z\,\text{ſin.}\,u}{1^4} + \frac{zz\,\text{ſin.}\,2u}{2^4} + \frac{z^3\,\text{ſin.}\,3u}{3^4}\ \text{etc.}$$

etc. etc. etc. etc.

et hinc comparationes ante inuentae continuabuntur

$$P' = \int \frac{P\,dz}{z} = -\int Q\,du, \quad Q' = \int \frac{Q\,dz}{z} = \int P\,du.$$

$$P'' = \int \frac{P'\,dz}{z} = -\int Q'\,du, \quad Q'' = \int \frac{Q'\,dz}{z} = \int P'\,du.$$

$$P''' = \int \frac{P''\,dz}{z} = -\int Q''\,du, \quad Q''' = \int \frac{Q''\,dz}{z} = \int P''\,du.$$

$$P'''' = \int \frac{P'''\,dz}{z} = -\int Q'''\,du, \quad Q'''' = \int \frac{Q'''\,dz}{z} = \int P'''\,du.$$

etc. etc. etc. etc. etc. etc.

vnde

vnde plures inſignes relationes deduci poſſunt.

§. 35. Maxime autem notatu dignae et ad noſtrum inſtitutum accommodatae ſunt eae relationes, vbi formulae integrales, in quibus ſola $z$ eſt variabilis, reducuntur ad alias formulas integrales, in quibus ſola $u$ eſt variabilis, cuiusmodi ſunt, quae ſequuntur

$$P' = \int \frac{P\,dz}{z} = -\int Q\,du$$

$$P'' = \int \frac{dz}{z} \int \frac{P\,dz}{z} = -\int du \int P\,du$$

$$P''' = \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{P\,dz}{z} = +\int du \int du \int Q\,du$$

$$P'''' = \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{P\,dz}{z} = +\int du \int du \int du \int P\,du$$

$$P^{V} = \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{P\,dz}{z} = -\int du \int du \int du \int du \int Q\,du$$

etc.

Similique modo pro altero genere

$$Q' = \int \frac{Q\,dz}{z} = +\int P\,du$$

$$Q'' = \int \frac{dz}{z} \int \frac{Q\,dz}{z} = -\int du \int Q\,du$$

$$Q''' = \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{Q\,dz}{z} = -\int du \int du \int P\,du$$

$$Q'''' = \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{Q\,dz}{z} = +\int du \int du \int du \int Q\,du$$

$$Q^{V} = \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{Q\,dz}{z} = +\int du \int du \int du \int du \int P\,du$$

etc.

§. 36. Quod ſi iam noſtrarum ſerierum, ſiue, quod eodem redit, quantitatum

$$P,\ P',\ P'',\ P''',\ P''''\ \text{etc. et}\ Q',\ Q'',\ Q''',\ Q''''\ \text{etc.}$$

eos tantum valores deſideremus, quos adipiſcuntur

 poſito

poſito $z = 1$, hoc commodi aſſequimur, vt in formulis integralibus vbi ſolus angulus $u$ pro variabili habetur, ſtatim ante integrationes ponere liceat $z = 1$, hoc autem facto erit

$$P = \frac{\cos. u - 1}{2 - 2 \cos. u} = -\frac{1}{2} \text{ et } Q = \frac{\sin. u}{2 - 2 \cos. u} = \frac{1}{2} \cot. \frac{1}{2} u$$

tum vero porro

$$\int P\, du = A - \frac{1}{2} u$$

$$\int du \int P\, du = B + A u - \frac{1}{4} uu$$

$$\int du \int du \int P\, du = C + B u + \frac{1}{2} A uu - \frac{1}{12} u^3$$

$$\int du \int du \int du \int P du = D + C u + \frac{1}{2} B uu + \frac{1}{6} A u^3 - \frac{1}{48} u^4$$

at pro formulis, vbi eſt $q$, calculus non tam concinne ſuccedit; erit enim

$$Q = \frac{1}{2} \cot. \frac{1}{2} u$$

$$\int Q\, du = l \sin. \frac{1}{2} u$$

$$\int du \int Q\, du = \int du\, l \sin. \frac{1}{2} u$$

quae formula cum omnem integrationem reſpuat, vix vlterius progredi licet; interim tamen erit

$$\int du \int du \int Q\, du = \int du \int du\, l \sin. \frac{1}{2} u$$

$$\int du \int du \int du \int Q\, du = \int du \int du \int du\, l \sin. \frac{1}{2} u.$$

§. 37. Quod ad priores formulas variabilem $z$ inuoluentes attinet, per notas reductiones elicitur

$$\int \frac{P' dz}{z} = \int \frac{dz}{z} \int \frac{P dz}{z} = l z \int \frac{P dz}{z} - \int \frac{P dz}{z} l z$$

vbi prius membrum $l z \int P\, dz$ euaneſcit poſito $z = 1$, tum vero

$$\int \frac{dz}{z} \int \frac{P' dz}{z} = \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{P dz}{z} = + \int \frac{P dz}{z} \frac{(l z)^2}{2}$$

quibus expreſſionibus vlterius exhibitis colligimus fore

$P' =$

| | |
|---|---|
| $P' = \int \frac{P\,dz}{z}$ | $Q' = \int \frac{Q\,dz}{z}$ |
| $P'' = -\int \frac{P\,dz}{z}\, lz$ | $Q'' = -\int \frac{Q\,dz}{z}\, lz$ |
| $P''' = +\int \frac{P\,dz}{z}\, \frac{(lz)^2}{1.2}$ | $Q''' = +\int \frac{Q\,dz}{z}\, \frac{(lz)^2}{1.2}$ |
| $P^{IV} = -\int \frac{P\,dz}{z}\, \frac{(lz)^3}{1.2.3}$ | $Q^{IV} = -\int \frac{Q\,dz}{z}\, \frac{(lz)^3}{1.2.3}$. |

§. 38. Ex his igitur ſequentium formularum integralium valores aſſignare poſſumus caſu quo $z = 1$

$$P = -\tfrac{1}{2}$$
$$P' = \int \frac{P\,dz}{z} = -l\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}u$$
$$P'' = -\int \frac{P\,dz}{z}\, lz = -B - Au + \tfrac{1}{4}uu$$
$$P''' = +\int \frac{P\,dz}{z}\, \frac{(lz)^2}{1.2} = \int du \int du\; l\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}u$$
$$P^{IV} = -\int \frac{P\,dz}{z}\, \frac{(lz)^3}{1.2.3} = D + Cu + \tfrac{1}{2}Buu + \tfrac{1}{6}Au^3 - \tfrac{1}{48}u^4$$
$$P^{V} = +\int \frac{P\,dz}{z}\, \frac{(lz)^4}{1.2.3.4} = \int du \int du \int du \int du\; l\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}u$$

etc.

Eodemque modo

$$Q = \tfrac{1}{2}\cot.\,\tfrac{1}{2}u$$
$$Q' = \int \frac{Q\,dz}{z} = A - \tfrac{1}{2}u$$
$$Q'' = -\int \frac{Q\,dz}{z}\, \frac{lz}{1} = -\int du\; l\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}u$$
$$Q''' = +\int \frac{Q\,dz}{z}\, \frac{(lz)^2}{2} = -C - Bu - \tfrac{1}{2}Auu + \tfrac{1}{12}u^3$$
$$Q^{IV} = -\int \frac{Q\,dz}{z}\, \frac{(lz)^3}{6} = \int du \int du \int du\; l\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}u$$
$$Q^{V} = +\int \frac{Q\,dz}{z}\, \frac{(lz)^4}{24} = E + Du + \tfrac{1}{2}Cuu + \tfrac{1}{6}Bu^3 + \tfrac{1}{24}Au^4 - \tfrac{1}{240}u^5$$

etc.

§. 39. Cum igitur ſit

$$P = \frac{z\cos.u - zz}{1 - 2z\cos.u + zz} \quad \text{et} \quad Q = \frac{z\,\text{ſin.}\,u}{1 - 2z\cos.u + zz}$$

 hacte-

hactenus id ſumus aſſecuti, vt harum duarum formularum integralium

$$\int \frac{dz(\text{coſ.}\,u - z)}{1 - 2z\,\text{coſ.}\,u + zz}(lz)^n \text{ et } \int \frac{dz\,\text{ſin.}\,u}{1 - 2z\,\text{coſ.}\,u + zz}(lz)^n$$

valores caſu $z = 1$ commode per angulum $u$ aſſignare valeamus, ſi modo conſtaret, quo facto quantitates A, B, C, D determinari oporteat, id quod vix alio modo niſi per ipſas ſeries, vnde hae quantitates ſunt natae, fieri poſſe videtur.

§. 40. Omiſſis igitur formulis integralibus, quae quantitatem Q inuoluunt, quippe quarum integratio minus ſuccedit, alteras tantum conſideremus, et poſito ſtatim $z = 1$ vbi fit $P = -\frac{1}{2}$ ita vt ſit

$$\text{coſ.}\,u + \text{coſ.}\,2u + \text{coſ.}\,3u + \text{coſ.}\,4u = -\tfrac{1}{2}$$

ſi per $du$ multiplicemus et integremus, habebimus

$$Q' = \frac{\text{ſin.}\,u}{1} + \frac{\text{ſin.}\,2u}{2} + \frac{\text{ſin.}\,3u}{3} + \frac{\text{ſin.}\,4u}{4} + \frac{\text{ſin.}\,5u}{5}\,\text{etc.} = A - \tfrac{1}{2}u$$

quae conſtans nihilo aequalis videri poteſt, quia poſito $u = 0$ ſumma ſeriei euaneſcere videtur; at ſumto angulo $u$ infinite paruo ſeries praebebit

$$u + u + u + u + u + u + \text{etc. in infinitum}$$

notum autem eſt, talem ſeriem ſummam finitam habere poſſe, vnde hoc caſu omiſſo ſtatuamus $u = \pi$, ſeu potius $u = \pi + \omega$ prodibitque haec ſeries exiſtente $\omega$ angulo infinite paruo

$$-\omega + \omega - \omega + \omega - \omega + \omega - \omega + \text{etc.}$$

vbi quia ſigna alternantur, nullum eſt dubium, quin ſumma ſeriei euaneſcat, quae cum eſſe debeat $A - \frac{\pi}{2}$

euidens

euidens eſt, fieri conſtantem $A = \frac{1}{2}\pi$, ita, vt iam habeamus

$$Q' = \frac{\text{ſin.}\, u}{1} + \frac{\text{ſin.}\, 2u}{2} + \frac{\text{ſin.}\, 3u}{3} + \frac{\text{ſin.}\, 4u}{4} + \frac{\text{ſin.}\, 5u}{5} \text{ etc.} = \frac{\pi - u}{2}.$$

Hoc modo conſtantem determinandi Illuſtr. *Daniel Bernoulli* primus eſt vſus, qui praeterea multa praeclara circa indolem harum ſerierum annotauit.

§. 41. Multiplicemus porro hanc vltimam ſeriem per $-du$, et integratio dabit

$$P'' = \frac{\text{coſ.}\, u}{1^2} + \frac{\text{coſ.}\, 2u}{2^2} + \frac{\text{coſ.}\, 3u}{3^2} + \frac{\text{coſ.}\, 4u}{4^2} + \text{etc.} = B - \frac{\pi u}{2} + \frac{uu}{4}$$

ad quam conſtantem inueniendam ponamus primo $u = 0$ fietque

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} \text{ etc.} = B$$

Cuius ſeriei ſummam iam pridem primus demonſtraui eſſe $= \frac{\pi\pi}{6}$; verum ſi haec veritas nobis eſſet ignota, egregia illa methodo a magno *Beruoullio* adhibita vtamur ac ponamus $u = \pi$ eritque

$$-\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} \text{etc.} = B - \frac{\pi\pi}{2} + \frac{\pi\pi}{4} = B - \frac{\pi\pi}{4}$$

ambae hae ſeries additae dabunt

$$\frac{2}{2^2} - \frac{2}{4^2} + \frac{2}{6^2} - \frac{2}{8^2} \text{ etc.} = 2B - \frac{\pi\pi}{4}$$

cuius duplum praebet

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} = 4B - \frac{\pi\pi}{2} = B$$

vnde colligitur $B = \frac{\pi\pi}{6}$ ita vt ſit

$$P'' = \frac{\text{coſ.}\, u}{1^2} + \frac{\text{coſ.}\, 2u}{2^2} + \frac{\text{coſ.}\, 3u}{3^2} + \frac{\text{coſ.}\, 4u}{4^2} = \frac{\pi\pi}{6} - \frac{\pi u}{2} + \frac{uu}{4}.$$

§. 42. Eodem modo vlterius progrediamur, et denuo per $du$ multiplicando et integrando adipiſcimur

 $Q''' =$

$$Q''' = \frac{\text{ſin.}\, u}{1^3} + \frac{\text{ſin.}\, 2u}{2^3} + \frac{\text{ſin.}\, 3u}{3^3} + \frac{\text{ſin.}\, 4u}{4^3} + \text{etc.} = C + \frac{\pi\pi u}{6} - \frac{\pi uu}{4} + \frac{u^3}{12}$$

vbi ſi ſtatuatur $u = 0$, ſumma ſeriei manifeſto euaneſcit, prodiret enim poſito $u = \omega$

$$\frac{\omega}{1^2} + \frac{\omega}{2^2} + \frac{\omega}{3^2} + \frac{\omega}{4^2} + \text{etc.} = \frac{\omega\pi\pi}{6}$$

quae ob $\omega = 0$ fit $= 0$ ſicque erit $C = 0$ ideoque

$$Q''' = \frac{\text{ſin.}\, u}{1^3} + \frac{\text{ſin.}\, 2u}{2^3} + \frac{\text{ſin.}\, 3u}{3^3} + \frac{\text{ſin.}\, 4u}{4^3}\ \text{etc.} = \frac{\pi\pi u}{6} - \frac{\pi uu}{4} + \frac{u^3}{12}.$$

§. 43. Ducatur haec ſeries in $-du$ et integratio praebebit

$$P^{IV} = \frac{\text{coſ.}\, u}{1^4} + \frac{\text{coſ.}\, 2u}{2^4} + \frac{\text{coſ.}\, 3u}{3^4} + \frac{\text{coſ.}\, 4u}{4^4}\ \text{etc.} = D - \frac{\pi\pi uu}{12} + \frac{\pi u^3}{12} - \frac{u^4}{48}$$

hinc ſumto $u = 0$ fiet

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4}\ \text{etc.} = D$$

nunc vero fiat etiam $u = \pi$ fietque

$$-\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} - \frac{1}{5^4}\ \text{etc.} = D - \frac{\pi^4}{48}$$

hae autem ambae ſeries additae dant

$$\frac{2}{2^4} + \frac{2}{4^4} - \frac{2}{6^4} - \frac{2}{8^4} + \text{etc.} = 2D - \frac{\pi^4}{48}$$

quae octies ſumta vt numeratores fiant $= 2^4$ praebebit

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.} = 16D - \frac{\pi^4}{6}$$

vnde oritur $D = \frac{\pi^4}{90}$ quae eſt eadem ſumma ſeriei

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4}\ \text{etc.}$$

quam iam dudum inueneram, habebimus iam

$$P^{IIII} = \frac{\text{coſ.}\, u}{1^4} + \frac{\text{coſ.}\, 2u}{2^4} + \frac{\text{coſ.}\, 3u}{3^4} + \frac{\text{coſ.}\, 4u}{4^4} = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\pi^2 u^2}{12} + \frac{\pi u^3}{12} - \frac{u^4}{48}.$$

§. 44. Multiplicando iterum per $du$ et integrando conſequimur

$Q^V =$

$$Q^V = \frac{\mathit{ſin.}\, u}{1^5} + \frac{\mathit{ſin.}\, 2u}{2^5} + \frac{\mathit{ſin.}\, 3u}{3^5} + \frac{\mathit{ſin.}\, 4u}{4^5} + \text{etc.} = E + \frac{\pi^4 u}{90} - \frac{\pi^2 u^3}{36} + \frac{\pi u^4}{48} - \frac{u^5}{240}$$

vbi vti in caſu penultimo conſtans E iterum fit $= 0$ ita vt habeamus

$$Q^V = \frac{\mathit{ſin.}\, u}{1^5} + \frac{\mathit{ſin.}\, 2u}{2^5} + \frac{\mathit{ſin.}\, 3u}{3^5} + \frac{\mathit{ſin.}\, 4u}{4^5}\ \text{etc.} = \frac{\pi^4 u}{90} - \frac{\pi^2 u^3}{36} + \frac{\pi u^4}{48} - \frac{u^5}{240}.$$

§. 45. Multiplicemus denuo per $-du$ prodibitque integrando

$$P^{VI} = \frac{\mathit{coſ.}\, u}{1^6} + \frac{\mathit{coſ.}\, 2u}{2^6} + \frac{\mathit{coſ.}\, 3u}{3^6} + \frac{\mathit{coſ.}\, 4u}{4^6}\ \text{etc.} = F - \frac{\pi^4}{90} \cdot \frac{uu}{2} + \frac{\pi\pi}{6} \cdot \frac{u^4}{24} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{u^5}{120} + \frac{1}{2} \cdot \frac{u^6}{720}$$

vbi ad conſtantem determinandam ponatur $u = 0$ eritque

$$\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.} = F$$

tum vero ſumatur $u = \pi$ et fiet

$$-\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} - \text{etc.} = F - \frac{\pi^6}{480}$$

quae additae dant

$$\frac{2}{2^6} + \frac{2}{4^6} + \frac{2}{6^6} + \frac{2}{8^6} + \text{etc.} = 2F - \frac{\pi^6}{480},$$

quae multiplicetur per 32 vt omnes numeratores fiant $64 = 2^6$ et orietur

$$\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.} = 64F - \frac{\pi^6}{15} = F$$

vnde colligitur $F = \frac{\pi^6}{945}$ ita vt ſit

$$P^{VI} = \frac{\mathit{coſ.}\, u}{1^6} + \frac{\mathit{coſ.}\, 2u}{2^6} + \frac{\mathit{coſ.}\, 3u}{3^6} + \frac{\mathit{coſ.}\, 4u}{4^6} + \text{etc.} = \frac{\pi^6}{945} - \frac{\pi^4}{90} \cdot \frac{u^2}{2} + \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{u^4}{24} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{u^5}{120} + \frac{1}{2} \cdot \frac{u^6}{720}.$$

§. 46. Has ſeries vlterius continuare ſuperfluum foret, cum lex progreſſionis iam ſatis ſit manifeſta, praecipue ſi in ſubſidium vocentur ſummationes poteſtatum reciprocarum parium, quas olim vsque ad poteſtatem trigeſimam ſupputatas dedi. Quod, quo clarius perſpiciatur iſtas ſummas ſequenti modo repraeſentemus:

$\frac{1}{1^2} +$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}\text{ etc.}=\alpha\pi\pi \quad \text{vt ſit } \alpha=\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\text{ etc.}=\beta\pi^4 \quad \text{vt ſit } \beta=\frac{1}{90}$$

$$\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{6^6}\text{ etc.}=\gamma\pi^6 \quad \text{vt ſit } \gamma=\frac{1}{945}$$

$$\frac{1}{1^8}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}\text{ etc.}=\delta\pi^8 \quad \text{vt ſit } \delta=\frac{1}{9450}$$

etc. etc. etc.

atque his poſitis ſequentes habebimus integrationes pro caſu ſcilicet $z=1$

$$Q^{I}=\int\frac{dz\,\textit{ſin.}\,u}{1-2z\,\textit{coſ.}\,u+zz}=\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}u=\text{A tang.}\frac{\textit{ſin.}\,u}{1-\textit{coſ.}\,u}$$

$$P^{II}=-\int\frac{dz(\textit{coſ.}\,u-z)}{1-2z\,\textit{coſ.}\,u+zz}\frac{lz}{1}=\alpha\pi\pi-\tfrac{1}{2}\pi u+\tfrac{1}{1}\frac{uu}{2}$$

$$Q^{III}=+\int\frac{dz\,\textit{ſin}\,u}{1-2z\,\textit{coſ.}\,u+zz}\frac{(lz)^2}{2}=\alpha\pi\pi\frac{u}{1}-\tfrac{1}{2}\pi\frac{uu}{2}+\tfrac{1}{2}.\frac{u^3}{6}$$

$$P^{IV}=-\int\frac{dz(\textit{coſ.}\,u-z)}{1-2z\,\textit{coſ.}\,u+zz}\frac{(lz)^3}{6}=\beta\pi^4-\alpha\pi\pi.\frac{uu}{2}+\tfrac{1}{2}\pi.\frac{u^3}{6}-\tfrac{1}{2}.\frac{u^4}{24}$$

$$Q^{V}=+\int\frac{dz\,\textit{ſin.}\,u}{1-2z\,\textit{coſ.}\,u+zz}\frac{(lz)^4}{24}=\beta\pi^4.\frac{u}{1}-\alpha\pi\pi.\frac{u^3}{6}+\tfrac{1}{2}\pi.\frac{u^4}{24}-\tfrac{1}{2}.\frac{u^5}{120}$$

$$P^{VI}=-\int\frac{dz(\textit{coſ.}\,u-z)}{1-2z\,\textit{coſ.}\,u+zz}\frac{(lz)^5}{120}=\gamma\pi^6-\beta\pi^4.\frac{uu}{2}+\alpha\pi\pi.\frac{u^4}{24}-\tfrac{1}{2}\pi.\frac{u^5}{120}+\tfrac{1}{2}.\frac{u^6}{720}$$

$$Q^{VII}=+\int\frac{dz\,\textit{ſin.}\,u}{1-2z\,\textit{coſ.}\,u+zz}.\frac{(lz)^6}{720}=\gamma\pi^6.\frac{u}{1}-\beta\pi^4\frac{u^3}{6}+\alpha\pi\pi.\frac{u^5}{120}-\tfrac{1}{2}\pi.\frac{u^6}{720}+\tfrac{1}{2}.\frac{u^7}{5040}$$

etc. etc. etc.

§. 47. Operae pretium erit, aliquos caſus, quibus angulo $u$ datus valor tribuitur, ob oculos exponere. Ponamus igitur $u=0$ quo caſu formulae noſtrae alternatim euaneſcunt, reliquae vero praebebunt

$$-\int\frac{dz}{1-z}lz=\alpha\pi\pi=\frac{\pi\pi}{6}$$

$$-\int\frac{dz}{1-z}\frac{(lz)^3}{6}=\beta\pi^4=\frac{\pi^4}{90}$$

$$-\int\frac{dz}{1-z}\frac{(lz)^5}{120}=\gamma\pi^6=\frac{\pi^6}{945}$$

his affines ſunt formulae, quae oriuntur ex poſitione

$u=\pi$

$u = \pi$ vbi iterum abeunt alternae ſinum $u$ inuoluentes et remanebunt ſequentes

$$\int \frac{dz}{1+z} lz = -\frac{\pi\pi}{12} = -\frac{1}{2}\alpha\pi\pi$$

$$\int \frac{dz}{1+z} \frac{(lz)^3}{6} = -\frac{7\pi^4}{720} = -\frac{7}{8}\beta\pi^4$$

$$\int \frac{dz}{1+z} \frac{(lz)^5}{120} = -\frac{31}{32}\gamma\pi^6$$

$$\int \frac{dz}{1+z} \frac{(lz)^7}{720} = -\frac{127}{128}\delta\pi^8.$$

§ 48. Hic notatu dignum occurrit, quod valores alterni, quos hic omiſimus, etiam euaneſcant poſito $u = \pi$; deinde non minus notatu dignum eſt, easdem formulas quoque euaneſcere poſito $u = 2\pi$, ſola prima excepta, quippe quae etiam non euaneſcit poſito $u = 0$; reliquae vero, ſcilicet tertia, quinta, ſeptima etc. certe euaneſcunt caſibus $u = 0$ et $u = \pi$, quin etiam $u = 2\pi$. Quod quo clarius appareat, has formulas per factores repraeſentemus eritque tertiae valor

$$= \frac{1}{12} u(\pi - u)(2\pi - u),$$

quintae vero valor reperitur

$$\frac{u}{120}(\pi - u)(2\pi - u)(4\pi\pi + 6\pi u - 3uu),$$

quod etiam in ſequentibus vſu venit. Ingenere autem obſeruari meretur, omnes noſtras formulas ſola prima excerpta eosdem ſortiri valores, ſiue ponatur $u = 0$ ſiue $u = 2\pi$, quippe quibus tam idem ſinus quam coſinus reſpondet. Videtur quidem eundem conſenſum locum habere debere ſi ponatur $u = 4\pi$ et $u = 6\pi$, verum Illuſtr. *Bernoullius* iam luculenter oſtendit, angulum $u$ in his valoribus non vltra

 qua-

quatuor rectos augeri poſſe. Huiusmodi autem anomalia etiam in omnibus vulgaribus ſeriebus quibus arcus exprimuntur occurrit, atque adeo in *Leibniziana*, inqua eſt

$$u = \frac{tang.\,u}{1} - \frac{(tang.\,u)^3}{3} + \frac{(tang.\,u)^5}{5} - \frac{(tang.\,u)^7}{7} + \frac{(tang.\,u)^9}{9} - \text{etc.}$$

angulum $u$ non vltra 180 gr. augere licet. Si enim poneremus $u = 180^\circ + u$ foret vtique tang. $u$ = tang. $u$ neque tamen ſeries illa exprimeret arcum $\pi + u$ ſed tantum arcum $u$, cuiusmodi phaenomena etiam in aliis ſimilibus ſeriebus locum habent. Quod autem prima ſeries hinc plerumque excipi debeat, ratio in eo eſt ſita, quod in formula integrali poſito $u = 0$ denominator fiat $(1 - z)$ qui caſu $z = 1$ euaneſcit ideoque formula in infinitum excreſcit, id quod in ſequentibus, quae per $l\,z$ ſunt multiplicatae, non amplius euenit, quia $\frac{l\,z}{1 - z}$ caſu $z = 1$ non amplius fit infinitus ſed tantum $= -1$ et ſi maior poteſtas logarithmi adſit fit adeo $= 0$.

§. 49. Ponamus nunc etiam $u = 90^\circ$, ſeu $u = \frac{\pi}{2}$, vt ſit coſ. $u = 0$ et ſin. $u = 1$ hocque caſu omnes formulae generales ſequentes obtinebunt valores

$$\int \frac{dz}{1 + zz} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int \frac{z\,dz}{1 + zz}\, l\,z = -\frac{\pi\pi}{48}$$

$$\int \frac{dz}{1 + zz} \frac{(l\,z)^2}{2} = \frac{\pi^3}{32}$$

$$\int \frac{z\,dz}{1 + zz} \frac{(l\,z)^3}{6} = -\frac{7\pi^4}{90 \cdot 128}.$$

§. 50.

§. 50. Conſideremus etiam caſum $u = 60$ gr. ſiue $u = \frac{\pi}{3}$ vt ſit $\cos . u = \frac{1}{2}$ et $\sin . u = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et formulae generales perducent ad ſequentia integralia

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{dz}{1 - z + zz} = \frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{dz(1 - 2z)}{1 - z + zz}\, lz = \frac{\pi\pi}{36}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{dz}{1 - z + zz} \frac{(lz)^2}{2} = \frac{5\pi^3}{162}.$$

Simili modo ſi ponamus $u = 120^{\circ} = \frac{2\pi}{3}$ vt ſit $\cos . u = -\frac{1}{2}$ et $\sin . u = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ſequentes integrationes iſtis affines prodibunt

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{dz}{1 + z + zz} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{dz(1 + 2z)}{1 + z + zz}\, lz = -\frac{\pi\pi}{18}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{dz}{1 + z + zz} \frac{(lz)^2}{2} = \frac{2\pi^3}{81}$$

ſicque pro lubitu numerus huiusmodi integrationum ſpecialium augeri poterit.

§. 51. Quemadmodum iſtae integrationes memorabiles ex priore ſerie noſtra P poſito $z = 1$ ſunt deductae, ita eodem modo alteram ſeriem Q pertractemus. Cum igitur ſit

$$Q = \sin . u + \sin . 2u + \sin . 3u + \sin . 4u \text{ etc.} = \tfrac{1}{2} \cot . \tfrac{1}{2} u$$

ſi per $-du$ multiplicemus et integremus, reperitur ſeries

$$P' = \frac{\cos . u}{1} + \frac{\cos . 2u}{2} + \frac{\cos . 3u}{3} + \frac{\cos . 4u}{4} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} - l \sin . \tfrac{1}{2} u + A$$

pro qua conſtante determinanda ponatur $u = \pi$ vt ſit

$$-1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} - \text{etc.} = A$$

quocirca ſit $A = -l2$ ita, vt habeamus

$$P' = \frac{\cos . u}{1} + \frac{\cos . 2u}{2} + \frac{\cos . 3u}{3} + \frac{\cos . 4u}{4} + \text{etc.} = -l2 \sin . \tfrac{1}{2} u$$

 pro

pro quo valore ſcribamus breuitatis gratia $u\Delta : u$ ſi quidem eum ſpectamus tanquam certam ipſius $u$ functionem ita vt ſit $P' = \Delta : u$.

§. 52. Multiplicando porro per $du$ et integrando nanciſcimur hanc ſeriem

$$Q'' = \frac{\text{ſin.}\, u}{1^2} + \frac{\text{ſin.}\, 2u}{2^2} + \frac{\text{ſin.}\, 3u}{3^2} + \frac{\text{ſin.}\, 4u}{4^2} \text{ etc.} = \int du\, \Delta : u = \Delta' : u$$

vbi haec formula integralis inuoluet certam conſtantem quam facile definire licet ex caſu $u = 0$ quia enim ſeries euaneſcit, fieri debet $\Delta' : 0 = 0$ ſicque integratio plene determinatur.

§. 53. Si eodem modo vlterius progrediamur multiplicando per $-du$, prodibit haec ſeries

$$P''' = \frac{\text{coſ.}\, u}{1^3} + \frac{\text{coſ.}\, 2u}{2^3} + \frac{\text{coſ.}\, 3u}{3^3} + \frac{\text{coſ.}\, 4u}{4^3} = -\int du\, \Delta' : = \Delta'' : u.$$

Iam ad conſtantem, quae in hac expreſſione continetur, definiendam ſit 1° $u = 0$ eritque

$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3}$ etc. $= \Delta'' : 0$ 1°. ſit $u = \pi$ et fiet

$-\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3}$ etc. $= \Delta'' : \pi$ quibus additis prodit

$\frac{2}{2^3} + \frac{2}{4^3} + \frac{2}{6^3} + \frac{2}{8^3} +$ etc. $= \Delta'' 0 + \Delta'' : \pi$ hacque quatuor ſumta erit

$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} +$ etc. $= 4\Delta'' : 0 + 4\Delta'' : \pi = \Delta'' : 0$ vnde oritur

$$3\Delta'' : 0 + 4\Delta'' : \pi = 0$$

ex qua conſtans in formulam noſtram integralem

$$\Delta'' : u = -\int du\, \Delta' u$$

ingreſſa determinari debet.

§. 54. Multiplicemus denuo per $du$ et integremus prodibitque

$$Q^{IV} = \frac{\text{ſin.}\, u}{1^4} + \frac{\text{ſin.}\, 2u}{2^4} + \frac{\text{ſin.}\, 3u}{3^4} + \frac{\text{ſin.}\, 4u}{4^4} + \text{etc.} = \int du\, \Delta'' : u = \Delta''' : u$$

atque

atque haec functio $\Delta''' : u$ ita debet determinari, vt euaneſcat ſumto $u = 0$ ſiue vt fiat $\Delta''' : 0 = 0$. Eodem modo vlterius progrediendo fiet

$$P^V = \frac{\cos. u}{1^5} + \frac{\cos. 2u}{2^5} + \frac{\cos. 3u}{3^5} + \frac{\cos. 4u}{4^5} = -\int du\, \Delta''' : u = \Delta'''' : u$$

huiusque functionis indoles ſequenti modo determinabitur: ponatur ſcilicet vt hactenus $u = 0$ et $u = \pi$ eritque

$\frac{1}{1^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} + \text{etc.} = \Delta^{IV} : 0$ et

$-\frac{1}{1^5} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} - \frac{1}{5^5} + \text{etc.} = \Delta^{IV} : \pi$ hinc addendo

$\frac{2}{2^5} + \frac{2}{4^5} + \frac{2}{6^5} + \frac{2}{8^5} + \text{etc.} = \Delta^{IV} : 0 + \Delta^{IV} : \pi$ et multiplicando per 16

$\frac{1}{1^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \text{etc.} = 16\, \Delta^{IV} : 0 + 16\, \Delta^{IV} : \pi = \Delta^{IV} : 0$

ſicque fieri debebit $15\, \Delta^{IV} : 0 + 16\, \Delta^{IV}\, \pi = 0$ etc.

§. 55. Hinc igitur ſequentes adipiſcemur integrationes pro caſu $z = 1$

I. $-\int \frac{dz(\cos. u - z)}{1 - 2z \cos. u + zz} = -l\, 2 \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} u = \Delta : u$

II. $\int \frac{dz \text{ ſin. } u}{1 - 2z \cos. u + zz}\, lz = \int du\, \Delta u = \Delta' : u$

III. $-\int \frac{dz(\cos. u - z)}{1 - 2z \cos. u + zz} \frac{(lz)^2}{2} = -\int du\, \Delta' u = \Delta'' : u$

IV. $\int \frac{dz \text{ ſin. } u}{1 - 2z \cos. u + zz} \frac{(lz)^3}{6} = \int du\, \Delta'' u = \Delta''' u$

V. $-\int \frac{dz(\cos. u - z)}{1 - 2z \cos. u + zz} \frac{(lz)^4}{24} = -\int du\, \Delta''' u = \Delta^{IV} u$

VI. $\int \frac{dz \text{ ſin. } u}{1 - 2z \cos. u + zz} \frac{(lz)^5}{120} = \int du\, \Delta^{IV} u = \Delta^{V} u$

etc. — etc. — etc. — etc.

Has autem expreſſiones facile quousque libuerit continuare licet, ſi modo integratio cuiusque integralis

 rite

rite inſtituatur; conditiones autem, quas impleri oportet, ſequenti modo referri poſſunt

| | |
|---|---|
| $\Delta^{I}:0=0$ | $3\Delta^{II}:0+4\Delta^{II}:\pi=0$ |
| $\Delta^{III}:0=0$ | $15\Delta^{IV}:+16\Delta^{IV}:\pi=0$ |
| $\Delta^{V}:0=0$ | $63\Delta^{VI}:0+64\Delta^{VI}:\pi=0$ |
| $\Delta^{VII}:0=0$ | $255\Delta^{VIII}:0+255\Delta^{VIII}:\pi=0$ |
| etc. etc. | etc. etc. |

caeterum quia poſteriores integrationes abſoluere non licet, hinc parum vtilitatis exſpectare poſſumus.

§. 56. Caeterum methodus, qua hic ſumus vſi, ad conſtantes per quamque integrationem ingreſſas determinandas, a celeberrimo *Bernoullio* primum eſt adhibita atque eo maiori attentione digna eſt aeſtimanda, quod eius ope ſummationes meae ſerierum reciprocarum poteſtatum obtineri poſſunt, quandoquidem credideram, eas non aliter niſi ex conſideratione infinitorum arcuum qui vel eodem ſinu vel coſinu gaudent, demonſtrari poſſe.

DE-

# DEMONSTRATIO THEOREMATIS NEVTONIANI DE EVOLVTIONE POTESTATVM BINOMII PRO CASIBVS QVIBVS EXPONENTES NON SVNT NVMERI INTEGRI.

Auctore

*L. EVLERO.*

§. 1.

Theorema hoc, ita repraeſentari ſolitum

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}.\, a^{n-1} b + \frac{n}{1}.\, \frac{n-1}{2}\, a^{n-2} b^2 + \frac{n}{1}.\, \frac{n-1}{2}.\, \frac{n-2}{3}\, a^{n-3} b^3 \text{ etc.}$$

quatenus latiſſime patere, et ſub exponente $n$, omnes plane numeros poſſibiles complecti cenſetur, fundamentum conſtituit vniuerſae analyſeos ſublimioris; vnde eius veritatem ſolidiſſime demonſtrari neceſſe eſt. Modus autem, quo ad hoc theorema eſt perventum, dum quantitas $a+b$ aliquoties in ſe invicem multiplicari ſolet, ita eſt comparatus, vt pro exponente $n$ alii numeri non prodeant, niſi qui ſint integri poſitiui, ſiquidem continuo multiplicando per eandem quantitatem $a+b$ aliae poteſtates oriri nequeunt, niſi quarum exponentes indicent factorum numerum, qui non numerus integer omnino eſſe nequit. Interim tamen vix quisquam dubitaſſe videtur,

detur, quin, ſi haec formula vera fuerit pro omnibus numeris integris loco $n$ aſſumtis, eadem quoque vera ſit futura pro omnibus plane numeris ſiue fractis, ſiue adeo irrationalibus; quae concluſio quanquam hoc caſu locum habet, id tamen ob alias rationes vſu venit, quandoquidem eiusmodi caſus exhiberi poſſunt, quibus formula quaepiam vera deprehenditur, quoties exponens $n$ fuerit numerus integer poſitiuus, eadem autem neutiquam locum habere poſſit, ſimulac eidem exponenti valores fracti tribuantur.

§. 2. Quo hoc exemplo illuſtremus, propoſita ſit ſequens ſeries

$$\frac{1-a^n}{1-a}+\frac{(1-a^n).(1-a^{n-1})}{1-a^2}+\frac{(1-a^n).(1-a^{n-1}).(1-a^{n-2})}{1-a^3}$$
$$+\frac{(1-a^n).(1-a^{n-1}).(1-a^{n-2}).(1-a^{n-3})}{1-a^4}+\text{etc.}$$

cuius valor quoties exponens $n$ fuerit numerus integer poſitiuus, ſemper huic ipſi exponenti $n$ aeqnalis deprehenditur, neque tamen hinc concludere licet, hanc aequalitatem ſubſiſtere, dum pro $n$ alii numeri accipiuntur; haec autem proprietas locum quoque habet ſumendo $n=0$, tum enim ob $a^n=1$ ſtatim primus terminus euaneſcit, vna cum omnibus ſequentibus, quippe qui factorem habent $1-a^n=0$ ita vt hoc caſu noſtra ſeries fiat $=0$, hoc eſt ipſi exponenti $n=0$ aequalis; tum vero ſumto $n=1$ primus terminus fit $\frac{1-a}{1-a}=1$ at ſecundus terminus ob $1-a^{n-1}=0$ euaneſcit vna cum omnibus ſequentibus

tibus, ita vt hoc caſu $n = 1$ ipſa ſeries fiat $= 1$. Conſideremus adhuc caſum $n = 2$, quo primus terminus fit $\frac{1 - a^2}{1 - a} = 1 + a$, at ſecundus terminus praebet $\frac{(1 - a^2).(1 - a)}{1 - a^2} = 1 - a$, tertius vero cum omnibus ſequentibus, ob factorem $1 - a^{n-2} = 0$ euaneſcet, ex quo ſumma noſtra ſeriei erit $= 2$ hoc eſt ipſi $n$ aequalis. Statuamus adhuc $n = 3$ et primus terminus dabit $\frac{1 - a^3}{1 - a} = 1 + a + a^2$ ſecundus vero terminus praebet

$$\frac{(1 - a^3).(1 - a^2).(1 - a)}{1 - a^3} = 1 - a - aa + a^3,$$

quartus autem terminus et ſequentes omnes quia continent factorem $1 - a^{n-3} = 0$ euaneſcunt, vnde noſtra ſeries hoc caſu $n = 3$ euadit $= 3$. Similique modo oſtendi poteſt, quicunque numerus integer loco $n$ accipiatur, ſeriem noſtram eidem numero aequalem eſſe prodituram, quilibet autem facile perſpiciet, ſi caperetur $n = \frac{1}{2}$ hanc ſeriem maxime eſſe diſcrepaturam a valore $\frac{1}{2}$.

§. 3. Cum igitur de hac formula

$$n = \frac{1 - a^n}{1 - a} + \frac{(1 - a^n).(1 - a^{n-1})}{1 - a^2} + \frac{(1 - a^n).(1 - a^{n-1}).(1 - a^{n-2})}{1 - a^3} + \text{etc.}$$

affirmare liceat, eam ſemper veram eſſe, quoties $n$ fuerit numerus integer poſitiuus; neque vero haec aequalitas pro aliis numeris locum habeat, merito quoque dubitare licebit, an noſtrum theorema

$$(a + b)^n = a^n + \tfrac{n}{1}.\, a^{n-1} b + \tfrac{n}{1}.\, \tfrac{n-1}{2}.\, a^{n-2} b^2 + \tfrac{n}{1}.\, \tfrac{n-1}{2}.\, \tfrac{n-2}{3}.\, a^{n-3} b^3 \text{ etc.}$$

generaliſſime veritati ſit conſentaneum, etiamſi certiſſimus, id verum eſſe, quoties exponens $n$ fuerit numerus integer poſitiuus. Quamobrem eo magis vtique neceſſe eſt, vt iſta veritas rigoroſa demonſtratione corroboretur. Equidem olim demonſtrationem ex analyſi infinitorum petitam tradideram; ſed quia ipſa haec analyſis noſtro theoremate innititur, eam tanquam petitionem principii penitus reiiciendam nunc agnoſco; ab hoc vitio autem immunem demonſtrationem dedit Illuſtr. Academiae noſtrae Socius *Aepinus* in Tomo VIII. Nouor. Commentar., vbi pro formula $(x+1)^n$ aſſumens ſeriem generalem:

$$A x^n + B x^{n-1} + C x^{n-2} + \text{etc.}$$

methodo maxime ingenioſa elicuit valores aliquot coefficientium A, B, C, D etc. et ex eorum conſenſu cum ſerie *Neutoniana*, ſine dubio rite concludere potuit, etiam reliquos omnes regulae fore conformes; interim tamen egregia iſta demonſtratio plurimum inductione innititur, praeterea vero etiam notari conuenit ſecundum coefficientem B ex hac methodo determinationem non accepiſſe, ſed ex aliis conditionibus haud parum abſconditis et abſtruſis repetiiſſe. Vnde meam demonſtrationem Geometris eo gratiorem fore confido, quod in ea nihil plane inductioni tribuitur.

§. 4. Ante omnia autem cum ſit $a+b=a(1+\frac{b}{a})$ eritque quoque $(a+b)^n=a^n(1+\frac{b}{a})^n$ ſicque totum negotium reducitur ad euolutionem huius poteſtatis

$(1+\frac{b}{a})$

$(1+\frac{b}{a})^n$, quae porro ponendo $\frac{b}{a}=x$ redit ad hanc $(1+x)^n$, quam nouimus, quoties exponens $n$ fuerit numerus integer poſitiuus, aequalem fore huic ſeriei

$$1+\frac{n}{1}.x+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.x^2+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.x^3+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.x^4 \text{ etc.}$$

verum ſi $n$ non fuerit numerus integer poſitiuus, valorem huius ſeriei tanquam incognitum ſpectemus, eiusque loco hoc ſigno $[n]$ vtamur, ita vt iam in genere habeamus

$$[n]=1+\frac{n}{1}.x+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.x^2 \text{ etc.}$$

de qua etiam nunc plus non nouimus, quam caſu, quo $n$ eſt numerus integer poſitiuus, fore $[n]=(1+x)^n$ reliquis autem caſibus quinam valores huic ſigno $[n]$ conueniant, ſequenti modo inueſtigemus: Vnde demum patebit, etiam in genere fore $[n]=(1+x)^n$ quicunque numeri pro exponente $n$ accipiantur, quo pacto propoſito noſtro plene ſatisfecerimus.

§. 5. Ad hanc inueſtigationem inſtituendam duas huiusmodi ſeries ſeu duo talia ſigna $[n]$ et $[m]$ in ſe inuicem multiplicemus vt ſeriem obtineamus huic producto $[m].[n]$ aequalem, quam facile patet huiusmodi forma expreſſum iri:

$$1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5 \text{ etc.}$$

cuius coefficientes A, B, C, D, E etc. quemadmodum per binas literas $m$ et $n$ determinentur vt pateat; ipſam multiplicationem ſaltem inchoemus

$$[m] = 1 + \frac{m}{1}.\,x + \frac{m}{1}.\,\frac{m-1}{2}.\,x^2 + \text{etc.}$$

$$[n] = 1 + \frac{n}{1}.\,x + \frac{n}{1}.\,\frac{n-1}{2}.\,x^2 + \text{etc.}$$

$$\begin{aligned}[m].[n] = 1 &+ \frac{m}{1}.\,x + \frac{m}{1}.\,\frac{m-1}{2}.\,xx \text{ etc.}\\ &+ \frac{n}{1}.\,x + \frac{m}{1}.\,\frac{n}{1}.\,xx \text{ etc.}\\ &+ \frac{n}{1}.\,\frac{n-1}{2}.\,xx \text{ etc.}\end{aligned}$$

Quod ſi iam hoc productum inchoatum cum forma aſſumta

$$1 + A\,x + B\,x^2 + C\,x^3 \text{ etc.}$$

qua idem productum exprimi ponimus, comparemus, ſtatim intelligitur, fore

$A = m + n$ et $B = \frac{m}{1}.\,\frac{m-1}{2} + \frac{m}{1}.\,\frac{n}{1} + \frac{n}{1}.\,\frac{n-1}{2}$ ſiue

$B = \frac{mm - m}{2} + mn + \frac{nn - 1}{2}$ vnde fit

$B = \frac{m+n}{1}.\,\frac{m+n-1}{2}.$

§. 6. Quemadmodum hic duos primos coefficientes A et B, per literas $m$ et $n$ determinare licuit, ita manifeſtum eſt, ſi ſuperior multiplicatio vlterius continuaretur, inde etiam ſequentes coefficientes C, D, E etc. per easdem litteras $m$ et $n$ definiri poſſe, quamuis calculus mox ita fieret moleſtus, vt maximum laborem requireret. Interim tamen hinc tuto concludere poſſumus omnes plane coefficientes A, B, C, D, E etc.; certo modo per binas literas $m$ et $n$ determinari debere; etiamſi ipſam rationem, qua quisque per has literas definitur, ad huc ignoremus, hic autem imprimis obſeruari conuenit, hanc compoſitionis rationem non ab indole litera-

terarum $m$ et $n$ pendere; ſed perinde ſe eſſe habituram, ſiue hae literae $m$ et $n$ denotent numeros integros ſiue alios numeros quoscunque. Hoc ratiocinium non vulgare probe notetur, quoniam ei tota vis noſtrae demonſtrationis initititur.

§. 7. Hinc facilis nobis via aperitur, veros valores omnium coefficientium A, B, C, D, E etc. inueniendi, dum ſcilicet literas $m$ et $n$ tanquam numeros integros ſpectamus, quandoquidem hinc eaedem determinationes oriuntur ac ſi quoscunque alios numeros denotarent. Spectatis autem literis $m$ et $n$ vt numeris integris vtique habebimus $[m] = (1 + x)^m$ et $[n] = (1 + x)^n$, vnde harum formularum productum erit $[m].[n] = (1 + x)^{m+n}$ iam vero haec poteſtas euoluitur in hanc ſeriem:

$$1 + \frac{m+n}{1}.x + \frac{m+n}{1}.\frac{m+n-1}{2}.x^2 + \frac{m+n}{1}.\frac{m+n-1}{2}.\frac{m+n-2}{3}.x^3$$

nunc igitur ſi literas $m$ et $n$ in genere ſpectemus hanc ſeriem iſto ſigno $[m + n]$ indicari oportet, vnde hanc inſignem veritatem nanciſcimur, ſemper eſſe $[m].[n] = [m + n]$ quicunque etiam numeri loco iſtarum literarum adhibeantur.

§. 8. Cum igitur binae huiusmodi formulae $[m]$ et $[n]$ in ſe inuicem ductae praebeant ſimplicem formulam eiusdem indolis, ita etiam plures eiusmodi formulae in ſe inuicem ductae ad ſimplicem reuocabuntur, habebimus ſcilicet ſequentes reductiones

$$[m].[n] = [m + n]$$
$$[m].[n].[p] = [m + n + p]$$
$$[m].[n].[p].[q] = [m + n + p + q] \text{ etc.}$$

 hinc

hinc ſi omnes iſti numeri $m$, $n$, $p$, $q$ etc. inter ſe capiantur aequales ſcilicet $= m$ obtinebimus ſequentes reductiones poteſtatum

$$[m]^2 = [2\,m]\,;\ [m]^3 = [3\,m]\,;\ [m]^4 = [4\,m]\,;\ \text{etc.}$$

vnde generaliter erit $[m]^a = [a\,m]$; denotante $a$ numerum quemcunque integrum.

§. 9. His praenotatis denotet litera $i$ numerum quemcunque integrum poſitiuum ac ſtatuamus primo $2\,m = i$ vt ſit $m = \frac{i}{2}$ ac poſtremarum formularum prima dabit $[\frac{i}{2}]^2 = [i]$ quia autem $i$ eſt numerus integer, erit $[i] = (1 + x)^i$ (vide §. 4.) ſicque erit $[\frac{i}{2}]^2 = (1 + x)^i$ vnde radicem quadratam extrahendo fit $[\frac{i}{2}] = (1 + x)^{\frac{i}{2}}$ ſicque iam tantum ſumus conſecuti, vt theorema Neutonianum etiam verum ſit caſibus, quibus exponens $n$ eſt huiusmodi fractio $\frac{i}{2}$.

§. 10. Simili modo ſi ponamus $3\,m = i$ vt ſit $m = \frac{i}{3}$, altera formularum ſuperiorum praebet $[\frac{i}{3}]^3 = [i] = (1 + x)^i$ hinc radicem extrahendo nanciſcimur $[\frac{i}{3}] = (1 + x)^{\frac{i}{3}}$ ſicque theorema noſtrum etiam verum eſt ſi exponens $n$ fuerit huiusmodi fractio $\frac{i}{3}$, atque hinc in genere manifeſtum fore $[\frac{i}{a}] = [1 + x]^{\frac{i}{a}}$ ita vt iam demonſtratum ſit, theorema noſtrum verum eſſe, ſi pro exponente $n$ fractio quaecunque $\frac{i}{a}$ accipiatur, vnde veritas iam eſt euicta pro omnibus numeris poſitiuis loco exponentis $n$ accipiendis.

§. 11.

§. 11. Supereſt igitur tantum, vt veritas quoque oſtendatur pro caſibus, quibus exponens $n$ eſt numerus negatiuus. Hunc in finem in ſubſidium vocemus reductionem primo inuentam $[m].[n]=[m+n]$ vbi denotet $m$, numerum poſitiuum ſiue integrum ſiue fractum ita vt ſit vti modo oſtendimus $[m]=(1+x)^m$, deinde vero ſtatuatur $n=-m$ eritque $m+n=0$ ideoque $[0]=(1+x)^0=1$, quibus ſubſtitutis formula ſuperior ſuppeditat $(1+x)^m$. $[-m]=1$ vnde colligimus $[-m]=\frac{1}{(1+x)^m}=(1+x)^{-m}$ ſicque etiam demonſtratum eſt theorema Neutonianum verum quoque eſſe, ſi exponens $n$ fuerit numerus negatiuus quicunque atque adeo hoc theorema nunc quidem firmiſſimis rationibus eſt confirmatum.

PROBLE-

# PROBLEMA DIOPHANTAEVM SINGVLARE.

Auctore

L. EVLERO.

## Problema.

Inuenire duos numeros, quorum productum vtrovis ſiue auctum ſiue minutum fiat quadratum.

## Solutio.

§. 1. Cum ambo numeri quaeſiti neceſſario ſint fracti, ponatur vna $\frac{x}{z}$ et altera $\frac{y}{z}$ et conditiones Problematis poſtulant, vt ſit

$$1^\circ.\ \frac{xy}{zz} \pm \frac{x}{z} = \square. \quad 2^\circ.\ \frac{xy}{zz} \pm \frac{y}{z} = \square$$

quae ergo formulae etiam per $zz$ multiplicatae debent eſſe quadrata; vnde hae conditiones ſuut adimplendae

$$1^\circ.\ xy \pm xz = \square$$

$$2^\circ.\ xy \pm yz = \square.$$

§. 2. Cum iam ſit $aa + bb \pm 2ab = \square$ ex hoc fonte ſolutionem peti conueniet, quia autem duae huiusmodi conditiones proponuntur, ponamus duplici modo eſſe tam $xy = aa + bb$ quam $xy = cc + dd$, ita

ita vt ſit $aa + bb = cc + dd$, id quod infinitis modis euenire poteſt, vnde pro priore conditione faciamus $xz = 2ab$ et $yz = 2cd$, quo pacto ambae conditiones adimplentur, quare cum inde habeamus

$$x = \frac{2ab}{z} \quad \text{et } y = \frac{2cd}{z}$$

erit nunc

$$xy = \frac{4abcd}{zz} = aa + bb = cc + dd,$$

vnde deducimus

$$zz = \frac{4abcd}{aa+bb} \text{ ſiue } \frac{zz}{4} = \frac{abcd}{aa+bb}$$

ita vt haec formula $\frac{abcd}{aa+bb}$ reddi debeat quadratum, praeterea vero etiam neceſſe eſt vt ſit

$$cc + dd = aa + bb.$$

§. 3. Incipiamus ab hac poſtrema conditione, ac denotent literae $m$ et $n$ eiusmodi numeros, vt ſit $mm + nn = 1$, id quod facile praeſtatur, ac capiatur

$$c = ma + nb \text{ et } d = na - mb$$

tum enim erit

$$cc + dd = (aa + bb)(mm + nn) = aa + bb$$

hinc igitur altera conditio poſtulat vt ſit

$$\frac{zz}{4} = \frac{ab((ma + nb)(na - mb))}{aa + bb} = \square$$

vel etiam

$$\frac{zz}{4} = \frac{ab(am + bn)(bm - an)}{aa + bb}$$

quandoquidem poſtremus factor $bm - an$ idem dat quadratum ac praecedens $(na - mb)$.

§. 4. Notum autem eſt literis $m$ et $n$ hos valores tribui debere

$$m = \frac{pp - qq}{pp + qq} \quad \text{et} \quad n = \frac{2pq}{pp + qq}$$

tum enim fit $mm + nn = 1$, hinc autem erit

$$am + bn = \frac{a(pp - qq) + 2bpq}{pp + qq} \quad \text{et} \quad bm - an = \frac{b(pp - qq) - 2apq}{pp + qq},$$

quae formulae in ſe inuicem multiplicatae praebent:

$$ab(pp - qq)^2 + \frac{2(bb - aa)pq(pp - qq)}{(pp + pp)^2} - \frac{4abppqq}{(pp + qq)^2}$$

cuius fractionis numeratorem breuitatis gratia deſignemus litera S, ita vt ſit

$$S = abp^4 + 2(bb - aa)p^3q - 6abppqq - 2(bb - aa)pq^3 + abq^4$$

quo valore notato erit

$$\frac{zz}{4} = \frac{abS}{(aa + bb)(pp + qq)^2} \quad \text{ſiue}$$

$$\tfrac{1}{4}(aa + bb)(pp + qq)^2 zz = abS.$$

§. 5. Hinc igitur facta ſubſtitutione erit

$$abS = aabbp^4 - 2ab(aa - bb)p^3q - 6aabbppqq + 2ab(aa - bb)pq^3 + aabbq^4$$

quae formula, cum tam primum quam poſtremum membrum ſint quadrata, commode ad quadratum reduci poterit, ita vt litteris $a$ et $b$ pro lubitu aſſumtis valores idonei pro $p$ et $q$ erui poſſint, tum vero vt etiam formula

$$\tfrac{1}{4}(aa + bb)(pp + qq)^2 zz$$

fiat quadratum: neceſſe eſt litteras $a$ et $b$ ita aſſumi vt $aa + bb$ fiat quadratum, quo facto radicem quadratam extrahendo habebitur:

$$\tfrac{1}{2}(pp + qq)z\sqrt{aa + bb} = \sqrt{abS}.$$

§. 6.

§. 6. Statuamus igitur ſecundum praecepta cognita

$$\sqrt{abS} = abpp - (aa - bb)pq + abqq$$

tum autem erit

$$abS = aabbp^4 - 2ab(aa-bb)p^3q + 2aabbppqq - 2ab(aa-bb)pq^3 + aabbq^4$$
$$+ (aa-bb)^2 ppqq$$

quod quadratum ſi cum formula ſuperiori comparetur, membra prima, ſecunda et vltima ſe mutuo tollunt, reliqua vero per $pqq$ diuiſa hanc ſuppeditant aequationem

$$-6aabbp + 2ab(aa-bb)q = 2aabbp - 2ab(aa-bb)q + (aa-bb)^2 p$$

quae reducitur ad hanc formam

$$4ab(aa-bb)q = (a^4 + 6aabb + b^4)p$$

vnde concluditur $\frac{q}{p} = \frac{a^4 + 6aabb + b^4}{4ab(aa-bb)}$ quae fractio ſi deprimi nequeat, quod quidem nunquam euenire poteſt, ponatur

$$p = 4ab(aa-bb) \text{ et } q = a^4 + 6aabb + b^4.$$

§. 7. Sumtis igitur numeris $a$ et $b$ ita vt $aa + bb$ fiat quadratum, hae formulae nobis praebent idoneos valores pro literis $p$ et $q$, quibus inventis erit

$$\tfrac{1}{2}(pp + qq)z\sqrt{aa+bb} = \sqrt{abS} = abpp - (aa-bb)pq + abqq$$

hincque

$$z = \frac{2\sqrt{abS}}{(pp+qq)\sqrt{aa+bb}}$$

tum vero ipſi numeri quaeſiti erunt

$$\frac{x}{z} = \frac{2ab}{zz} \text{ et } \frac{y}{z} = \frac{2cd}{zz} = \frac{2(ma+nb)(na-mb)}{zz}$$

 vbi

vbi litteris $m$ et $n$ hi tributi ſunt valores

$$m = \frac{pp - qq}{pp + qq} \text{ et } n = \frac{2pq}{pp + qq}:$$

hic perinde eſt ſiue valor poſterior prodeat negatiuus ſiue poſitiuus, ſemper enim poſitiuus locum habebit valor, quandoquidem terminus $yz$ producto $xy$ tam addi quam ſubtrahi debet.

§. 8. Quia $aa + bb$ debet eſſe quadratum, caſus ſimpliciſſimus quo hoc contingit eſt $a = 4$ et $b = 3$, tum enim erit

$$\sqrt{aa + bb} = 5,\ ab = 12 \text{ et } aa - bb) = 7,$$

ex his igitur porro deducimus

$p = 336$, $q = 1201$, deinde $\sqrt{abS} = 12(pp + qq) - 7pq$, hincque

$$z = \frac{24(pp + qq) - 14pq}{5(pp + qq)} = \frac{24}{5} - \frac{14pq}{5(pp + qq)}$$

denique vero pro $y$ inueniendo erit

$$(ma + nb) = \frac{4(pp - qq) + 6pq}{pp + qq} \text{ et } (mb - na) = \frac{3(pp - qq) - 8pq}{pp + qq},$$

quibus valoribus ſubſtitutis erit

$$\frac{x}{z} = \frac{24}{zz} \text{ et } \frac{y}{z} = \frac{2(4m + 3n)(4n - 3m)}{zz}$$

pro his formulis autem euoluendis notetur eſſe:

$$pp = 112896,\ qq = 1442401,\ pq = 403536$$

vnde elicitur

$pp + qq = 1555297$, $\frac{5z}{2} = \frac{15838812}{1555297}$ hinc $z = \frac{2 \cdot 15838812}{5 \cdot 1555297}$ porro $m = -\frac{1329505}{1555297}$, $n = \frac{807072}{1555297}$ vnde fit $4m + 3n = -\frac{2896804}{1555297}$ et $4n - 3m = \frac{7217803}{1555297}$ hinc ergo colligimus $\frac{x}{z} = \frac{6 \cdot 25(1555297)^2}{(15838812)^2}$ et $\frac{y}{z} = \frac{2896804 \cdot 25 \cdot 7217803}{2 \cdot 15838812^2}$.

§. 9.

§. 9. Cum hi numeri ſint tam immenſi; accuratius inquiramus, an non ſolutionem in numeris minoribus eruere liceat, et quo calculum paulisper contrahamus, incipiamus ab aequatione

$$\frac{zz}{4} = \frac{ab(am+bn)(bm-an)}{aa+bb}, \text{ vbi eſt}$$

$$m = \frac{pp-qq}{pp+qq} \text{ et } n = \frac{2pq}{pp+qq}$$

haecque formula quadratum efficienda tam negatiue quam poſitiue accipi poteſt; ſtatuamus iam $a = nb$ et $p = qr$ vt primo ſit

$$m = \frac{rr-1}{rr+1} \text{ et } n = \frac{2r}{rr+1},$$

tum vero haec formula ad quadratum reduci debeat

$$\tfrac{1}{4}zz \pm \frac{nbb((n(rr-1)+2r)(rr-1-2nr))}{(nn+1)(rr+1)^2} \text{ ſiue } \frac{zz(rr+1)^2}{4bb}$$

$$= \pm \frac{n((n(rr-1)+2r)(rr-1-2nr)}{nn+1} = \square,$$

hic autem primo obſeruamus caſu $r = 1$ hanc formulam euadere $= -\frac{4nn}{nn+1}$, ſiue etiam $+\frac{4nn}{nn+1}$ quae ergo erit quadratum dummodo $nn+1$ fuerit quadratum, praeterea vero notaſſe iuuabit, ſumto $r = n$ hanc formulam fieri

$$= -nn(nn+1)$$

cuius negatiuum iterum ſit quadratum, ſi modo $nn+1$ ſit quadratum, cum igitur duos iam habeamus caſus, quibus haec formula ſit quadratum, ex iis alios caſus ſecundum praecepta cognita eliciamus.

## Euolutio prima.

§. 10. Cum vtroque caſu $nn+1$ debeat eſſe quadratum ponamus:

$$\frac{zz(rr+1)^2(nn+1)}{4bb} = TT \text{ vt ſit}$$

$$TT = n((2r + n(rr - 1)(2nr - (rr - 1))$$

quae formula quia euadit quadratum poſito $r = 1$, ſtatuamus

$r = 1 + v$ eritque $rr - 1 = 2v + vv$ vnde oritur

$$TT = n((2 + 2(n+1)v + nvv)(2n(n-1)v - vv))$$

quae formula euoluta praebet

$$TT = 4nn + 4n(nn+2n-1)v + 4n(nn-1)vv + 2n(nn-2n-1)v^3 - nnv^4$$

ſtatuatur ergo

$T = 2n + (nn + 2n - 1)v + fvv$, ideoque

$$TT = 4nn + 4n(nn+2n-1)v + (nn+2n^2-1)^2 vv + 2f(nn+2n-1)v^3$$
$$+ ffv^4 + 4nfvv$$

vbi duo membra priora mutuo ſe tollunt, capiamus igitur $f$ ita, vt etiam tertia membra ſe deſtruant, vnde fieri debet

$4n(nn - 1) = (nn + 2n - 1)^2 + 4nf$ ſiue

$-n^4 - 2nn - 1 = -(nn + 1)^2 = 4nf$ ideoque

$f = -\frac{(nn+1)^2}{4n}$;

iam cognito valore $f$ reliqua membra per $v^3$ diuiſa dant

$$2n(nn - 2n - 1) - nnv = 2f(nn + 2n - 1) = ffv$$

vnde colligitur

$$v = \frac{2n(nn - 2n - 1) - 2f(nn + 2n - 1)}{ff + nn}$$

hinc autem valor ipſius $v$ multo magis fieret complicatus, quia in hac formula numerus $n$ ad octauam poteſtatem exſurgit.

Euolu-

## Euolutio ſecunda.

§. 11. Ponamus nunc $r = n + v$, eritque

$$TT = n((n(nn+1) + 2(nn+1)v + nvv)(nn+1-vv),$$

ideoque euoluendo

$$TT = nn(nn+1)^2 + 2n(nn+1)^2 v - 2n(nn+1)v^3 - nnv^4.$$

Ponatur igitur

$$T = n(nn+1) + (nn+1)v + fv^2,$$

cuius quadratum dat

$$TT = nn(nn+1)^2 + 2n(nn+1)^2 v + 2n(nn+1)fvv + 2(nn+1)fv^3 + ffv^4 + (nn+1)^2 vv$$

vbi duo membra priora iam ſe deſtruunt, vt igitur etiam termini $vv$ ſe deſtruant ſumi debet $f = -\frac{(nn+1)}{2n}$, tum vero bina membra poſteriora per $v^3$ diuiſa praebent

$-2n(nn+1) - nnv = 2(nn+1)f + ffv$ vnde fit

$$v = -\frac{2n(nn+1) - 2(nn+1)f}{ff+nn}$$

quae formula loco $f$ valorem ſubſtituendo praebet:

$$v = \frac{-4n(nn+1)(n-1)}{5n^4 + 2nn + 1}$$

vnde fit

$r = \frac{n(n^4 + 2nn + 5)}{5n^4 + 2nn + 1} = \frac{p}{q}$ hinc cum ſit $n = \frac{a}{b}$ erit

$p = a^4 + 2aabb + 5b^4$ et $q = 5a^4 + 2aabb + b^4$.

§. 12. Quod ſi ergo hic vt ſupra ſumatur $a = 4$ et $b = 3$, reperietur

$p = 949 = 13 \cdot 73$ et $q = 1649 = 97 \cdot 17$

qui numeri cum ſint maiores iis, quos ſupra inue-

nimus

nimus, videntur maiores numeros quaeſitos producere; quia autem vterque eſt impar, reductio quaepiam locum inueniet: interim tamen ad numeros minores non peruenitur.

§. 13. Si formulae hic pro TT inuentae ſigna inuertamus vt prodeat:

$$TT = nnv^4 + 2n(nn+1)v^3 - 2n(nn+1)^2v - nn(nn+1)^2$$

ac ponamus

$$T = nvv + (nn+1)v + f,$$

erit ſumto quadrato

$$TT = nnv^4 + 2n(nn+1)v^3 + 2nfvv + 2(nn+1)fv + ff + (nn+1)^2vv$$

vbi prima et ſecunda membra ſe deſtruunt, ac pro tertiis fiat $f = -\frac{(nn+1)^2}{2n}$, iam inuento hoc valore fiat etiam

$$v = \frac{ff + nn(nn+1)^2}{-2n(nn+1)^2 - 2f(nn+1)}$$

et ſubſtituto pro $f$ valor inuentus $-\frac{(nn+1)^2}{2n}$ reperitur $v = \frac{5n^4+2nn+1}{4n(1-nn)}$, hincque porro

$r = \frac{n^4+6nn+1}{4n(1-nn)} = \frac{p}{q}$, quia igitur $n = \frac{a}{b}$ erit

$\frac{p}{q} = \frac{a^4+6aabb+b^4}{4ab(bb-aa)}$.

Quae ſolutio eosdem praebet valores, quos per primam euolutionem eruimus, ex quo concludi poſſe videtur, ſimpliciores ſolutiones huius Problematis vix expectari poſſe.

§. 14.

§. 14. Imprimis autem hic caſus omni attentione dignus occurrit, quo $v = o$, vbi formula $TT$ ſponte fit quadratum, ſcilicet $nn(nn+1)^2$ ita vt hoc caſu prodeat

$$\frac{zz(rr+1)^2(nn+1)}{4bb} = nn(nn+1)^2$$

ſeu radice quadrata extracta

$$\frac{z(rr+1)\sqrt{nn+1}}{2b} = n(nn+1);$$

cum autem ſit $v = o$, ob $r = n + v$ erit $r = n$ vnde colligitur

$$z = \frac{2bn(nn+1)}{(nn+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2bn}{\sqrt{nn+1}} = \frac{2ab}{\sqrt{aa+bb}},$$

porro ob $r = n = \frac{a}{b}$ erit $p = a$ et $q = b$, $c = ma + nb$ et $d = na - mb$ exiſtente

$$m = \frac{aa - bb}{aa + bb} \text{ et } n = \frac{2ab}{aa + bb}$$

quocirca erit $c = a$ et $d = b$, vnde bini numeri quaeſiti erunt,

vnus $= \frac{x}{z} = \frac{2ab}{zz} = \frac{aa+bb}{2ab}$; alter $\frac{y}{z} = \frac{2cd}{zz} = \frac{aa+bb}{2ab}$,

ita vt ambo noſtri numeri ſint inter ſe aequales, meminiſſe autem oportet formulam $aa + bb$ quadratum eſſe debere.

§. 15. Quanquam autem haec ſolutio ſatis eſt ſimplex, tamen indoli quaeſtionis propoſitae minus ſatisfacere eſt cenſenda, propterea quod duos numeros aequales exhibet, cum noſtrum Problema manifeſto duos numeros inaequales poſtulet, interim tamen deducimur ad ſolutionem huius quaeſtionis: *In-*

*venire numerum quadratum, qui radice ſua ſiue auctus ſiue minutus producat quadratum.*

Quod ſi ergo radix huius quadrati vocetur $= z$, erit vti modo inuenimus $z = \frac{aa + bb}{2ab}$, dummodo $aa + bb$ fuerit quadratum, capiatur ergo $a = pp - qq$ et $b = 2pq$, vt fiat $aa + bb = (pp + qq)^2$, hincque ſolutio noſtra praebet $z = \frac{(pp + qq)^2}{4pq(pp - qq)}$, vnde pro $z$ ſequentes valores ſimpliciores eruuntur
I°. $\frac{25}{24}$, II°. $\frac{169}{120}$, III°. $\frac{289}{240}$, IV°. $\frac{625}{336}$, V°. $\frac{841}{840}$, VI°. $\frac{1681}{720}$ etc.

§. 16. Etſi autem hic caſus parum ad propoſitum noſtrum conferre videtur, tamen eius conſideratio attenta mox eiusmodi binos numeros ſuppeditauit ipſi Problemati propoſito ſatisfacientes, cuiusmodi ſunt hi duo numeri

$$A = \frac{841}{840} \quad \text{et} \quad B = \frac{1369}{840}$$

tum enim erit

$$AB \pm A = A(B \pm 1), \text{ vbi}$$

$$B + 1 = \frac{2209}{840} = \frac{47^2}{840} \quad \text{et} \quad B - 1 = \frac{529}{840} = \frac{23^2}{840}$$

vterque autem valor in $A = \frac{29^2}{840}$ ductus manifeſto praebet quadrata: Eodem modo reliquae conditiones $AB \pm B = B(A \pm 1)$ ob $A + 1 = \frac{1681}{840} = \frac{41^2}{840}$ et $A - 1 = \frac{1}{840}$ vtraque in $B = \frac{37^2}{840}$ ducta pariter quadrata exhibent.

§. 17. Nunc igitur multo magis mirari oportet, cur iſtam ſolutionem ſatis ſimplicem ex analyſi ſupra allata nullo modo elicere licuerit, quin etiam hi duo numeri nequidem in formulis noſtris ſupra vſurpatis ſcilicet $\frac{x}{z} = \frac{2ab}{zz}$ et $\frac{y}{z} = \frac{2cd}{zz}$ contineri videntur, cum noſtri numeratores in

factores

factores reſolui nequeant, denominatores autem non ſint quadrata, hac autem circumſtantia probe perpenſa, facile agnoſcimus, ſolutionem problematis noſtri longe alio modo eſſe aggrediendam, vt huiusmodi ſolutiones ſimpliciores eliciamus, atque hinc clare perſpicimus, quanti ſit momenti huiusmodi Problemata idoneo modo ad calculum reuocare, hancque ob rem ſequentem ſolutionem ſatis planam hic ſubiungamus.

## Solutio plana Problematis propoſiti.

§. 18. Denotent litterae A et B binos numeros quaeſitos, ita vt hae formulae

$$AB \pm A = A(B \pm 1) \text{ et } AB \pm B = B(A \pm 1)$$

debeant eſſe quadrata; hunc in finem tribuamus his numeris ſequentes formas

$$A = \frac{aa+bb}{2ab} \text{ et } B = \frac{cc+dd}{2cd},$$

ſic enim prodibit

$$A \pm 1 = \frac{(a \pm b)^2}{2ab} \text{ et } B \pm 1 = \frac{(c \pm d)^2}{2cd}$$

quare vt ambae illae formulae fiant quadrata, pro priore neceſſe eſt, vt ſit $\frac{cc+dd}{4abcd}$ quadratum, pro altera autem, vt haec forma $\frac{aa+bb}{4abcd}$ ſit quadratum.

§. 19. Quo igitur his conditionibus ſatisfaciamus, ſtatuamus tam

$$aa+bb = \square \text{ et } cc+dd = \square,$$

tum vero neceſſe eſt vt etiam productum $abcd$

fiat quadratum, quae quidem poſitio iam eſt limitata, dum iſtis conditionibus etiam aliis modis ſatisfieri poſſet, at vero ſimpliciſſimas ſolutiones ſuppeditare videtur: Hunc igitur in finem ponamus

$$a = pp - qq,\ b = 2pq,\ c = rr - ss \text{ et } d = 2rs$$

vt fiat

$$aa + bb = (pp + qq)^2 \text{ et } cc + dd = (rr + ss)^2$$

ita vt ſit

$$A = \frac{(pp + qq)^2}{4pq(pp - qq)} \text{ et } B = \frac{(rr + ss)^2}{4rs(rr - ss)}$$

tum vero ſupereſt vt

$$abcd = 2pq(pp - qq).\ 2rs(rr - ss),$$

ſiue haec formula

$$pq(pp - qq).\ rs(rr - ss)$$

fiat quadratum, hic vero caſus manifeſto ad problema ſatis notum deducitur, quo duo triangula rectangula in numeris quaeruntur, quorum areae ſint inter ſe aequales; quaeruntur igitur duo numeri, vterque formae $xy(xx - yy)$ quorum productum ſit quadratum, vnde in ſequenti Tabella ſimpliciores numeros huius formae exhibeamus per factores expreſſos, vbi quidem factores quadratos omittamus:

| $x$ | $y$ | $xy(x+y)(x-y)$ |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 2. 3 |
| 3 | 2 | 2. 3. 5 |
| 4 | 1 | 3. 5 |
| 4 | 3 | 3. 7 |
| 5 | 2 | 2. 3. 5. 7 |
| 5 | 4 | 5 |
| 6 | 1 | 2. 3. 5. 7 |
| 6 | 5 | 2. 3. 5. 11 |
| 7 | 2 | 2. 5. 7 |
| 7 | 4 | 3. 7. 11 |
| 7 | 6 | 2. 3. 7. 13 |
| 8 | 1 | 2. 7 |
| 8 | 3 | 2. 3. 5. 11 |
| 8 | 5 | 2. 3. 5. 13 |
| 8 | 7 | 2. 3. 5. 7 |
| 9 | 2 | 2. 7. 11 |
| 9 | 4 | 5. 13 |
| 10 | 1 | 2. 5. 11 |
| 10 | 3 | 2. 3. 5. 7. 13 |
| 11 | 2 | 2. 11. 13 |
| 11 | 4 | 3. 5. 7. 11 |
| 11 | 10 | 2. 3. 5. 7. 11 |
| 12 | 1 | 3. 11. 13 |
| 13 | 2 | 2. 3. 5. 11. 13 |
| 13 | 8 | 2. 3. 5. 7. 13 |
| 13 | 12 | 3. 13 |
| 14 | 1 | 2. 3. 5. 7. 13 |
| 14 | 11 | 2. 3. 7. 11 |
| 14 | 13 | 2. 3. 7. 13 |

§. 20. Haec tabula nobis iam aliquot ſolutiones ſuppeditat, quarum prima et ſimpliciſſima oritur ſumendo $p = 5$, $q = 2$, et $r = 6$, $s = 1$ vnde oritur

$$A = \frac{29^2}{840} = \frac{841}{840} \quad \text{et} \quad B = \frac{37^2}{840} = \frac{1369}{840}$$

qui ſunt ipſi numeri ſupra memorati; in noſtra autem tabella occurrunt quoque iſti numeri $x = 8$ et $y = 7$ eosdem factores 2. 3. 5. 7 continentes, hinc igitur formemus numerum

$$C = \frac{(xx + yy)^2}{4xy(xx - yy)} \text{ erit } C = \frac{113^2}{3360} \text{ vbi } 3360 = 4 \cdot 840$$

quemadmodum igitur ambo numeri A et B quaeſito ſatisfecerunt, ita etiam hi duo numeri A et C eodemque modo etiam iſti B et C ſeorſim ſatisfacient.

§. 21. Porro etiam iidem factores 2. 3. 5. 11 reperiuntur caſibus $x = 6$ et $y = 5$ item $x = 8$ et $y = 3$ ſumtis ergo $p = 6$, $q = 5$, $r = 8$ et $s = 3$, naſcuntur iſti numeri ſatisfacientes

$$A = \frac{61^2}{1320} \text{ et } B = \frac{73^2}{5280} \text{ vbi } 5280 = 4 \cdot 1320$$

ſimili modo inſuper plures alias ſolutiones ex tabula iſta peti licet.

§. 22. Quo autem plures huiusmodi ſolutiones exhibere queamus, faciamus

$$pq(pp - qq) = rs(rr - ss)$$

quod cum in genere non niſi operoſe effici queat, caſum magis particularem accipiamus et ſtatuamus $r = p$, vt fieri debeat

$$q(pp - qq) = s(pp - ss),$$

vnde

vnde elicimus

$$pp = qq + qs + ss,$$

quare ſtatuamus $p = q + \frac{m}{n} s$, vt fiat

$$q + \frac{2mq}{n} + \frac{mms}{nn} \text{ ſiue } nnq + nns = 2mnq + mms,$$

vnde colligitur $\frac{q}{s} = \frac{mm - nn}{nn - 2mm}$: Sumamus igitur

$$q = mm - nn \text{ et } s = nn - 2mn \text{ eritque}$$

$$p = r = mm - nn + mn - 2mm = -mm - nn + mn,$$

vbi litteras $m$ et $n$ pro lubitu tam negatiuas quàm poſitiuas accipere licet; haec ergo ſolutio ita ſe habebit: Sumto numero $n$ negatiuo habebimus

$$p = mm + mn + nn \quad \Big\| \quad r = mm + mn + nn$$
$$q = mm - nn \quad \Big\| \quad s = nn + 2mn$$

vnde iam innumerabiles ſolutiones naſcuntur, inde vero habebitur

$$a = pp - qq, \quad b = 2pq, \quad c = rr - ss \quad \text{et} \quad d = 2rs$$

vnde numeri quaeſiti reperientur

$$A = \frac{(pp + qq)^2}{4pq(pp - qq)} = \frac{aa + bb}{2ab} \text{ et } B = \frac{cc + dd}{2cd} = \frac{(rr + ss)^2}{4rs(rr - ss)}.$$

§. 23. Cum haec ſolutio tantopere diſcrepet a prima, quam dedimus, operae pretium erit inueſtigare, quomodo haec etiam in illa contineatur. Poſueramus autem ipſos numeros quaeſitos $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, tum vero ſtatuimus

$$xy = aa + bb = cc + dd$$

hinc vero deduximus $\frac{zz}{4} = \frac{abcd}{aa + bb}$ ita vt eſſe debeat primo

$$aa + bb = cc + dd, \text{ tum vero } \frac{abcd}{aa + bb} = \square;$$

iam

iam tribuamus tam litteris $a$ et $b$, quam $c$ et $d$ communem factorem et ſtatuamus $a = fp$ et $b = fq$ tum vero $c = gr$ et $d = gs$, eritque

$$aa + bb = ff(pp + qq) \text{ et } cc + dd = gg(rr + ss),$$

quae formulae cum ſibi debeant aequari, fiat

$$pp + qq = gg \text{ et } rr + ss = ff$$

ſic enim fiet $xy = ffgg$, praeterea vero eſſe debebit

$$\tfrac{1}{4} zz = \frac{ffpq \cdot ggrs}{ffgg} \text{ ſiue } \tfrac{1}{4} zz = pqrs = \square:$$

Quamobrem ſtatuamus

$$p = \alpha\alpha - \beta\beta,\ q = 2\alpha\beta \text{ atque } r = \gamma\gamma - \delta\delta \text{ et } s = 2\gamma\delta$$

vt fiat

$$pp + qq = (\alpha\alpha + \beta\beta)^2 = gg \text{ et } rr + ss = (\gamma\gamma + \delta\delta)^2 = ff$$

vnde erit

$$f = \gamma\gamma + \delta\delta \text{ et } g = \alpha\alpha + \beta\beta$$

et nunc habebitur

$$\tfrac{1}{4} zz = 4\alpha\beta(\alpha\alpha - \beta\beta) \cdot \gamma\delta(\gamma\gamma - \delta\delta),$$

ita vt hoc productum

$$\alpha\beta(\alpha\alpha - \beta\beta) \cdot \gamma\delta(\gamma\gamma - \delta\delta)$$

debeat eſſe quadratum, quae eſt eadem formula quam in ſolutione poſteriore quadratum efficere debuimus. Cui conditioni quando erit ſatisfactum, numeri quaeſiti ita ſe habebunt:

$$\frac{x}{z} = \frac{2ab}{zz} = \frac{aa + bb}{2cd} = \frac{cc + dd}{2cd}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{2cd}{zz} = \frac{aa + bb}{2ab}.$$

quae ſunt eaedem formulae, quibus ſolutio poſterior eſt ſuperſtructa.

§. 24.

§. 24. Hic etiam generalius potuiſſemus ſtatuere

$$pp + qq = Ngg \text{ et } rr + ss = Rff$$

vnde fit

$$xy = aa + bb = cc + dd = Nffgg$$

tum vero vt ante debet eſſe

$$\frac{zz}{4} = \frac{ffgg \cdot pqrs}{Nffgg} = \frac{pqrs}{N}$$

ita vt debeat eſſe $\frac{pqrs}{N}$ ſiue $Npqrs = \square$;

ſumamus exempli gratia $N = 5$ et cum eſſe debeat

$$5(pp + qq) = 25gg = (2p - q)^2 + (p + 2q)^2$$

ſumamus

$$2p - q = \alpha\alpha - \beta\beta \text{ et } p + 2q = 2\alpha\beta$$

ac reperietur

$$p = \frac{2(\alpha\alpha + \alpha\beta - \beta\beta)}{5},\ q = \frac{4\alpha\beta - \alpha\alpha + \beta\beta}{5}$$

ſimili modo quia debet eſſe $5rr + ss = 25ff$, habebitur

$$r = \frac{2(\gamma\gamma + \gamma\delta - \delta\delta)}{5} \text{ et } s = \frac{4\gamma\delta - \gamma\gamma + \delta\delta}{5}$$

et iam ſupereſt vt $5pqrs$ reddatur quadratum, ſimilique modo ſolutionem generaliorem reddere licebit.

§. 25. Quoniam autem ſolutio noſtri problematis perducta eſt ad inuentionem duorum triangulorum rectangulorum, quorum areae inter ſe teneant rationem quadraticam, adiungamus hic aliquot ſolutiones quaeſtionis latius patentis, quo ſcilicet quaeruntur duo triangula rectangula, quorum areae datam inter ſe teneant rationem puta vt $\alpha$ et $\beta$ ita vt eſſe debeat $pq(pp - qq) : rs(rr - ss) = \alpha : \beta$.

 Cui

Cui conditioni ſatisfiet ſequentibus octo formulis

| | $p$ | $q$ | $r$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|
| I. | $\alpha+\beta$ | $2\alpha-\beta$ | $\alpha+\beta$ | $2\beta-\alpha$ |
| II. | $3\alpha$ | $2\beta-\alpha$ | $3\beta$ | $2\alpha-\beta$ |
| III. | $2\alpha+\beta$ | $\beta-\alpha$ | $\alpha+2\beta$ | $\beta-\alpha$ |
| IV. | $\alpha+2\beta$ | $3\beta$ | $3\beta$ | $\beta+2\alpha$ |
| V. | $\beta-2\alpha$ | $6\alpha$ | $2\beta+4\alpha$ | $\beta+4\alpha$ |
| VI. | $\beta+4\alpha$ | $\beta-8\alpha$ | $3\beta$ | $8\alpha-\beta$ |
| VII. | $\beta+2\alpha$ | $6\alpha$ | $2\beta+4\alpha$ | $\beta-4\alpha$ |
| VIII. | $\beta+8\alpha$ | $\beta-4\alpha$ | $3\beta$ | $8\alpha+\beta$ |

Vbi notaſſe iuuabit, ſi qui horum numerorum prodeant negatiui, eos tuto in poſitiuos verti poſſe, tum vero pro vtroque triangulo maiores numeros literis $p$ et $r$; minores vero literis $q$ et $s$ tribui oportere.

§. 26. Pro noſtro igitur Problemate tantum opus eſt, vt loco $\alpha$ et $\beta$ numeri quadrati accipiantur, id quod exemplo illuſtraſſe ſufficiet.

Sumamus igitur $\alpha = 9$ et $\beta = 4$ ac ſequentes octo ſolntiones obtinebuntur:

| | | |
|---|---|---|
| I°. | $p=14$, $q=13$ | $r=13$ et $s=1$ |
| II°. | $p=27$, $q=1$ | $r=14$ et $s=12$ |
| III°. | $p=22$, $q=1$ | $r=17$ et $s=5$ |
| IV°. | $p=23$, $q=21$ | $r=22$ et $s=12$ |
| V°. | $p=54$, $q=14$ | $r=40$ et $s=28$ |
| VI°. | $p=68$, $q=40$ | $r=68$ et $s=12$ |
| VII°. | $p=54$, $q=22$ | $r=44$ et $s=32$ |
| VIII°. | $p=76$, $q=32$ | $r=76$ et $s=12$. |

Quae

Quae ſolutiones ob communes diuiſores reducuntur ad ſequentes ſimpliciores:

| | | |
|---|---|---|
| I°. | $p=14$, $q=13$ | $r=13$ et $s=1$ |
| II°. | $p=27$, $q=1$ | $r=14$ et $s=12$ |
| III°. | $p=22$, $q=1$ | $r=17$ et $s=5$ |
| IV°. | $p=23$, $q=21$ | $r=22$ et $s=12$ |
| V°. | $p=27$, $q=7$ | $r=20$ et $s=14$ |
| VI°. | $p=17$, $q=10$ | $r=17$ et $s=3$ |
| VII°. | $p=27$, $q=11$ | $r=22$ et $s=16$ |
| VIII°. | $p=19$, $q=8$ | $r=19$ et $s=3$ |

hinc igitur facile quotcunque ſolutiones deſiderentur deducere licet.

# DE TABVLA NVMERORVM PRIMORVM, VSQVE AD MILLIONEM ET VLTRA CONTINVANDA; IN QVA SIMVL OMNIVM NVMERORVM NON PRIMORVM MINIMI DIVISORES EXPRIMANTVR.

Auctore

*L. EVLERO.*

§. 1.

Si omnes numeros, ab vnitate vsque ad millies mille ordine recenſere, et vnicuique ſuum diuiſorem, vel notam numeri primi adſcribere vellemus: tam labor quam volumen, huiusmodi tabulas continens, in immenſum excreſceret; quamobrem conveniet, omnes eos numeros, quorum diuiſores minimi ſponte patent, prorſus praetermittere, vnde non ſolum omnes numeros pares ſed etiam eos, qui vel per 3 vel per 5 ſunt diuiſibiles, excludemus, quippe quorum minimi diuiſores ſponte ſe produnt. Alios igitur numeros in noſtram tabulam non referemus praeter primos, niſi quorum minimi diuiſores ſint vel 7 vel 11 vel 13 vel alii numeri primi maiores; cuiusmodi numeri vsque ad triginta ſunt tantum octo iſti:

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.

§. 2.

§. 2. Omnes ergo numeri, quos in noſtram tabulam referemus, in hac forma generali $3qq + rr$ erunt contenti, vbi $r$ denotat octo illos numeros modo memoratos, pro $q$ vero ſucceſſiue ſcribamus omnes plane numeros naturales 0, 1, 2, 3, 4 etc. donec valor formulae $30q$ vsque ad vnum millionem excreſcat, quod fit, ſumendo $q = 33333$ vel etiam vltra, ſi limitem vnius millionis transgredi voluerimus.

§. 3. Quod ſi iam talem tabulam in quarto expedire voluerimus; in qualibet pagina commode poterimus quinquaginta valores litterae $q$ in prima cuiusque columna a ſummo ad imum deſcendendo exprimere, cui dextrorſum octo columnas adiungemus pro octo valoribus litterae $r$ ſicque tantum opus erit ſingulis areolis in octo iſtis columnis, quae cuilibet valori litterae $q$ reſpondent, vel minimos diuiſores numeri $30q + r$ vel notam numeri primi, quae nobis erit littera $p$, inſcribere; ſic enim propoſito quocunque numero N diuidatur ille per 30 et quotus ex diuiſione reſultans ſit $= q$ reſiduum vero reſtans $= r$, tum hi numeri $q$ et $r$ in noſtris tabulis quaerantur et areola vtrique conueniens oſtendet minimum diuiſorem huius numeri N vel characterem $p$, ſi fuerit numerus primus.

§. 4. Si ſingulae igitur paginae contineant quinquaginta valores litterae $q$, quibus octo memoratae columnae ſint adiunctae, quaelibet pagina extendetur ad $30. 50 = 1500$ numeros ſicque vsque ad vnum millionem opus erit 666 paginis, quare

cum vna ſcheda in quarto praebeat octo paginas, numerus ſchedarum erit 83 circiter, vnde naſcitur volumen non nimis magnum et aliquot calculatores ſufficient ad totum opus breui temporis ſpatio exſequendum.

§. 5. Singulae igitur paginae huius operis ita erunt diſpoſitae, vti ſpecimen annexum oſtendit, in quo primam paginam repraeſentamus, cuius prima columna litterae *q* ſubiacens eius valores a 0 vsque ad 49 exhibet, cui ad dextram adiunctae ſunt octo illae columnae in fronte gerentes totidem reſidua 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, tum vero ſimili modo ſequens pagina in prima columna continebit numeros 50. 51 . . . . . 99 tertia vero a 100 vsque ad 149 etc. vbi ſemper octo columnae ſequentes eadem octo reſidua referunt ſicque totum negotium huc redit, vt in ſingulas areolas, quarum quaelibet pagina continet 400, vel diuiſores debitos vel litteram *p* vtpote notam numeri primi inſeramus, quem infinem ſequentia ſubſidia explicare neceſſe erit.

| *q* | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | *p* | *p* | *p* | *p* | *p* | *p* | *p* |
| 1 | *p* | *p* | *p* | *p* | *p* | 7 | *p* | *p* |
| 2 | *p* | *p* | *p* | *p* | 7 | *p* | *p* | *p* |
| 3 | 7 | *p* | *p* | *p* | *p* | *p* | *p* | 7 |
| 4 | 11 | *p* | *p* | 7 | *p* | *p* | 11 | *p* |
| 5 | *p* | *p* | 7 | *p* | *p* | 13 | *p* | *p* |
| 6 | *p* | 11 | *p* | *p* | *p* | *p* | 7 | 11 |
| 7 | *p* | 7 | 13 | *p* | *p* | *p* | *p* | *p* |

| q | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | p | 13 | p | 11 | p | 7 | p | p |
| 9 | p | p | p | p | 7 | 17 | p | 18 |
| 10 | 7 | p | p | p | p | 11 | 17 | 7 |
| 11 | p | p | 11 | 7 | p | p | p | p |
| 12 | 19 | p | 7 | p | 13 | p | p | p |
| 13 | 17 | p | p | 13 | 11 | p | 7 | p |
| 14 | p | 7 | p | p | 19 | p | p | p |
| 15 | 11 | p | p | p | p | 7 | 11 | p |
| 16 | 12 | p | p | 17 | 7 | p | p | p |
| 17 | 7 | 11 | p | p | 17 | 23 | 13 | 7 |
| 18 | p | p | 19 | 7 | p | 13 | p | p |
| 19 | p | p | 7 | 11 | p | 19 | p | p |
| 20 | p | p | 13 | p | p | p | 7 | 17 |
| 21 | p | 7 | p | p | p | 11 | p | p |
| 22 | p | 23 | 11 | p | p | 7 | p | 13 |
| 23 | p | 17 | p | 19 | 7 | p | 23 | p |
| 24 | 7 | p | 17 | p | 11 | p | p | 7 |
| 25 | p | p | p | 7 | 13 | p | p | 19 |
| 26 | 11 | p | 7 | 13 | p | 17 | 11 | p |
| 27 | p | 19 | p | p | p | p | 7 | p |
| 28 | 29 | 7 | 23 | p | p | p | p | 11 |
| 29 | 13 | p | p | p | p | 7 | 19 | 29 |
| 30 | 17 | p | p | 11 | 7 | p | 13 | p |
| 31 | 7 | p | p | 23 | p | 13 | p | 7 |
| 32 | 31 | p | p | 7 | p | 11 | p | 23 |
| 33 | p | p | 7 | 17 | 19 | p | p | p |
| 34 | p | 13 | p | p | 17 | p | 7 | p |
| 35 | p | 7 | p | p | 11 | p | 29 | 13 |
| 36 | 23 | p | p | p | p | 7 | p | p |

| $q$ | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 37 | 11 | $p$ | 19 | $p$ | 7 | $p$ | 11 | 17 |
| 38 | 7 | 31 | $p$ | $p$ | 13 | 19 | $p$ | 7 |
| 39 | $p$ | 11 | $p$ | 7 | $p$ | 29 | $p$ | 11 |
| 40 | $p$ | 17 | 7 | $p$ | $p$ | 23 | $p$ | $p$ |
| 41 | $p$ | $p$ | 17 | 11 | 29 | $p$ | 7 | $p$ |
| 42 | 13 | 7 | 31 | 19 | $p$ | $p$ | $p$ | $p$ |
| 43 | $p$ | $p$ | $p$ | $p$ | $p$ | 7 | 13 | $p$ |
| 44 | $p$ | $p$ | 11 | 31 | 7 | 13 | 17 | 19 |
| 45 | 7 | 23 | $p$ | 29 | $p$ | 37 | $p$ | 7 |
| 46 | 1 | 19 | 13 | 7 | 11 | $p$ | 23 | $p$ |
| 47 | 17 | 13 | 7 | $p$ | $p$ | $p$ | $p$ | $p$ |
| 48 | 11 | $p$ | $p$ | $p$ | 31 | $p$ | 7 | 13 |
| 49 | $p$ | 7 | $p$ | $p$ | $p$ | $p$ | $p$ | $p$ |

§. 6. Ponamus igitur in genere quaerendos eſſe omnes numeros formae $30q + r$ qui per datum numerum primum P ſint diuiſibiles ita vt in areolas his numeris reſpondentes ipſe numerus P inſcribi debeat, niſi forte eidem areolae iam numerus minor fuerit inſcriptus. Sumamus autem pro reſiduo $r = \alpha$ formulam $30q + \alpha$ diuiſibilem fieri per propoſitum numerum primum P caſu quo $q = \alpha$ ita vt numerus $30a + \alpha$ diuiſionem per P admittat, tum igitur manifeſtum eſt formulam $30q + \alpha$ etiam diuiſibilem fore ſumendo $q = a + nP$ vnde hoc commodum nanciſcimur, vt ſi in quapiam columna pro reſiduo $\alpha$ numerus $30q + \alpha$ diuiſibilis fuerit per P caſu $q = a$; tum omnes valores ipſius $q$ eadem indole gaudentes futuri ſint $a + P$; $a + 2P$; $a + 3P$; $a + 4P$; $a + 5P$ etc. iuxta quos igitur

tur areolis reſpondentibus ſub reſiduo $\alpha$ diuiſor iſte primus P inſcribi debebit, quod ergo negotium per omnes paginas ſequentes facillime abſoluetur. Dummodo igitur pro qualibet columna prima areola conſtet, cui numerum primum P inſcribi oportet, tum per omnes paginas ſequentes areolae, quibus idem numerus inſcribi debet, facillime definiuntur.

§. 7. Sumto autem numero primo quocunque P, minimus numerus, cuius minimus diuiſor eſt $= P$ eſt ſemper P P, in cuius igitur areola omnium primo numerus P inſcribendus erit; ita ſi proponatur diuiſor 7, is in noſtra tabula primum occurret apud numerum $49 = 30 . 1 + 19$ vbi eſt $q = 1$ et $r = 19$; at ſi diuiſor proponatur 11, minimus numerus, cui is in noſtra tabula reſpondebit, erit $11^2 = 121$, pro quo erit $q = 4$ et $r = 1$ ſicque in prima columna vbi $r = 1$ apud $q = 4$ occurret numerus 11, qui deinceps pro eadem columna conueniet omnibus valoribus, qui ſunt $4 + 11 = 15; 26; 37; 48; 59$ etc. vsque ad finem totius tabulae.

§. 8. Praecipuus igitur labor in hoc conſiſtet, vt propoſito numero quocunque P pro ſingulis reſiduis $r$ definiantur minimi numeri $q$, qui formulam $30q + r$ diuiſibilem producant per P; haec autem inueſtigatio eo modo eſt inſtituenda, quemadmodum in ſequenti Problemate docebimus, vbi pro diuiſore P ſumemus 7 quippe qui eſt minimus diuiſor, qui in noſtra tabula occurrere poteſt, propterea quod numeri primi minores 2, 3 et 5 ſunt excluſi.

 Pro-

## Problema I.

*Pro ſingulis octo valoribus litterae* r *inuenire minimos valores litterae* q, *quibus formula* 30 q + r *per* 7 *fiat diuiſibilis.*

## Solutio.

Sit *primo* $r = 1$ et formula $30q + 1$ diuiſibilis eſſe debet per 7, ponatur ergo $30q + 1 = 7A$ eritque $A = 4q + \frac{2q+1}{7}$, ita $2q + 1$ diuiſibilis eſſe debet per 7, quod manifeſto fit ſi $q = 3$, omnes ergo valores ipſius $q$ erunt

3, 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66 etc.

Sit *ſecundo* $r = 7$ et formula $30q + 7$ diuiſibilis manifeſto fit ſi $q = 0$, eius ergo ſequentes valores ſunt

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56 etc.

vnde ſingulis areolis in noſtra tabula numerum 7 inſcribamus praeterquam primae areolae, quae continet notam $p$.

Sit *tertio* $r = 11$ et fiat $30q + 11 = 7A$ eritque $A = 4q + 1 + \frac{2q+4}{7}$, vbi ergo eſt $q = 5$ eiusque ſequentes valores

12, 19, 26, 33, 40, 47 etc.

Sit *quarto* $r = 13$ et fiat $30q + 13 = 7A$ eritque $A = 4q + 1 + \frac{2q+6}{7}$ vbi ergo $q = 4$ et ſequentes eius valores

11, 18, 25, 32, 39, 46, 53 etc.

Sit

Sit *quinto* $r = 17$ vt formula $30q + 17$ diviſibilis eſſe debeat per 7, ideoque ponamus eam $= 7A$ fietque $A = 4q + 2 + \frac{2q+3}{7}$; quocirca $q$ eſſe debet $= 2$ et valores ſequentes erunt

9, 16, 23, 30, 37, 44, 51 etc.

Sit *ſexto* $r = 19$ et fiat $30q + 19 = 7A$ ideoque $A = 4q + 2 + \frac{2q+5}{7}$, manifeſto hinc fit $q = 1$ ſequentes autem valores erunt

8, 15, 22, 29, 36, 43, 50 etc.

Sit *ſeptimo* $r = 23$ fietque $30q + 23 = 7A$ hinc $A = 4q + 3 + \frac{2q+2}{7}$ debet ergo eſſe $q = 6$ et ſequentes valores

13, 20, 27, 34, 41, 48 etc.

Sit *octauo* $r = 29$ et $30q + 29 = 7A$ ita, vt $A = 4q + 4 + \frac{2q+1}{7}$ hincque manifeſto $q = 3$ et ſequentes valores

10, 17, 24, 31, 38, 45 etc.

## Corollarium 1.

Quia areola, quae reſpondet numeris $[{q \atop r} \equiv {1 \atop 19}]$, prima eſt, cui diuiſor 7 eſt inſcribendus; omnes praecedentes numeri in noſtra tabula relati erunt primi, ideoque eorum areolas charactere $p$ impleri oportet.

## Corollarium 2.

Quia igitur pro omnibus octo reſiduis $r$ minimos quotos $q$ aſſignauimus, quibus formula $30q+r$

 per

per 7 diuiſibilis euadit, vnde ſimul omnes ſequentes valores ipſius $q$ facillime innoteſcunt, eos ſequenti modo conſpectui exponamus, quo facilius omnes areolae numero 7 implendae per omnes tabulas ſequentes agnoſcantur

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r=$ | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
| $q=$ | 3 | 7 | 5 | 4 | 2 | 1 | 6 | 3 |
| ſequentes $q=$ | 10 | 14 | 12 | 11 | 9 | 8 | 13 | 10 |
| ſequentes $q=$ | 17 | 21 | 19 | 18 | 16 | 15 | 20 | 17 |
| ſequentes $q=$ | 24 | 28 | 26 | 25 | 23 | 22 | 27 | 24 |
| generaliter | $3+7n$ | $7+7n$ | $5+7n$ | $4+7n$ | $2+7n$ | $1+7n$ | $6+7n$ | $3+7n$ |
| | | etc. | | | etc. | | | etc. |

## Problema 2.

*Propoſito diuiſore* 11 *pro ſingulis reſiduis* r *inuenire minimos quotos* q, *quibus formula* $30q+r$ *per* 11 *ſit diuiſibilis.*

## Solutio.

Cum minimus numerus hunc diuiſorem gerens ſit $121 = 30.4 + 1$, prima areola, in qua iſte diuiſor 11 occurret, erit $[{}^{q}_{r} \equiv {}^{4}_{1}]$, omnes praecedentes areolae adhuc vacuae charactere $p$ ſunt replendae nunc igitur pro ſingulis reſiduis $r$ quotos minimos $q$ quaeramus.

1°. Si

1°. Si $r = 1$ modo vidimus fore $q = 4$ ideoque ingenere $q = 4 + 11\,n$.

2°. Sit $r = 7$ et ponatur $30\,q + 7 = 11\,A$ erit

$$A = 2\,q + \frac{8\,q + 7}{11} = 3\,q - \frac{3\,q + 7}{11}$$

vnde fit $q = 6$ et in genere $q = 6 + 11\,n$.

3°. Si $r = 11$ ponatur $30\,q + 11 = 11\,A$ vnde $q = 0$ minimus autem erit $0 + 11$.

4°. Si $r = 13$ ponatur $30\,q + 13 = 11\,A$ vnde erit

$$A = 2\,q + 1 + \frac{8\,q + 2}{11}$$

eſſe igitur debet $q = 8$ et in genere $q = 8 + 11\,n$.

5°. Si $r = 17$ ponatur $30\,q + 17 = 11\,A$ vnde erit

$$A = 2\,q + 1 + \frac{8\,q + 6}{11}$$

quod diuiſibile fit per 11 ponendo $q = 2$ vel cum hic non ſit minimus erit $q = 13$ et in genere $q = 13 + 11\,n$.

6°. Si $r = 19$ ponatur $30\,q + 19 = 11\,A$ vnde fit

$$A = 2\,q + 1 + \frac{8\,q + 8}{11}$$

vnde eſſe debet $q = 10$ et in genere $q = 10 + 11\,n$.

7°. Si $r = 23$ ponatur $30\,q + 23 = 11\,A$ vnde fit

$$A = 2\,q + 2 + \frac{8\,q + 1}{11}$$

vbi eſſe debet $q = 4$ et in genere $q = 4 + 11\,n$.

8°. Si $r = 29$ ponatur $30\,q + 29 = 11\,A$ hincque fit

$$A = 2\,q + 2 + \frac{8\,q + 7}{11}$$

quocirca eſſe debet $q = 6$ et in genere $q = 6 + 11\,n$.

Hos igitur valores ita conſpectui exponamus pro diuiſore 11

| | $r$ | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $q =$ | 4 | 6 | 11 | 8 | 13 | 10 | 4 | 6 |
| ſequ | $q =$ | 15 | 17 | 22 | 19 | 24 | 31 | 15 | 17 |
| ſequ. | $q =$ | 26 | 38 | 33 | 30 | 35 | 42 | 26 | 28 |
| ſequ. | $q =$ | 37 | 49 | 44 | 41 | 46 | 53 | 37 | 39 |

etc. etc. etc.

## Problema 3.

*Propoſito diuiſore* 13 *pro ſingulis reſiduis* r *inueni-re quotos* q, *vt formula* $30q+r$ *diuiſibilis fiat per* 13.

## Solutio.

Cum minimus numerus in noſtra tabula, qui diuiſorem 13 adſcriptum habebit, ſit $13^2=169=30.5+19$, omnia loca vacua charactere $p$ ſunt replenda. Pro reliquis reſiduis aliam viam ineamus: cum enim $30.5+19$ minimus ſit numerus diuiſore 13 ſignandus, omnes maiores continebuntur in hac forma $30.5+19+13n$, quia autem numeri pares excluduntur, pro $n$ ſumi debent tantum numeri pares, ita, vt tantum multipla 26 addi debeant, vbi notandum, ſi numeri prodeant maiores quam 30, tum vnitatem accedere ad primum membrum $30q$ quod hic eſt 30. 5; habebimus ſcilicet duas columnas priorem pro $q$, alteram vero pro $r$, quae quaſi monetas diuerſae ſpeciei referunt, quarum triginta ſub ſpecie $r$ contentae faciunt vnitatem pro altera ſpecie $q$.

Hoc notato, quia pro primo caſu habuimus $q=5$ et $r=19$ continuo hic 26 addamus vti ſequens ſchema declarabit.

Hoc

| $q$ | - | $r$ |
|---|---|---|
| 5 | - | 19 |
| | | 26 |
| 6 | - | 15 |
| | | 26 |
| 7 | - | 11 |
| | | 26 |
| 8 | - | 7 |
| | | 26 |
| 9 | - | 3 |
| | | 26 |
| 9 | - | 29 |
| | | 26 |
| 10 | - | 25 |
| | | 26 |
| 11 | - | 21 |
| | | 26 |
| 12 | - | 17 |
| | | 26 |
| 13 | - | 13 |
| | | 26 |
| 14 | - | 9 |
| | | 26 |
| 15 | - | 5 |
| | | 26 |
| 16 | - | 1 |
| | | 26 |
| 16 | - | 27 |
| | | 26 |
| 17 | - | 23 |

Hae operationes ſcilicet eo vsque ſunt continuandae donec ſub columna $r$ omnia reſidua occurrant; tum igitur vnicuique valor reſpondens $q$ habebitur; hinc igitur ſequens ſchema conſtituatur.

Pro

Pro diuiſore 13

| | $r=$ | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $q=$ | 16 | 8 | 7 | 13 | 12 | 5 | 17 | 9 |
| ſequ. | $q=$ | 29 | 21 | 20 | 26 | 25 | 18 | 30 | 22 |
| ſequ. | $q=$ | 42 | 34 | 33 | 39 | 38 | 31 | 43 | 35 |

etc. etc. etc.

## Scholion.

Non autem opus eſt ſuperiores operationes eo vsque continuare, donec octo noſtra reſidua omnia occurrant, ſed ſufficit quatuor tantum noſſe; ex quolibet enim caſu $q=a$ et $r=\alpha$ etiam caſus quo $r=30-\alpha$ facile deducitur; cum enim ſit $30a+\alpha$ diuiſibile per 13; erit $30(a+1)-30+\alpha$ etiam diuiſibile; hincque etiam eius negatiuum $-30(a+1)+30-\alpha$; addatur 30. 13 vt habeatur $30(12-a)+30-\alpha$ diuiſibile per 13, ergo ſi fuerit $r=30-\alpha$ erit $q=12-a$. Hinc igitur quia primo erat $a=5$ et $\alpha=19$, nunc pro $r=30-19=11$ erit $q=7$. Deinde erat $\alpha=7$ et $a=8$, hinc pro caſu $r=30-7=23$ erit $q=4$ ſiue $q=17$. Porro vbi $\alpha=29$ erat $a=9$; hinc ſi $r=1$ ſit $q=3$ ſiue $q=16$. Eodem modo vbi $\alpha=17$ erat $a=12$ hinc ſi $r=13$ fiet $q=0$ hoc eſt $q=13$.

## Problema 4.

*Propoſito diuiſore* $=17$ *pro ſingulis reſiduis* r *inuenire quotos* q, *vt formula* $30q+r$ *diuiſibilis fiat per* 17.

## Solutio.

Cum minimus numerus hoc diuiſore ſignandus ſit $17^2=289=30.9+19$ pro eo erit $q=9$

et

et $r = 19$ atque omnes praecedentes areolae adhuc vacuae littera $p$ erunt replendae. Nunc igitur ſi $q$ et $r$ vt nomina duarum ſpecierum ſpectemus, quarum prior continet triginta poſterioris; primus noſter numerus per 17 diuiſibilis erit $9^{(q)} + 19^{(r)}$, cui ſi continuo addamus $2.17 = 34$ hoc eſt $1^{(q)} + 4^{(r)}$, operationes ſequentes praebebunt valores

| $q$ | - | $r$ |
|---|---|---|
| 9 | - | 19 |
| 10 | - | 23 |
| 11 | - | 27 |
| 13 | - | 1 |
| 14 | - | 5 |
| 15 | - | 9 |
| 16 | - | 13 |
| 17 | - | 17 |
| 18 | - | 21 |
| 19 | - | 25 |
| 20 | - | 29 |
| 22 | - | 3 |
| 23 | - | 7 |
| 24 | - | 11 |

vnde ſequens ſchema perficitur.

Pro diuiſore 17

| $r$ | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q$ | 13 | 23 | 24 | 16 | 17 | 9 | 10 | 20 |
| $q$ | 30 | 40 | 41 | 33 | 34 | 26 | 27 | 37 |
| $q$ | 47 | 57 | 58 | 50 | 51 | 43 | 44 | 54 |

etc. etc etc.

 Pro-

## Problema 5.

*Propoſito diuiſore pro ſingulis reſiduis* r *inuenire quotos* q, *vt formula* 30 q + r *diuiſibilis fiat per* 19.

## Solutio.

Minimus numerus hoc diuiſore ſignandus erit $361 = 30 \cdot 12 + 1$ ita vt ſit $q = 12$ et $r = 1$; hinc formulae $12^{(q)} + 1^{(r)}$ continuo addatur numerus $2 \cdot 19 = 38 = 1^{(q)} + 8^{(r)}$ ſiue $2^{(q)} - 22^{(r)}$, vnde ſequentes naſcuntur operationes

| *q* | - | *r* |
|---|---|---|
| 12 | - | 1 |
| 13 | - | 9 |
| 14 | - | 17 |
| 15 | - | 25 |
| 17 | - | 3 |
| 18 | - | 11 |
| 19 | - | 19 |
| 20 | - | 27 |
| 22 | - | 5 |
| 23 | - | 13 |
| 24 | - | 21 |
| 25 | - | 29 |
| 27 | - | 7 |
| 28 | - | 15 |
| 29 | - | 23 |
| 31 | - | 1 |

vnde ſequens ſchema conficitur.

Pro diuiſore 19

| $r=$ | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q=$ | 12 | 27 | 18 | 23 | 14 | 19 | 29 | 25 |
| $q=$ | 31 | 46 | 37 | 42 | 33 | 38 | 48 | 44 |
| $q=$ | 50 | 65 | 56 | 61 | 52 | 56 | 67 | 63 |

etc. etc. etc.

## Problema 6.

*Propoſito diuiſore* 23 *pro ſingulis reſiduis* r *inuenire quotos* q, *vt formula* $30q+r$ *diuiſibilis fiat per* 23.

## Solutio.

Cum minimus numerus hoc diuiſore 23 ſignandus ſit $23^2 = 529 = 30.17 + 19$ erit $q = 17$ et $r = 19$. Nunc igitur formulae $17^{(q)} + 19^{(r)}$ continuo addamus numerum $46 = 1^q + 16^{(r)}$ ſiue $2^{(q)} - 14^{(r)}$ vt ſequitur

| $q$ | | $r$ |
|---|---|---|
| 17 | - | 19 |
| 19 | - | 5 |
| 20 | - | 21 |
| 22 | - | 7 |
| 23 | - | 23 |
| 25 | - | 9 |
| 26 | - | 25 |
| 28 | - | 11 |
| 29 | - | 27 |
| 31 | - | 13 |
| 32 | - | 29 |
| 34 | - | 15 |
| 36 | - | 1 |
| 37 | - | 17 |
| 39 | - | 3 |
| 40 | - | 19 |

vnde hoc ſchema conficitur.

Pro diuiſore 23

| $r =$ | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q =$ | 36 | 22 | 28 | 31 | 37 | 17 | 23 | 32 |
| $q =$ | 59 | 45 | 51 | 54 | 60 | 40 | 46 | 55 |

etc. etc. etc.

## Problema 7.

*Propoſito diuiſore* 29 *pro ſingulis reſiduis* $= r$ *invenire quotos* $q$, *vt formula* $30q + r$ *diuiſibilis fiat per* 29.

## Solutio.

Cum minimus numerus hoc diuiſore ſignandus ſit $29^2 = 841 = 30 \cdot 28 + 1$ erit $q = 28$ et $r = 1$. Nunc igitur ad $28^{(q)} + 1^{(r)}$ continuo addamus $58^{(r)} = 1^{(q)} + 28^{(r)}$ ſiue $2^{(q)} - 2^{(r)}$ vti ſequitur

| $q$ | - | $r$ |
|---|---|---|
| 28 | - | 1 |
| 29 | - | 29 |
| 31 | - | 27 |
| 33 | - | 25 |
| 35 | - | 23 |
| 37 | - | 21 |
| 39 | - | 19 |
| 41 | - | 17 |
| 43 | - | 15 |
| 45 | - | 13 |
| 47 | - | 11 |
| 49 | - | 9 |
| 51 | - | 7 |
| 53 | - | 5 |
| 55 | - | 3 |
| 57 | - | 1 |

vnde

vnde ſequens ſchema pro diuiſore 29 conficitur

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r=$ | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
| $q=$ | 28 | 51 | 47 | 45 | 41 | 39 | 35 | 29 |
| $q=$ | 57 | 80 | 76 | 74 | 70 | 68 | 64 | 58 |

etc. etc. etc.

## Scholion.

Pro ſequentibus diuiſoribus talia Problemata generalius tractari poſſunt ſicque totum negotium noſtrum conficietur, quando ſequentia octo problemata ſoluemus.

## Problema generale I.

Propoſito diuiſore primo $30a+1$ pro ſingulis reſiduis $r$ omnes quotos $q$ inuenire, vt formula $30q+r$ diuiſibilis fiat per numerum $30a+1$.

## Solutio.

Cum minimus numerus hoc diuiſore ſignandus ſit $900aa+60a+1$ erit $q=30aa+2a$ et $r=1$. Nunc igitur ad hunc numerum $(30aa+2a)^{(q)}+1^{(r)}$ continuo addamus duplum diuiſorem $60a+2=2a^{(q)}+2^{(r)}$ ſiue $(2a+1)^{(q)}-28^{(r)}$ vti ſequitur

| $q$ | - | $r$ |
|---|---|---|
| $30aa+2a$ | - | 1 |
| $30aa+4a$ | - | 3 |
| $30aa+6a$ | - | 5 |
| $30aa+8a$ | - | 7 |
| $30aa+10a$ | - | 9 |
| $30aa+12a$ | - | 11 |
| $30aa+14a$ | - | 13 |

| $q$ | - | $r$ |
|---|---|---|
| $30aa + 16a$ | - | 15 |
| $30aa + 18a$ | - | 17 |
| $30aa + 20a$ | - | 19 |
| $30aa + 22a$ | - | 21 |
| $30aa + 24a$ | - | 23 |
| $30aa + 26a$ | - | 25 |
| $30aa + 28a$ | - | 27 |
| $30aa + 30a$ | - | 29 |
| $30aa + 32a + 1$ | - | 1 |

Nunc igitur ſingula noſtra reſidua in linea verticali exponamus et ſingulis quotos reſpondentes $q$ adſcribamus

| $r$ | $q$ |
|---|---|
| 1 | $30aa + 2a + n(30a + 1)$ |
| 7 | $30aa + 8a + n(30a + 1)$ |
| 11 | $30aa + 12a + n(30a + 1)$ |
| 13 | $30aa + 14a + n(30a + 1)$ |
| 17 | $30aa + 18a + n(30a + 1)$ |
| 19 | $30aa + 20a + n(30a + 1)$ |
| 23 | $30aa + 24a + n(30a + 1)$ |
| 29 | $30aa + 30a + n(30a + 1)$. |

## Scholion.

Quod ſi tabulam numerorum primorum vsque ad vnum millionem continuare velimus, maiores diviſores primi in ea occurrere non poſſunt, quam 1000; vnde tantum opus eſt noſtra ſchemata pro omnibus numeris primis millenario non maioribus exten-

extendere; hinc diuiſores primi in formula $30a + 1$ contenti in adiuncta tabula referuntur

| Numeri primi formae $30a+1$ | Numeri $a$ |
|---|---|
| 31 | 1 |
| 61 | 2 |
| 151 | 5 |
| 181 | 6 |
| 211 | 7 |
| 241 | 8 |
| 271 | 9 |
| 331 | 11 |
| 421 | 14 |
| 541 | 18 |
| 571 | 19 |
| 601 | 20 |
| 631 | 21 |
| 661 | 22 |
| 691 | 23 |
| 751 | 25 |
| 811 | 27 |
| 991 | 33 |
| 1021 | 34 |

Nunc igitur pro ſingulis his diuiſoribus ſchemata noſtra vti incepimus adiungere poterimus.

TABV-

# TABVLA

## exhibens minimos quotos $q$ pro diuiſoribus primis formae $30\,a+1$ ad ſingula octo reſidua relatos.

### Tabula generalis.

| $a$ | Diuiſor | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 31 | 32 | 38 | 42 | 44 | 48 | 50 | 54 | 60 |
| 2 | 61 | 124 | 136 | 144 | 148 | 156 | 160 | 168 | 180 |
| 5 | 151 | 760 | 790 | 810 | 820 | 840 | 850 | 870 | 900 |
| 6 | 181 | 1092 | 1128 | 1152 | 1164 | 1188 | 1200 | 1224 | 1260 |
| 7 | 211 | 1484 | 1526 | 1554 | 1568 | 1596 | 1610 | 1638 | 1680 |
| 8 | 241 | 1936 | 1984 | 2016 | 2032 | 2064 | 2080 | 2110 | 2160 |
| 9 | 271 | 2448 | 2502 | 2538 | 2556 | 2592 | 2610 | 2646 | 2700 |
| 11 | 331 | 3652 | 3718 | 3762 | 3784 | 3828 | 3850 | 3894 | 3960 |
| 14 | 421 | 5908 | 5992 | 6048 | 6076 | 6132 | 6160 | 6216 | 6300 |
| 18 | 541 | 9756 | 9864 | 9936 | 9972 | 10044 | 10080 | 10152 | 10260 |
| 19 | 571 | 10868 | 10982 | 11058 | 11096 | 11172 | 11210 | 11286 | 11400 |
| 20 | 601 | 12040 | 12160 | 12240 | 12280 | 12360 | 12400 | 12480 | 12600 |
| 21 | 631 | 13272 | 13398 | 13482 | 13524 | 13608 | 13650 | 13734 | 13860 |
| 22 | 661 | 14564 | 14696 | 14784 | 14828 | 14916 | 14960 | 15048 | 15180 |
| 23 | 691 | 15916 | 16054 | 16146 | 16192 | 16284 | 16330 | 16422 | 16560 |
| 25 | 751 | 18800 | 18950 | 19050 | 19100 | 19200 | 19250 | 19350 | 19500 |
| 27 | 811 | 21924 | 22086 | 22904 | 22248 | 22356 | 22410 | 22518 | 22680 |
| 33 | 991 | 32736 | 32934 | 33066 | 33132 | 33264 | 33330 | 33462 | 33660 |

## Problema generale II.

Propoſito diuiſore primo $30\,a-1$ pro omnibus reſiduis $r$ inuenire quotos $q$, vt formula $30q+r$ diuiſibilis ſit per $30\,a-1$.

Solutio.

## Solutio.

Cum minimus numerus hoc diuiſore ſignandus ſit $30 . 30 aa - 2 . 30 a + 1$; erit $q = 30 aa - 2 a$ et $r = 1$ nunc igitur ad hanc formulam $(30 aa - 2 a)^{(q)} + 1^{(r)}$ continuo addatur numerus $60 a - 2 = 2 a^{(q)} - 2^{(r)}$ ſiue $(2 a - 1)^{(q)} + 28^{(r)}$, vnde ſequitur

| q | | r |
|---|---|---|
| $30 aa - 2 a$ | - | 1 |
| $30 aa + 0 a - 1$ | - | 29 |
| $30 aa + 2 a - 1$ | - | 27 |
| $30 aa + 4 a - 1$ | - | 25 |
| $30 aa + 6 a - 1$ | - | 23 |
| $30 aa + 8 a - 1$ | - | 21 |
| $30 aa + 10 a - 1$ | - | 19 |
| $30 aa + 12 a - 1$ | - | 17 |
| $30 aa + 14 a - 1$ | - | 15 |
| $30 aa + 16 a - 1$ | - | 13 |
| $30 aa + 18 a - 1$ | - | 11 |
| $30 aa + 20 a - 1$ | - | 9 |
| $30 aa + 22 a - 1$ | - | 7 |

Hinc igitur quoti $q$ ſingulis reſiduis $r$ reſpondentes erunt

| r | q |
|---|---|
| 1 | $30 aa - 2 a + n (30 a - 1)$ |
| 7 | $30 aa + 22 a - 1 + n (30 a - 1)$ |
| 11 | $30 aa + 18 a - 1 + n (30 a - 1)$ |
| 13 | $30 aa + 16 a - 1 + n (30 a - 1)$ |
| 17 | $30 aa + 12 a - 1 + n (30 a - 1)$ |
| 19 | $30 aa + 10 a - 1 + n (30 a - 1)$ |
| 23 | $30 aa + 6 a - 1 + a (30 a - 1)$ |
| 29 | $30 aa + 0 a - 1 + n (30 a - 1)$. |

 Cum

Cum igitur diuiſor noſter $30a - 1$ contineatur in forma $30q + 29$ exiſtente $a = q + 1$; ex noſtra tabula excerpantur ordine omnes numeri primi formae $30q + 29$ et pro ſingulis capiatur $a = q + 1$ hincque ſequens prodit.

Tabula generalis

| *a* | Diuiſor | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 29 | 28 | 51 | 47 | 45 | 41 | 39 | 35 | 29 |
| 2 | 59 | 116 | 163 | 155 | 151 | 143 | 139 | 131 | 119 |
| 3 | 89 | 264 | 335 | 323 | 317 | 305 | 299 | 287 | 269 |
| 5 | 149 | 740 | 859 | 839 | 829 | 809 | 799 | 779 | 749 |
| 6 | 179 | 1068 | 1211 | 1187 | 1175 | 1151 | 1139 | 1115 | 1079 |
| 8 | 239 | 1904 | 2095 | 2063 | 2047 | 2015 | 1999 | 1967 | 1919 |
| 9 | 269 | 2412 | 2627 | 2591 | 2573 | 2537 | 2519 | 2483 | 2429 |
| 12 | 359 | 4296 | 4583 | 4535 | 4511 | 4463 | 4439 | 4391 | 4319 |
| 13 | 389 | 5044 | 5355 | 5303 | 5277 | 5225 | 5199 | 5147 | 5069 |
| 14 | 419 | 5852 | 6187 | 6131 | 6103 | 6047 | 6019 | 5963 | 5879 |
| 15 | 449 | 6720 | 7079 | 7019 | 6989 | 6929 | 6899 | 6839 | 6749 |
| 16 | 479 | 7648 | 8031 | 7967 | 7935 | 7871 | 7839 | 7775 | 7679 |
| 17 | 509 | 8636 | 9043 | 8975 | 8941 | 8873 | 8839 | 8771 | 8669 |
| 19 | 569 | 10792 | 11247 | 11171 | 11133 | 11057 | 11019 | 10943 | 10829 |
| 20 | 599 | 11960 | 12439 | 12359 | 12319 | 12239 | 12199 | 12119 | 11999 |
| 22 | 659 | 14476 | 15003 | 14915 | 14871 | 14783 | 14739 | 14651 | 14519 |
| 24 | 719 | 17232 | 17807 | 17711 | 17663 | 17567 | 17519 | 17423 | 17279 |
| 27 | 809 | 21816 | 22463 | 22355 | 22301 | 22193 | 22139 | 22031 | 21869 |
| 28 | 839 | 23464 | 24135 | 24023 | 23967 | 23855 | 23799 | 23687 | 23519 |
| 31 | 929 | 28768 | 29511 | 29387 | 29325 | 29201 | 29139 | 29015 | 28829 |

Pro-

## Problema generale III.

Propoſito diuiſore primo $30a+7$, pro ſingulis reſiduis $r$ inuenire quotos $q$, vt formula $30q+r$ diuiſibilis fiat per $30a+7$.

### Solutio.

Cum minimus numerus hoc diuiſore ſignandus ſit $30.30aa+30.14a+49$, pro eo erit $q=30aa+14a+1$ et $r=19$. Nunc igitur ad formulam $(30aa+14a+1)^{(q)}+19^{(r)}$ continuo addatur numerus $60a+14=2a^{(q)}+14^{(r)}$ ſiue $(2a+1)^{(q)}-16^{(r)}$ vnde ſequitur

| $q$ | | $r$ |
|---|---|---|
| $30aa+14a+1$ | - | 19 |
| $30aa+16a+2$ | - | 3 |
| $30aa+18a+2$ | - | 17 |
| $30aa+20a+3$ | - | 1 |
| $30aa+22a+3$ | - | 15 |
| $30aa+24a+3$ | - | 29 |
| $30aa+26a+4$ | - | 13 |
| $30aa+28a+4$ | - | 27 |
| $30aa+30a+5$ | - | 11 |
| $30aa+32a+5$ | - | 25 |
| $30aa+34a+6$ | - | 9 |
| $30aa+36a+6$ | - | 23 |
| $30aa+38a+7$ | - | 7. |

Et hinc pro ſingulis reſiduis $r$ quoti $q$ ita colliguntur

| $r$ | $q$ |
|---|---|
| 1 | $30\,aa + 20\,a + 3 + n(30\,a + 7)$ |
| 7 | $30\,aa + 38\,a + 7 + n(30\,a + 7)$ |
| 11 | $30\,aa + 30\,a + 5 + n(30\,a + 7)$ |
| 13 | $30\,aa + 26\,a + 4 + n(30\,a + 7)$ |
| 17 | $30\,aa + 18\,a + 2 + n(30\,a + 7)$ |
| 19 | $30\,aa + 14\,a + 1 + n(30\,a + 7)$ |
| 23 | $30\,aa + 36\,a + 6 + n(30\,a + 7)$ |
| 29 | $30\,aa + 24\,a + 3 + n(30\,a + 7)$ |

Cum diuiſor noſter in forma $30\,q + 7$ contineatur, excerpantur ex tabula noſtra ordine omnes numeri primi huius formae ac pro ſingulis erit $a = q$ hincque ſequens conſtruatur

Tabula

## Tabula generalis.

| *a* | Diuiſor | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 7 | 3 | 7 | 5 | 4 | 2 | 1 | 6 | 3 |
| 1 | 37 | 53 | 75 | 65 | 60 | 50 | 45 | 72 | 57 |
| 2 | 67 | 163 | 203 | 185 | 176 | 158 | 149 | 198 | 171 |
| 3 | 97 | 333 | 391 | 365 | 352 | 308 | 313 | 384 | 345 |
| 4 | 127 | 563 | 639 | 605 | 588 | 554 | 537 | 630 | 579 |
| 5 | 157 | 853 | 947 | 905 | 884 | 842 | 821 | 936 | 873 |
| 9 | 277 | 2613 | 2779 | 2705 | 2668 | 2594 | 2557 | 2760 | 2649 |
| 10 | 307 | 3203 | 3387 | 3305 | 3264 | 3182 | 3141 | 3366 | 3243 |
| 11 | 337 | 3853 | 4055 | 3965 | 3920 | 3830 | 3785 | 4032 | 3897 |
| 12 | 367 | 4563 | 4783 | 4685 | 4636 | 4538 | 4489 | 4758 | 4611 |
| 13 | 397 | 5333 | 5571 | 5465 | 5412 | 5306 | 5253 | 5544 | 5385 |
| 15 | 457 | 7053 | 7327 | 7205 | 7144 | 7022 | 6961 | 7296 | 7113 |
| 16 | 487 | 8003 | 8295 | 8165 | 8100 | 7970 | 7905 | 8262 | 8067 |
| 18 | 547 | 10083 | 10411 | 10265 | 10192 | 10046 | 9973 | 10374 | 10155 |
| 19 | 577 | 11213 | 11559 | 11405 | 11328 | 11174 | 11097 | 11520 | 11289 |
| 20 | 607 | 12403 | 12767 | 12605 | 12524 | 12362 | 12281 | 12726 | 12483 |
| 24 | 727 | 17763 | 18199 | 18005 | 17908 | 17714 | 17617 | 18150 | 17859 |
| 25 | 757 | 19253 | 19707 | 19505 | 10404 | 19202 | 19101 | 19656 | 18353 |
| 26 | 787 | 20803 | 21275 | 21065 | 20960 | 20750 | 20645 | 21222 | 20907 |
| 29 | 877 | 25813 | 26339 | 26105 | 25988 | 25754 | 25637 | 26280 | 25929 |
| 30 | 907 | 27603 | 28147 | 27905 | 27784 | 27542 | 27421 | 28086 | 27723 |
| 31 | 937 | 29453 | 30015 | 29765 | 29640 | 29390 | 29265 | 29952 | 29577 |
| 32 | 967 | 31363 | 31943 | 31685 | 31556 | 31298 | 31169 | 31878 | 31491 |
| 33 | 997 | 33333 | 33931 | 33665 | 33532 | 33266 | 33133 | 33864 | 33465 |

## Problema generale IV.

Propoſito diuiſore primo $30a-7$, pro ſingulis reſiduis $r$ inuenire quotos $q$, vt formula $30q+r$ fiat diuiſibilis per $30a-7$.

## Solutio.

Cum minimus numerus hoc diuiſore ſignandus ſit $30.30aa-30.14a+49$ erit $q=30a^2-14a+1$ et $r=19$; hinc ad numerum $(30aa-14a+1)^{(q)}+19^{(r)}$ continuo addatur forma $60a-14=2a^{(q)}-14^{(r)}$ ſeu $(2a-1)^{(q)}+16^{(r)}$ vnde calculus iſte oritur

| q | - | r |
|---|---|---|
| $30aa-14a+1$ | - | 19 |
| $30aa-12a+1$ | - | 5 |
| $30aa-10a$ | - | 21 |
| $30aa-8a$ | - | 7 |
| $30aa-6a-1$ | - | 23 |
| $30aa-4a-1$ | - | 9 |
| $30aa-2a-2$ | - | 25 |
| $30aa+0a-2$ | - | 11 |
| $30aa+2a-3$ | - | 27 |
| $30aa+4a-3$ | - | 13 |
| $30aa+6a-4$ | - | 29 |
| $30aa+8a-4$ | - | 15 |
| $30aa+10a-4$ | - | 1 |
| $30aa+12a-5$ | - | 17 |
| $30aa+14a-5$ | - | 3 |
| $30aa+16a-6$ | - | 19 |

Hinc

Hinc igitur quoti ordine diſponantur pro ſingulis noſtris reſiduis $r$ vti ſequitur

| $r$ | $q$ |
|---|---|
| 1 | $30aa + 10a - 4 + n(30a - 7)$ |
| 7 | $30aa - 8a - 0 + n(30a - 7)$ |
| 11 | $30aa + 0a - 2 + n(30a - 7)$ |
| 13 | $30aa + 4a - 3 + n(30a - 7)$ |
| 17 | $30aa + 12a - 5 + n(30a - 7)$ |
| 19 | $30aa - 14a + 1 + n(30a - 7)$ |
| 23 | $30aa - 6a - 1 + n(30a - 7)$ |
| 29 | $30aa + 6a - 4 - n(30a - 7)$ |

Cum igitur diuiſor noſter $30a - 7$ pertineat ad formam $30q + 23$, ex tabula noſtra ordine excerpantur omnes numeri primi formae $30q + 13$ eritque pro ſingulis $a = q + 1$ hincque ſequens *tabula generalis* conficiatur

a

| *a* | Diuiſor | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 23 | 36 | 22 | 28 | 31 | 37 | 17 | 23 | 32 |
| 2 | 53 | 136 | 104 | 108 | 125 | 139 | 93 | 107 | 128 |
| 3 | 83 | 296 | 246 | 268 | 279 | 301 | 229 | 251 | 284 |
| 4 | 113 | 516 | 448 | 478 | 493 | 523 | 425 | 455 | 460 |
| 6 | 173 | 1136 | 1032 | 1078 | 1101 | 1147 | 997 | 1043 | 1112 |
| 8 | 233 | 1996 | 1856 | 1918 | 1949 | 2011 | 1809 | 1871 | 1876 |
| 9 | 263 | 2516 | 2358 | 2428 | 2463 | 2533 | 2305 | 2375 | 2480 |
| 10 | 293 | 3096 | 2920 | 2998 | 3037 | 3115 | 2861 | 2939 | 3056 |
| 12 | 353 | 4436 | 4224 | 4318 | 4365 | 4181 | 4153 | 4247 | 4388 |
| 13 | 383 | 5206 | 4996 | 5068 | 5119 | 522 | 4889 | 4991 | 5144 |
| 15 | 443 | 6896 | 6630 | 6748 | 6693 | 6575 | 6541 | 6659 | 6836 |
| 17 | 503 | 8836 | 8534 | 8668 | 8734 | 8869 | 8433 | 8567 | 8768 |
| 19 | 563 | 11016 | 10678 | 10828 | 10903 | 11053 | 10565 | 10715 | 10940 |
| 20 | 593 | 12196 | 11840 | 11998 | 12077 | 12235 | 11721 | 11879 | 121[illegible]6 |
| 22 | 653 | 14736 | 14344 | 14518 | 14605 | 14779 | 14213 | 14387 | 14648 |
| 23 | 683 | 16096 | 15686 | 15868 | 15959 | 1614[illegible] | 15549 | 15731 | 16004 |
| 25 | 743 | 18996 | 18550 | 18748 | 18847 | 19045 | 18401 | 18599 | 18896 |
| 26 | 773 | 20536 | 20072 | 20278 | 20381 | 20587 | 19917 | 20123 | 20430 |
| 29 | 863 | 25516 | 24998 | 25228 | 2534[illegible] | 25573 | 24825 | 25055 | 25400 |
| 32 | 953 | 31036 | 30464 | 30718 | 30845 | 31099 | 30273 | 30527 | 30908 |
| 33 | 983 | 32996 | 32406 | 32668 | 32799 | 33061 | 32209 | 32471 | 32864 |

## Problema generale V.

Propoſito diuiſore $30a + 11$ primo, inuenire pro ſingulis reſiduis $r$, quotos $q$, vt formula $30q + r$ fiat diuiſibilis per $30a + 11$.

## Solutio.

Cum minimus hoc diuiſore ſignandus numerus ſit $30.30aa + 30.22a + 121$, pro eo erit

$q =$

$q = 30aa + 22a + 4$ et $r = 1$. Nunc igitur ad formulam $(30aa + 22a + 4)^{(q)} + 1^{(r)}$ continuo numerum $60a + 22 = 2a^{(q)} + 22^{(r)}$ ſiue $(2a+1)^{(q)} - 8^{(r)}$ reddamus, vti ſequitur

| $q$ | - | $r$ |
|---|---|---|
| $30aa + 22a + 4$ | - | 1 |
| $30aa + 24a + 4$ | - | 23 |
| $30aa + 26a + 5$ | - | 15 |
| $30aa + 28a + 6$ | - | 7 |
| $30aa + 30a + 6$ | - | 29 |
| $30aa + 32a + 7$ | - | 21 |
| $30aa + 34a + 8$ | - | 13 |
| $30aa + 36a + 9$ | - | 5 |
| $30aa + 38a + 9$ | - | 27 |
| $30aa + 40a + 10$ | - | 19 |
| $30aa + 42a + 11$ | - | 11 |
| $30aa + 44a + 12$ | - | 3 |
| $30aa + 46a + 12$ | - | 25 |
| $30aa + 48a + 13$ | - | 17. |

et hinc pro ſingulis reſiduis $r$ quoti $q$ colliguntur ſequenti modo:

| $r$ | $q$ |
|---|---|
| 1 | $30aa + 22a + 4 + n(30a + 11)$ |
| 7 | $30aa + 28a + 6 + n(30a + 11)$ |
| 11 | $30aa + 42a + 11 + n(30a + 11)$ |
| 13 | $30aa + 34a + 8 + n(30a + 11)$ |
| 17 | $30aa + 48a + 13 + n(30a + 11)$ |
| 19 | $30aa + 40a + 10 + n(30a + 11)$ |
| 23 | $30aa + 24a + 4 + n(30a + 11)$ |
| 29 | $30aa + 30a + 6 + n(30a + 11)$. |

 Cum

Cum nunc diuiſor ille $30a + 11$ in forma $30q + 11$ contineatur, excerpantur ordine ex tabula noſtra omnes numeri, ac pro ſingulis erit $a = q$.

Tabula generalis.

| *a* | Diuiſor | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 11 | 4 | 6 | 11 | 8 | 13 | 10 | 4 | 6 |
| | 41 | 56 | 64 | 83 | 72 | 91 | 80 | 58 | 66 |
| 2 | 71 | 168 | 182 | 215 | 196 | 229 | 210 | 172 | 186 |
| 3 | 101 | 340 | 360 | 407 | 380 | 427 | 400 | 346 | 366 |
| 4 | 131 | 572 | 598 | 659 | 624 | 685 | 650 | 580 | 606 |
| 6 | 191 | 1216 | 1254 | 1343 | 1292 | 1381 | 1330 | 1228 | 1266 |
| 8 | 251 | 2100 | 2150 | 2267 | 2200 | 2317 | 2250 | 2116 | 2166 |
| 9 | 281 | 2632 | 2688 | 2819 | 2744 | 2875 | 2800 | 2650 | 2706 |
| 10 | 311 | 3224 | 3286 | 3431 | 3348 | 3493 | 3410 | 3244 | 3306 |
| 13 | 401 | 5360 | 5440 | 5627 | 5520 | 5707 | 5600 | 5386 | 5466 |
| 14 | 431 | 6192 | 6278 | 6479 | 6364 | 6565 | 6450 | 6220 | 6306 |
| 15 | 461 | 7084 | 7176 | 7391 | 7238 | 7483 | 7360 | 7114 | 7206 |
| 16 | 491 | 8036 | 8134 | 8363 | 8232 | 8461 | 8330 | 8068 | 8166 |
| 17 | 521 | 9048 | 9152 | 9395 | 9256 | 9499 | 9360 | 9082 | 9186 |
| 21 | 641 | 13696 | 13824 | 14123 | 13952 | 14251 | 14080 | 13738 | 13866 |
| 23 | 701 | 16380 | 16520 | 16847 | 16660 | 16987 | 16800 | 16426 | 16566 |
| 25 | 761 | 19304 | 19456 | 19811 | 19608 | 19963 | 19760 | 19354 | 19506 |
| 27 | 821 | 22468 | 22632 | 23015 | 22796 | 23179 | 22960 | 22522 | 22686 |
| 29 | 881 | 25872 | 26048 | 26459 | 26224 | 26635 | 26400 | 25930 | 26106 |
| 30 | 911 | 27664 | 27846 | 28271 | 28028 | 28453 | 28210 | 27724 | 27906 |
| 31 | 941 | 29716 | 29704 | 30143 | 29892 | 30331 | 30080 | 29578 | 29766 |
| 32 | 971 | 31428 | 31622 | 32075 | 31816 | 32269 | 32010 | 31492 | 31686 |

Proble-

## Problema generale VI.

Propoſito diuiſore $30a - 11$, pro ſingulis reſiduis $r$ inuenire quotos $q$, vt formula $30q + r$ diuiſibilis fiat per $30a - 11$.

## Solutio.

Cum minimus numerus hoc diuiſore ſignandus ſit $30.30aa - 30.22a + 121$, erit $q = 30aa - 22a + 4$ et $r = 1$ vnde ad numerum $(30aa - 22a + 4)^{(q)} + 1^{(r)}$ continuo addi debemus formulam $60a - 22 = 2a^{(q)} - 22^{(r)}$ ſeu $(2a - 1)^{(q)} + 8^{(r)}$, vti ex ſequente calculo conſtat

| $q$ | - | $r$ |
|---|---|---|
| $30aa - 22a + 4$ | - | 1 |
| $30aa - 20a + 3$ | - | 9 |
| $30aa - 18a + 2$ | - | 17 |
| $30aa - 16a + 1$ | - | 25 |
| $30aa - 14a + 1$ | - | 3 |
| $30aa - 12a - 0$ | - | 11 |
| $30aa - 10a - 1$ | - | 19 |
| $30aa - 8a - 2$ | - | 27 |
| $30aa - 6a - 2$ | - | 5 |
| $30aa - 4a - 3$ | - | 13 |
| $30aa - 2a - 4$ | - | 21 |
| $30aa - 0a - 5$ | - | 29 |
| $30aa + 2a - 5$ | - | 7 |
| $30aa + 4a - 6$ | - | 15 |
| $30aa + 6a - 7$ | - | 23 |
| $30aa + 8a - 7$ | - | 1. |

Quotos autem hinc pro ſingulis noſtris reſiduis ordine hic diſponamus

| $r$ | $q$ |
|---|---|
| 1 | $30aa - 22a + 4 + n(30a - 11)$ |
| 7 | $30aa + 2a - 5 + n(30a - 11)$ |
| 11 | $30aa - 12a - 0 + n(30a - 11)$ |
| 13 | $30aa - 4a - 3 + n(30a - 11)$ |
| 17 | $30aa - 18a + 2 + n(30a - 11)$ |
| 19 | $30aa - 10a - 1 + n(30a - 11)$ |
| 23 | $30aa + 6a - 7 + n(30a - 11)$ |
| 29 | $30aa - 0a - 5 + n(30a - 11)$. |

Cum nunc diuiſor noſter $30a - 11$ ſit formae $30q + 19$, ex tabula noſtra excerpantur omnes numeri primi huius formae, et pro ſingulis erit $a = q + 1$, vnde conſtruitur ſequens tabula

| $a$ | Diuiſor | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19 | 12 | 27 | 18 | 23 | 14 | 19 | 29 | 25 |
| 3 | 79 | 208 | 271 | 234 | 255 | 218 | 239 | 281 | 265 |
| 4 | 109 | 396 | 483 | 432 | 461 | 410 | 439 | 497 | 475 |
| 5 | 139 | 644 | 755 | 690 | 727 | 662 | 699 | 773 | 745 |
| 7 | 199 | 1320 | 1479 | 1386 | 1439 | 1346 | 1399 | 1505 | 1465 |
| 8 | 229 | 1748 | 1931 | 1824 | 1885 | 1778 | 1839 | 1961 | 1915 |
| 12 | 349 | 4060 | 4339 | 4176 | 4269 | 4106 | 4199 | 4385 | 4315 |
| 13 | 379 | 4788 | 5091 | 4914 | 5015 | 4838 | 4939 | 5141 | 5065 |
| 14 | 409 | 5576 | 5903 | 5712 | 5821 | 5630 | 5739 | 5957 | 5875 |
| 15 | 439 | 6424 | 6775 | 6570 | 6687 | 6482 | 6599 | 6833 | 6745 |
| 17 | 499 | 8300 | 8699 | 8466 | 8599 | 8366 | 8499 | 8867 | 8665 |
| 21 | 619 | 12772 | 13267 | 12978 | 13143 | 12854 | 13019 | 13349 | 13225 |
| 24 | 709 | 16756 | 17323 | 16992 | 17181 | 16850 | 17039 | 17417 | 17275 |
| 25 | 739 | 18204 | 18795 | 18450 | 18647 | 18302 | 18499 | 18893 | 18745 |
| 26 | 769 | 19712 | 20327 | 19968 | 20173 | 19814 | 20019 | 20429 | 20275 |
| 28 | 829 | 22908 | 23571 | 23184 | 23405 | 23018 | 23239 | 23681 | 23515 |
| 29 | 859 | 24596 | 25283 | 24882 | 25101 | 24710 | 24939 | 25397 | 25225 |
| 31 | 919 | 28152 | 28887 | 28458 | 28703 | 28274 | 28519 | 29009 | 28825 |
| 34 | 1009 | 33936 | 34743 | 34272 | 34541 | 34070 | 34339 | 34877 | 34675 |

## Problema generale VII.

Propoſito diuiſore $30a + 13$, pro ſingulis reſiduis $r$ inuenire quotos $q$, vt formula $30q + r$ diviſibilis fiat per $30a + 13$.

## Solutio.

Cum minimus numerus hoc diuiſore ſignandus ſit $30.30aa + 30.26a + 169$, pro quo erit $q = 30aa + 26a + 5$ et $r = 19$ nunc igitur ad formulam $(30aa + 26a + 5)^{(q)} + 19^{(r)}$ con-

 tinuo

tinuo addatur numerus $60a + 26 = 2a^{(q)} + 26^{(r)}$ ſiue $(2a + 1)^{(q)} - 4^{(r)}$, vnde iſte naſcitur calculus:

| q | - | r |
|---|---|---|
| $30aa + 26a + 5$ | - | 19 |
| $30aa + 28a + 6$ | - | 15 |
| $30aa + 30a + 7$ | - | 11 |
| $30aa + 32a + 8$ | - | 7 |
| $30aa + 34a + 9$ | - | 3 |
| $30aa + 36a + 9$ | - | 29 |
| $30aa + 48a + 10$ | - | 25 |
| $30aa + 40a + 11$ | - | 21 |
| $30aa + 42a + 12$ | - | 17 |
| $30aa + 44a + 13$ | - | 13 |
| $30aa + 46a + 14$ | - | 9 |
| $30aa + 48a + 15$ | - | 5 |
| $30aa + 50a + 16$ | - | 1 |
| $30aa + 52a + 16$ | - | 27 |
| $30aa + 54a + 17$ | - | 23 |
| $30aa + 56a + 18$ | - | 19. |

Nunc autem pro ſingulis reſiduis $r$ quoti $q$ ita colliguntur, vti ſequitur:

| r | q |
|---|---|
| 1 | $30aa + 50a + 16 + n(30a + 13)$ |
| 7 | $30aa + 32a + 8 + n(30a + 13)$ |
| 11 | $30aa + 30a + 7 + n(30a + 13)$ |
| 13 | $30aa + 44a + 13 + n(30a + 13)$ |
| 17 | $30aa + 42a + 12 + n(30a + 13)$ |
| 19 | $30aa + 26a + 5 + n(30a + 13)$ |
| 23 | $30aa + 54a + 17 + n(30a + 13)$ |
| 29 | $30aa + 36a + 9 + n(30a + 13)$. |

Cum

Cum nunc diuiſor $30a+13$ ſit formae $30q+13$, ex tabula noſtra excerpantur ordine numeri primi illic expoſitae, eritque $a=q$, vnde ſequens tabula generalis conſtruitur:

| *a* | Diuiſor | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 13 | 16 | 8 | 7 | 13 | 12 | 5 | 17 | 9 |
| 1 | 43 | 96 | 70 | 67 | 87 | 84 | 61 | 101 | 75 |
| 2 | 73 | 236 | 192 | 187 | 221 | 216 | 177 | 245 | 201 |
| 3 | 103 | 436 | 374 | 367 | 415 | 408 | 353 | 449 | 387 |
| 5 | 163 | 1016 | 918 | 907 | 983 | 972 | 885 | 1037 | 939 |
| 6 | 193 | 1396 | 1280 | 1267 | 1357 | 1344 | 1241 | 1421 | 1305 |
| 7 | 223 | 1836 | 1702 | 1687 | 1791 | 1776 | 1657 | 1865 | 1731 |
| 9 | 283 | 2896 | 2726 | 2707 | 2839 | 2820 | 2669 | 2933 | 2763 |
| 10 | 313 | 3516 | 3328 | 3307 | 3453 | 3432 | 3265 | 3557 | 3369 |
| 12 | 373 | 4936 | 4712 | 4687 | 4861 | 4836 | 4637 | 4985 | 4761 |
| 14 | 433 | 6596 | 6336 | 6307 | 6509 | 6480 | 6249 | 6653 | 6393 |
| 15 | 463 | 7516 | 7238 | 7207 | 7423 | 7392 | 7145 | 7577 | 7299 |
| 17 | 523 | 9536 | 9222 | 9187 | 9431 | 9396 | 9117 | 9605 | 9291 |
| 20 | 613 | 13016 | 12648 | 12607 | 12893 | 12852 | 12525 | 13097 | 12729 |
| 21 | 643 | 14296 | 13910 | 13867 | 14167 | 14124 | 13781 | 14381 | 13995 |
| 22 | 673 | 15636 | 15232 | 15187 | 15501 | 15456 | 15097 | 15725 | 15321 |
| 24 | 733 | 18496 | 18056 | 18007 | 18349 | 18300 | 17909 | 18593 | 18153 |
| 27 | 823 | 23236 | 22742 | 22687 | 23071 | 23016 | 22577 | 23345 | 22851 |
| 28 | 853 | 24936 | 24424 | 24367 | 24765 | 24708 | 24253 | 25049 | 24537 |
| 29 | 883 | 26696 | 26166 | 26107 | 26519 | 26460 | 25989 | 26813 | 26283 |

## Problema generale VIII.

Propoſito diuiſore $30a-13$ pro ſingulis reſiduis $r$ inuenire quotos $q$ formulam $30q+r$ diuiſibilem reddentes per $30a-13$.

Solutio.

## Solutio.

Cum minimus numerus hoc diuiſore ſignandus ſit $30 \cdot 30 aa - 30 \cdot 26 a + 169$, erit $q = 30 aa - 26 a + 5$ et $r = 19$, vnde ad numerum $(30 aa - 26 a + 5)^{(q)} + 19^{(r)}$ continuo addi debet formula $60 a - 26 = 2 a^{(q)} - 26^{(r)}$ ſeu $(2 a - 1)^{(q)} + 4^{(r)}$ vti ſequens calculus declarat

| $q$ | - | $r$ |
|---|---|---|
| $30 aa - 26 a + 5$ | - | 19 |
| $30 aa - 24 a + 4$ | - | 23 |
| $30 aa - 22 a + 3$ | - | 27 |
| $30 aa - 20 a + 3$ | - | 1 |
| $30 aa - 18 a + 2$ | - | 5 |
| $30 aa - 16 a + 1$ | - | 9 |
| $30 aa - 14 a + 0$ | - | 13 |
| $30 aa - 12 a - 1$ | - | 17 |
| $30 aa - 10 a - 2$ | - | 21 |
| $30 aa - 8 a - 3$ | - | 25 |
| $30 aa - 6 a - 4$ | - | 29 |
| $30 aa - 4 a - 4$ | - | 3 |
| $30 aa - 2 a - 5$ | - | 7 |
| $30 aa + 0 a - 6$ | - | 11 |
| $30 aa + 2 a - 7$ | - | 15 |
| $30 aa + 4 a - 8$ | - | 19. |

Quo-

Quotos autem hinc pro ſingulis noſtris reſiduis $r$ ordine hic exponamus

| $r$ | $q$ |
|---|---|
| 1 | $30aa - 20a + 3 + n(30a - 13)$ |
| 7 | $30aa - 2a - 5 + n(30a - 13)$ |
| 11 | $30aa + 0a - 6 + n(30a - 13)$ |
| 13 | $30aa - 14a + 0 + n(30a - 13)$ |
| 17 | $30aa - 12a - 1 + n(30a - 13)$ |
| 19 | $30aa - 26a + 5 + n(30a - 13)$ |
| 23 | $30aa - 24a + 4 + n(30a - 13)$ |
| 29 | $30aa - 6a - 4 + n(30a - 13)$. |

Cum diuiſor ille $30a - 13$ in forma $30q + 17$ ſit contentus, ex tabula prima excerpantur ordine numeri primi formulae $30q + 17$, eritque pro ſingulis $a = q + 1$ hincque ſequens *tabula generalis* conſtruatur

| *a* | Diuiſor | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 17 | 13 | 23 | 24 | 16 | 17 | 9 | 10 | 20 |
| 2 | 47 | 83 | 111 | 114 | 92 | 95 | 73 | 76 | 104 |
| 4 | 107 | 403 | 467 | 474 | 424 | 431 | 381 | 388 | 452 |
| 5 | 137 | 653 | 735 | 744 | 680 | 689 | 625 | 634 | 716 |
| 6 | 167 | 963 | 1063 | 1074 | 996 | 1007 | 929 | 940 | 1040 |
| 7 | 197 | 1333 | 1451 | 1464 | 1372 | 1385 | 1293 | 1306 | 1224 |
| 8 | 227 | 1763 | 1899 | 1914 | 1808 | 1823 | 1817 | 1732 | 1868 |
| 9 | 257 | 2253 | 2407 | 2424 | 2304 | 2321 | 2201 | 2218 | 2372 |
| 11 | 317 | 2413 | 3603 | 2624 | 3476 | 3497 | 3349 | 3370 | 3560 |
| 12 | 347 | 4083 | 4291 | 4314 | 4152 | 4175 | 4013 | 4036 | 4244 |
| 16 | 467 | 7363 | 7643 | 7674 | 7456 | 7487 | 7279 | 7300 | 7580 |
| 19 | 557 | 10453 | 10787 | 10824 | 10564 | 10601 | 10341 | 10378 | 10712 |
| 20 | 587 | 11603 | 11955 | 11994 | 11720 | 11759 | 11485 | 11524 | 11876 |
| 21 | 617 | 12813 | 13183 | 13224 | 12936 | 12977 | 12689 | 12730 | 13100 |
| 22 | 647 | 14083 | 14471 | 14514 | 14212 | 14255 | 13953 | 13996 | 14384 |
| 23 | 677 | 15513 | 15819 | 15864 | 15548 | 15593 | 15277 | 15322 | 15728 |
| 27 | 797 | 21333 | 21811 | 21864 | 21492 | 21545 | 21173 | 21226 | 21704 |
| 28 | 827 | 22963 | 23459 | 23514 | 23128 | 23183 | 22797 | 22852 | 23348 |
| 29 | 857 | 24653 | 25167 | 25224 | 24824 | 24881 | 24481 | 24538 | 25052 |
| 30 | 887 | 26403 | 26935 | 26994 | 26580 | 26639 | 26225 | 26284 | 26816 |
| 32 | 947 | 30083 | 30651 | 30714 | 30272 | 30335 | 29893 | 29956 | 30524 |
| 33 | 977 | 32013 | 32599 | 32664 | 32208 | 32273 | 31817 | 31882 | 32468 |

## Scholion generale.

Quoniam diuiſores primos maiores in tabulam numerorum primorum introduci non conuenit, niſi omnes minores iam fuerint expediti, omnino neceſſe eſt, vt ex octo tabulis praecedentibus vna tabula ma-

xime

xime generalis conficiatur, in qua pro omnibus diuiſoribus primis ordine diſpoſitis minimi quoti *q* exhibeantur ſingulis noſtris octo reſiduis reſpondentes, quorum areolae ſingulis illis diuiſoribus ſignari debent.

## TABVLA AVXILIARIS VNIVERSALIS

### pro omnibus diuiſoribus primis a 7 vsque ad 1000 continuatis, minimos quotos *q* exhibens ſingulis octo reſiduis reſpondentes.

| Diuiſores | Reſidua | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
| 7 | 3 | 7 | 5 | 4 | 2 | 1 | 6 | 3 |
| 11 | 4 | 6 | 11 | 8 | 13 | 10 | 4 | 6 |
| 13 | 16 | 8 | 7 | 13 | 12 | 5 | 17 | 9 |
| 17 | 13 | 23 | 24 | 16 | 17 | 9 | 10 | 20 |
| 19 | 12 | 27 | 18 | 23 | 14 | 19 | 29 | 25 |
| 23 | 36 | 22 | 28 | 31 | 37 | 17 | 23 | 32 |
| 29 | 28 | 51 | 47 | 45 | 41 | 39 | 35 | 29 |
| 31 | 31 | 38 | 42 | 44 | 48 | 50 | 54 | 60 |
| 37 | 53 | 75 | 65 | 60 | 50 | 45 | 72 | 57 |
| 41 | 56 | 64 | 83 | 72 | 91 | 80 | 58 | 66 |
| 43 | 96 | 70 | 67 | 87 | 84 | 61 | 101 | 75 |
| 47 | 83 | 101 | 114 | 92 | 95 | 73 | 76 | 104 |
| 53 | 136 | 104 | 118 | 125 | 139 | 93 | 107 | 128 |
| 59 | 116 | 163 | 155 | 151 | 143 | 139 | 131 | 119 |
| 61 | 124 | 136 | 144 | 148 | 156 | 160 | 168 | 180 |
| 67 | 163 | 203 | 185 | 176 | 158 | 149 | 198 | 171 |
| 71 | 168 | 182 | 215 | 196 | 229 | 210 | 172 | 186 |

 Diui-

| Diuiſores | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 73 | 236 | 192 | 187 | 221 | 216 | 177 | 245 | 201 |
| 79 | 208 | 271 | 234 | 255 | 218 | 239 | 281 | 265 |
| 83 | 296 | 246 | 268 | 279 | 301 | 229 | 251 | 284 |
| 89 | 264 | 335 | 323 | 317 | 305 | 299 | 287 | 269 |
| 97 | 333 | 391 | 365 | 352 | 308 | 313 | 384 | 345 |
| 101 | 34[illegible] | 360 | 407 | 380 | 427 | 400 | 346 | 366 |
| 103 | 436 | 374 | 367 | 415 | 408 | 353 | 449 | 387 |
| 107 | 403 | 467 | 474 | 424 | 431 | 381 | 388 | 452 |
| 109 | 396 | 483 | 432 | 461 | 410 | 439 | 497 | 475 |
| 113 | 516 | 448 | 478 | 493 | 523 | 425 | 455 | 460 |
| 127 | 563 | 639 | 605 | 588 | 554 | 537 | 630 | 579 |
| 131 | 572 | 598 | 659 | 624 | 685 | 650 | 580 | 606 |
| 137 | 653 | 735 | 744 | 680 | 689 | 625 | 634 | 716 |
| 139 | 644 | 755 | 690 | 727 | 662 | 699 | 773 | 745 |
| 149 | 740 | 859 | 839 | 829 | 809 | 799 | 779 | 749 |
| 151 | 760 | 790 | 810 | 820 | 840 | 850 | 870 | 900 |
| 157 | 853 | 947 | 905 | 884 | 842 | 821 | 936 | 873 |
| 163 | 1016 | 918 | 907 | 983 | 972 | 885 | 1037 | 939 |
| 167 | 96[illegible] | 1063 | 1074 | 996 | 1007 | 929 | 940 | 1040 |
| 173 | 1136 | 1032 | 1078 | 1101 | 1147 | 997 | 1043 | 1112 |
| 179 | 1068 | 1211 | 1187 | 1175 | 1151 | 1139 | 1115 | 1079 |
| 181 | 1092 | 1128 | 1152 | 1164 | 1188 | 1200 | 1224 | 1260 |
| 191 | 1216 | 1254 | 1343 | 1292 | 1381 | 1330 | 1228 | 1266 |
| 193 | 1396 | 1280 | 1267 | 1357 | 1344 | 1241 | 1421 | 1305 |
| 197 | 1333 | 1451 | 1464 | 1372 | 1385 | 1293 | 1306 | 1224 |
| 199 | 1320 | 1479 | 1386 | 1439 | 1346 | 1399 | 1505 | 1465 |
| 211 | 1484 | 1526 | 1554 | 1568 | 1596 | 1610 | 1638 | 1680 |
| 223 | 1836 | 1702 | 1687 | 1791 | 1776 | 1657 | 1865 | 1731 |
| 227 | 1763 | 1899 | 1914 | 1808 | 1823 | 1817 | 1732 | 1868 |

Diui-

| Diuiſore | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 229 | 1748 | 1931 | 1824 | 1885 | 1778 | 1839 | 1961 | 1915 |
| 233 | 1996 | 1856 | 1918 | 1949 | 2011 | 1809 | 1871 | 1876 |
| 239 | 1904 | 2095 | 2063 | 2047 | 2015 | 1999 | 1967 | 1919 |
| 241 | 1936 | 1984 | 2016 | 2032 | 2064 | 2080 | 2112 | 2160 |
| 251 | 2100 | 2150 | 2267 | 2200 | 2317 | 2250 | 2116 | 2166 |
| 257 | 2253 | 2407 | 2424 | 2304 | 2321 | 2201 | 2218 | 2372 |
| 263 | 2516 | 2358 | 2428 | 2463 | 2533 | 2305 | 2375 | 2480 |
| 269 | 2412 | 2627 | 2591 | 2573 | 2537 | 2519 | 2483 | 2429 |
| 271 | 2448 | 2502 | 2538 | 2556 | 2592 | 2610 | 2646 | 2700 |
| 277 | 2613 | 2779 | 2705 | 2668 | 2594 | 2557 | 2760 | 2649 |
| 281 | 2632 | 2688 | 2819 | 2744 | 2875 | 2800 | 2650 | 2706 |
| 283 | 2896 | 2726 | 2707 | 2839 | 2820 | 2669 | 2933 | 2763 |
| 293 | 3096 | 2920 | 2998 | 3037 | 3115 | 2861 | 2939 | 3056 |
| 307 | 3203 | 3387 | 3305 | 3264 | 3182 | 3141 | 3366 | 3243 |
| 311 | 3224 | 3286 | 3431 | 3348 | 3493 | 3410 | 3244 | 3306 |
| 313 | 3516 | 3328 | 3307 | 3453 | 3432 | 3265 | 3557 | 3369 |
| 317 | 3413 | 3603 | 3624 | 3476 | 3497 | 3349 | 3370 | 3560 |
| 331 | 3652 | 3718 | 3762 | 3784 | 3828 | 3850 | 3894 | 3960 |
| 337 | 3853 | 4055 | 3965 | 3920 | 3830 | 3785 | 4032 | 3897 |
| 347 | 4083 | 4291 | 4314 | 4152 | 4175 | 4013 | 4036 | 4244 |
| 349 | 4060 | 4339 | 4176 | 4269 | 4106 | 4199 | 4385 | 4315 |
| 353 | 4436 | 4224 | 4318 | 4365 | 4181 | 4153 | 4247 | 4388 |
| 359 | 4296 | 4583 | 4535 | 4511 | 4463 | 4439 | 4391 | 4319 |
| 367 | 4563 | 4783 | 4685 | 4636 | 4538 | 4489 | 4758 | 4611 |
| 373 | 4936 | 4712 | 4687 | 4861 | 4836 | 4637 | 4985 | 4761 |
| 379 | 4788 | 5091 | 4914 | 5015 | 4838 | 4939 | 5141 | 5065 |
| 383 | 5206 | 4966 | 5068 | 5119 | 5221 | 4889 | 4991 | 5144 |
| 389 | 5044 | 5355 | 5303 | 5277 | 5225 | 5199 | 5147 | 5069 |
| 397 | 5333 | 5571 | 5465 | 5412 | 5306 | 5253 | 5544 | 5385 |

| Diuiſores | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 401 | 5360 | 5440 | 5627 | 5520 | 5707 | 5600 | 5386 | 5466 |
| 409 | 5576 | 5903 | 5712 | 5821 | 5630 | 5739 | 5957 | 5875 |
| 419 | 5852 | 6187 | 6131 | 6103 | 6047 | 6019 | 5963 | 5879 |
| 421 | 5908 | 5992 | 6048 | 6076 | 6132 | 6160 | 6216 | 6300 |
| 431 | 6192 | 6278 | 6479 | 6364 | 6565 | 6450 | 6220 | 6306 |
| 433 | 6596 | 6336 | 6307 | 6509 | 6480 | 6249 | 6653 | 6393 |
| 439 | 6424 | 6775 | 6570 | 6687 | 6482 | 6599 | 6833 | 6745 |
| 443 | 6896 | 6630 | 6748 | 6693 | 6575 | 6541 | 6659 | 6836 |
| 449 | 6720 | 7079 | 7019 | 6989 | 6929 | 6899 | 6839 | 6749 |
| 457 | 7053 | 7327 | 7205 | 7144 | 7022 | 6961 | 7296 | 7113 |
| 461 | 7084 | 7176 | 7391 | 7238 | 7483 | 7360 | 7114 | 7206 |
| 463 | 7516 | 7238 | 7207 | 7423 | 7392 | 7145 | 7577 | 7299 |
| 467 | 7363 | 7643 | 7674 | 7456 | 7487 | 7279 | 7300 | 7580 |
| 479 | 7648 | 8031 | 7967 | 7935 | 7871 | 7839 | 7775 | 7679 |
| 487 | 8003 | 8295 | 8165 | 8100 | 7970 | 7905 | 8262 | 8067 |
| 491 | 8036 | 8134 | 8363 | 8232 | 8461 | 8330 | 8068 | 8166 |
| 499 | 8300 | 8699 | 8466 | 8599 | 8366 | 8499 | 8867 | 8665 |
| 503 | 8836 | 8534 | 8668 | 8734 | 8869 | 8433 | 8567 | 8768 |
| 509 | 8636 | 9043 | 8975 | 8941 | 8873 | 8839 | 8771 | 8669 |
| 521 | 9048 | 9152 | 9395 | 9256 | 9499 | 9360 | 9082 | 9186 |
| 523 | 9536 | 9222 | 9187 | 9431 | 9396 | 9117 | 9605 | 6291 |
| 541 | 9756 | 9864 | 9936 | 9972 | 10044 | 10080 | 10152 | 10260 |
| 547 | 10083 | 10411 | 10265 | 10192 | 10046 | 9973 | 10374 | 10155 |
| 557 | 10453 | 10787 | 10824 | 10564 | 10601 | 10341 | 10378 | 10712 |
| 563 | 11016 | 10678 | 10828 | 10903 | 11053 | 10565 | 10715 | 10940 |
| 569 | 10792 | 11247 | 11171 | 11133 | 11057 | 11019 | 10943 | 10829 |
| 571 | 10868 | 10982 | 11058 | 11096 | 11172 | 11210 | 11286 | 11400 |
| 577 | 11213 | 11559 | 11405 | 11328 | 11174 | 11097 | 11520 | 11289 |
| 587 | 11603 | 11955 | 11994 | 11720 | 11759 | 11485 | 11524 | 11876 |

Diui-

| Diuiſores | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 593 | 12196 | 11840 | 11998 | 12077 | 12235 | 11721 | 11879 | 12116 |
| 599 | 11960 | 12439 | 12359 | 12319 | 12239 | 12199 | 12119 | 11999 |
| 601 | 12040 | 12160 | 12240 | 12280 | 12360 | 12400 | 12480 | 12600 |
| 607 | 12403 | 12767 | 12605 | 12524 | 12362 | 12281 | 12726 | 12483 |
| 613 | 13016 | 12648 | 12607 | 12893 | 12852 | 12525 | 13097 | 12729 |
| 617 | 12813 | 13183 | 13224 | 12936 | 12977 | 12689 | 12730 | 13100 |
| 619 | 12772 | 13267 | 12978 | 13143 | 12854 | 13019 | 13349 | 13225 |
| 631 | 13272 | 13398 | 13482 | 13524 | 13608 | 13650 | 13734 | 13860 |
| 641 | 13696 | 13824 | 14123 | 13952 | 14251 | 14080 | 13738 | 13866 |
| 643 | 14296 | 13910 | 13867 | 14167 | 14124 | 13781 | 14381 | 13995 |
| 647 | 14083 | 14471 | 14514 | 14212 | 14255 | 13953 | 13996 | 14384 |
| 653 | 14736 | 14344 | 14518 | 14605 | 14779 | 14213 | 14387 | 14648 |
| 659 | 14476 | 15003 | 14915 | 14871 | 14783 | 14739 | 14651 | 14519 |
| 661 | 14564 | 14696 | 14784 | 14828 | 14916 | 14960 | 15048 | 15180 |
| 673 | 15636 | 15232 | 15187 | 15501 | 15456 | 15097 | 15725 | 15321 |
| 677 | 15513 | 15819 | 15864 | 15548 | 15593 | 15277 | 15322 | 15728 |
| 683 | 16096 | 15686 | 15868 | 15959 | 16141 | 15549 | 15731 | 16004 |
| 691 | 15916 | 16054 | 16146 | 16192 | 16284 | 16330 | 16422 | 16560 |
| 701 | 16380 | 16520 | 16847 | 16660 | 16987 | 16800 | 16426 | 16566 |
| 709 | 16756 | 17323 | 16992 | 17181 | 16850 | 17039 | 17417 | 17275 |
| 719 | 17232 | 17807 | 17711 | 17663 | 17567 | 17519 | 17423 | 17279 |
| 727 | 17763 | 18199 | 18005 | 17908 | 17714 | 17617 | 18150 | 17859 |
| 733 | 18496 | 18056 | 18007 | 18349 | 18300 | 17909 | 18593 | 18153 |
| 739 | 18204 | 18795 | 18450 | 18647 | 18302 | 18499 | 18893 | 18745 |
| 743 | 18996 | 18550 | 18748 | 18847 | 19045 | 18401 | 18599 | 18896 |
| 751 | 18800 | 18950 | 19050 | 19100 | 19200 | 19250 | 19350 | 19500 |
| 757 | 19253 | 19707 | 19505 | 19404 | 19202 | 19101 | 19656 | 19353 |
| 761 | 19304 | 19456 | 19811 | 19608 | 19963 | 19760 | 19354 | 19506 |
| 769 | 19712 | 20327 | 19968 | 20173 | 19814 | 20019 | 20429 | 20275 |

Diui-

| Diuiſores | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 773 | 20536 | 20072 | 20278 | 20381 | 20587 | 19917 | 20123 | 20430 |
| 787 | 20803 | 21275 | 21065 | 20960 | 20750 | 20645 | 21222 | 20907 |
| 797 | 21333 | 21811 | 21864 | 21492 | 21545 | 21173 | 21226 | 21704 |
| 809 | 21816 | 22463 | 22355 | 22301 | 22193 | 22139 | 22031 | 21869 |
| 811 | 21924 | 22086 | 22194 | 22248 | 22356 | 22410 | 22518 | 22680 |
| 821 | 22468 | 22632 | 23015 | 22796 | 23179 | 22960 | 22521 | 22686 |
| 823 | 23236 | 22742 | 22687 | 23071 | 23016 | 22577 | 23345 | 22851 |
| 827 | 22963 | 23459 | 23514 | 23128 | 23183 | 22797 | 22852 | 23348 |
| 829 | 22908 | 23571 | 23184 | 23405 | 23018 | 23239 | 23681 | 23515 |
| 839 | 23464 | 24135 | 24023 | 23967 | 23855 | 23799 | 23687 | 23519 |
| 853 | 24936 | 24424 | 24367 | 24765 | 24708 | 24253 | 25049 | 24537 |
| 857 | 24653 | 25167 | 25224 | 24824 | 24881 | 24481 | 24538 | 25052 |
| 859 | 24596 | 25283 | 24882 | 25101 | 24710 | 24939 | 25397 | 25225 |
| 863 | 25516 | 24998 | 25228 | 25343 | 25573 | 24825 | 25055 | 25400 |
| 877 | 25813 | 26339 | 26105 | 25988 | 25754 | 25637 | 26280 | 25929 |
| 881 | 25872 | 26048 | 26459 | 26224 | 26635 | 26400 | 25930 | 26106 |
| 883 | 26696 | 26166 | 26107 | 26519 | 26460 | 25989 | 26313 | 26283 |
| 887 | 26403 | 26935 | 26994 | 26580 | 26639 | 26225 | 26284 | 26816 |
| 907 | 27603 | 28147 | 27905 | 27784 | 27542 | 27421 | 28086 | 27723 |
| 911 | 27664 | 27846 | 28271 | 28028 | 28453 | 28210 | 27724 | 27906 |
| 919 | 28152 | 28887 | 28458 | 28703 | 28274 | 28519 | 29009 | 28825 |
| 929 | 28768 | 29511 | 29387 | 29325 | 29201 | 29139 | 29015 | 28829 |
| 937 | 29453 | 30015 | 29765 | 29640 | 29390 | 29265 | 29952 | 29577 |
| 941 | 29716 | 29704 | 30143 | 29892 | 30331 | 30080 | 29578 | 29766 |
| 947 | 30083 | 30651 | 30714 | 30272 | 30335 | 29893 | 29956 | 30524 |
| 953 | 31036 | 30464 | 30718 | 30845 | 31099 | 30273 | 30527 | 30908 |
| 967 | 31363 | 31943 | 31685 | 31556 | 31298 | 31169 | 31878 | 31491 |
| 971 | 31428 | 31622 | 32075 | 31816 | 32269 | 32010 | 31492 | 31686 |
| 977 | 32013 | 32599 | 32664 | 32208 | 32273 | 31817 | 31882 | 32468 |

Diui-

| Diuiſores | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 983 | 32996 | 32406 | 32668 | 32799 | 33061 | 32209 | 32471 | 32864 |
| 991 | 32736 | 32934 | 33066 | 33132 | 33264 | 33330 | 33462 | 33660 |
| 997 | 33333 | 33931 | 33665 | 33532 | 33266 | 33133 | 33864 | 33465 |
| 1009 | 33936 | 34743 | 34272 | 34541 | 34070 | 34339 | 34877 | 34675 |

## Problema.

Tabulam numerorum primorum quousque libuerit continuare, quae ſimul omnium numerorum non primorum diuiſores minimos exhibeat.

## Solutio.

Ante omnia in ſingulis paginis quotquot erit opus lineae illae tam verticales quam horizontales quae in pagina hic annexa cernuntur, erunt ducendae; Qui labor, cum per ſe eſſet immenſus, eum commodiſſime in typographia exſequi licebit; vbi omnes paginae talibus retibus ſignatae breui temporis ſpatio excudi poterunt. Quin etiam, cum ſingulae paginae in ſuprema linea horizontali octo noſtra reſidua 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 referant, ea ſtatim in omnibus paginis ſimul typo exprimi conueniet. Deinde quia primae columnae verticales quotos $q$ ordine numerorum naturali procedentes complectuntur eorumque quinquaginta ſingulis paginis inſeri debent, horum numerorum binae poſtremae notae etiam in typographia adiungi poterunt: dum alternatim numeri 00, 01, 02, 03, 04, 05 vsque ad 49, tum vero 50, 51, 52, 53 etc. vsque ad 99 in

his primis columnis repraeſentuntur, quibus deinceps centuriae ſeu notae praecedentes facili negotio calamo praefiguntur; vbi quidem ſufficiet, hoc in ſolo ſupremo loco notaſſe. Quibus praeparatis ſinguli diuiſores primi 7, 11, 13, 17 etc. ordine areolis ſuis per omnes paginas inſcribantur. A ſeptenario igitur erit incipiendum, qui, cum in prima columna reſiduum referente primum quoto $q = 3$ adſcribi debeat, ſequentes quoti continuo ſeptenario augendi pariter numero 7 deſignari debebunt, qui labor facile per omnes ſequentes tabulas continuabitur; ſimilique modo pro reliquis 11, 13, 17 etc. hoc opus abſoluetur. Deinde eodem modo diuiſor 11 per omnes paginas pro ſingulis reſiduis areolis debitis inſcribatur, ſi quidem adhuc erunt vacuae; tum vero pari modo negotium pro omnibus ſequentibus diuiſoribus primis inſtituatur; ſcilicet ſi ad diuiſorem quemcunque primum qui ſit D fuerit peruentum, pro eo tabula praecedens generalis minimos praebet quotos $q$, ſingulis octo reſiduis $r$ reſpondentes; quibus notatis in ſingulis columnis eae areolae hoc diviſore D ſignentur, quae reſpondebunt quotis $q + D$, $q + 2D$, $q + 3D$, $q + 4D$ etc. donec ad finem perueniatur; vbi autem iſte diuiſor D primum in his tabulis occurret, omnes areolae praecedentes ſigno numerorum primorum $p$ impleantur: ita ſi hae tabulae non vltra vnum millionem extendi debeant, vltimus diuiſor primus erit 997 et vltimus quotus $q = 33333$; ſicque totum hoc negotium ad finem erit perductum. Tum igitur ſi numerus quicunque

M mil-

M millionem non ſuperans examinandus proponatur, is per 30 diuiſus praebeat quotum $= q$ et reſiduum $= r$; quibus binis valoribus in tabula quaeratur areola reſpondens, et numerus ibi ſignatus oſtendet minimum diuiſorem iſtius numeri: ſin autem in ea areola reperiatur littera $p$, id erit ſignum, propoſitum numerum M eſſe primum.

Quo autem hoc opus, quod vtique multum temporis poſtularet, ſi ab vna perſona abſolui deberet, facilius exſequi liceat, totum laborem plures perſonae commode inter ſe partiri poterunt, dum quilibet certum penſum abſoluendum ſuſcipiet. Ita cum hae tabulae, ſi quidem ad vnum millionem ſint extendendae, vsque ad quotum $q = 33400$ continuari debeant, totus labor in ſeptem penſa diſtribui poterit, quorum primum a $q = 0$ vsque ad 5000, ſecundum ab hoc termino vsque ad $q = 10000$, tertium ab hoc vsque ad $q = 15000$, quartum ab hoc termino vsque ad $q = 20000$, quintum ab hoc vsque ad $q = 25000$, ſextum ab hoc termino vsque ad $q = 30000$ et ſeptimum ab hoc termino vsque ad finem porrigetur. Hoc pacto, quia ſingulae paginae quinquaginta valores ipſius $q$ complectuntur, in quolibet penſo habebuntur centum paginae adimplendae.

Poſteriora quidem penſa continuo plus laboris requirent: quia in iis plures diuiſores occurrunt. Quo hoc clarius appareat, ponamus penſum aliquod incipere a valore $q = A$, et quia ſemper a diuiſoribus minimis ordine procedi opportet, pro quolibet diui-

 ſore

ſore D ante omnia quaeratur eius multiplum proxime minus quam A, quod ſit *m* D; tum iſtud multiplum *m* D addatur ad valores omnes ipſius *q* in noſtra tabula diuiſori D reſpondentes. Sicque habebuntur totidem areolae quibus iſte diuiſor primus D erit inſcribendus; ſequentes autem areolae facillime obtinentur, dum illi primi valores ipſius *q* continuo ipſo diuiſore D augentur. Harum regularum ope duas vltimas paginas huiusmodi tabularum expediuimus, quae valores ipſius *q* a termino 33300 vsque ad 33400 complectuntur.

## Scholion.

Quanquam ope tabulae noſtrae auxiliaris omnes diuiſores primi haud difficulter in tabulam numerororum primorum inſeruntur: tamen, quando iam ad diuiſores primos maiores fuerit peruentum, etiam alio modo eorum inſertio in hanc tabulam perfici poterit; id quod imprimis pro diuiſoribus maximis laborem mirifice diminuit. Sit enim A diuiſor quicunque primus maior quam 100, qui, quia primum inſcribitur areolae numero A A reſpondenti, deinceps tantum pro huiusmodi productis A B locum inueniet, vbi alter factor B dum ipſe maior quam A nullum habet diuiſorem ipſo numero A minorem. Quare cum $A > 100$, numerus B non maior erit quam 10000; vnde, niſi is fuerit primus, diuiſorem habebit centenario minorem, qui ergo tabulae inſcribi deberet non autem numerus A; quam ob rem iſte diuiſor A tum tantum erit inſcribendus, quando factor

| 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|
| 67 | 307 | 7 | 13 | 23 | 29 |
| *p* | 463 | *p* | 11 | 337 | 7 |
| 11 | 7 | *p* | *p* | 47 | *p* |
| 7 | 17 | 101 | *p* | 277 | *p* |
| 479 | *p* | 11 | *p* | 7 | 13 |
| 23 | 433 | *p* | *p* | 19 | *p* |
| *p* | 53 | *p* | 7 | 11 | 131 |
| *p* | *p* | 7 | 109 | 809 | 17 |
| 673 | 13 | 73 | 373 | *p* | 7 |
| 467 | 7 | 19 | 179 | *p* | 23 |
| 7 | 11 | 59 | 29 | 409 | *p* |
| 17 | 227 | *p* | *p* | 7 | *p* |

Pro ſing
areolis in

Ad pag. 180.

| q | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 33300 | 19 | p | 13 | 347 | p | 7 | p | p |
| 01 | 11 | 13 | 71 | p | 7 | 127 | 11 | 107 |
| 02 | 7 | p | 83 | 17 | 19 | 29 | p | 7 |
| 03 | p | 11 | p | 7 | 17 | p | 79 | 11 |
| 04 | 191 | 229 | 7 | p | 29 | p | 23 | p |
| 05 | 73 | 821 | 31 | 11 | 13 | p | 7 | 199 |
| 06 | p | 7 | 19 | 13 | p | p | 89 | 17 |
| 07 | 41 | p | p | 31 | 541 | 7 | p | p |
| 08 | 61 | 383 | 11 | 29 | 7 | 37 | 223 | p |
| 09 | 7 | 17 | 23 | 59 | p | 331 | 41 | 7 |
| 10 | 181 | p | 17 | 7 | 11 | 641 | 13 | p |
| 11 | p | 233 | 7 | 19 | 31 | 13 | 163 | p |
| 12 | 11 | 911 | p | 23 | p | 17 | 7 | p |
| 13 | 97 | 7 | 13 | 83 | 37 | 31 | 17 | 19 |
| 14 | 53 | 11 | p | p | p | 7 | 73 | 11 |
| 15 | p | 19 | 503 | 601 | 7 | 151 | 257 | 13 |
| 16 | 7 | 107 | p | 11 | 499 | p | 191 | 7 |
| 17 | 23 | 281 | p | 7 | 53 | p | 19 | 41 |
| 18 | p | 193 | 7 | p | 13 | 11 | 499 | 83 |
| 19 | 19 | 199 | 11 | 13 | 79 | 73 | 7 | p |
| 20 | 29 | 7 | p | p | 17 | 157 | p | 37 |
| 21 | p | 59 | 149 | 47 | 11 | 7 | p | 29 |
| 22 | 13 | p | p | 479 | 7 | 163 | p | 137 |
| 23 | 7 | 953 | 107 | 37 | 43 | 223 | 11 | 7 |
| 24 | p | 599 | p | 7 | 47 | 13 | 653 | p |
| 25 | 31 | 11 | 7 | p | 173 | p | p | 11 |
| 26 | p | 17 | 13 | 43 | 433 | 19 | 7 | p |
| 27 | 487 | 7 | 17 | 11 | 139 | 167 | 23 | 283 |
| 28 | 67 | 467 | 37 | p | 109 | 7 | p | 13 |
| 29 | p | 691 | 73 | p | 7 | 11 | 71 | 307 |
| 30 | 7 | 47 | 11 | 19 | p | 991 | 17 | 7 |
| 31 | p | 113 | 577 | 7 | 13 | 29 | p | 233 |
| 32 | p | 31 | 7 | 13 | 11 | p | p | 19 |
| 33 | 17 | 757 | 101 | p | 29 | p | 7 | 47 |
| 34 | 11 | 7 | 41 | p | p | p | 11 | 353 |
| 35 | 13 | 53 | 79 | 23 | 83 | 7 | 37 | 197 |
| 36 | p | 11 | 31 | 17 | 7 | p | 13 | 11 |
| 37 | 7 | p | p | 29 | 17 | 13 | p | 7 |
| 38 | 19 | 37 | p | 7 | 617 | p | 53 | p |
| 39 | p | 71 | 7 | p | p | 263 | p | p |
| 40 | 23 | 13 | p | p | 19 | 11 | 7 | 17 |
| 41 | p | 7 | 11 | 67 | 23 | p | p | 13 |
| 42 | p | 191 | 89 | p | 31 | 7 | 941 | p |
| 43 | p | 17 | 47 | p | 7 | 43 | p | 71 |
| 44 | 7 | 701 | 17 | p | 13 | 23 | 107 | 7 |
| 45 | 11 | p | 97 | 7 | p | 19 | 11 | p |
| 46 | p | 181 | 7 | p | p | 17 | p | p |
| 47 | 269 | 11 | 907 | p | p | p | 7 | 11 |
| 48 | 13 | 7 | 563 | p | p | 173 | 31 | 769 |
| 49 | 29 | 23 | 43 | 11 | 311 | 7 | 13 | 523 |

| q | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 33350 | 17 | p | 67 | 307 | 7 | 13 | 23 | 29 |
| 51 | 7 | p | p | 463 | p | 11 | 337 | 7 |
| 52 | 157 | 43 | 11 | 7 | p | p | 47 | p |
| 53 | 37 | 13 | 7 | 17 | 101 | p | 277 | p |
| 54 | p | 89 | 479 | p | 11 | p | 7 | 13 |
| 55 | p | 7 | 23 | 433 | p | p | 19 | p |
| 56 | 11 | 41 | p | 53 | p | 7 | 11 | 131 |
| 57 | 19 | 421 | p | p | 7 | 109 | 809 | 17 |
| 58 | 7 | 11 | 673 | 13 | 73 | 373 | p | 7 |
| 59 | 47 | p | 467 | 7 | 19 | 179 | p | 23 |
| 60 | p | 17 | 7 | 11 | 59 | 29 | 409 | p |
| 61 | 13 | 397 | 17 | 227 | p | p | 7 | p |
| 62 | p | 7 | 569 | 241 | 29 | 11 | 13 | p |
| 63 | 23 | 31 | 11 | 73 | p | 7 | 67 | p |
| 64 | p | 839 | p | 41 | 7 | 19 | 17 | 61 |
| 65 | 7 | 197 | 13 | 571 | 11 | p | p | 7 |
| 66 | p | 13 | 419 | 7 | 43 | p | p | 79 |
| 67 | 11 | p | 7 | p | p | 23 | 11 | 13 |
| 68 | p | 67 | 29 | 19 | 103 | 137 | 7 | p |
| 69 | 61 | 7 | 127 | 31 | p | p | p | 11 |
| 70 | 971 | p | 181 | 17 | 13 | 7 | p | 19 |
| 71 | 149 | 97 | p | 11 | 7 | 491 | p | p |
| 72 | 7 | 19 | 59 | p | p | 41 | 37 | 7 |
| 73 | p | p | 233 | 7 | 31 | 11 | 23 | p |
| 74 | 13 | 337 | 7 | 131 | p | 251 | 19 | 17 |
| 75 | 359 | 37 | 41 | 103 | p | 31 | 7 | p |
| 76 | 19 | 7 | p | 113 | 11 | 13 | p | 163 |
| 77 | p | 17 | p | p | p | 7 | 137 | 89 |
| 78 | 11 | p | 13 | p | 7 | 439 | 11 | p |
| 79 | 7 | 13 | p | 109 | p | p | 31 | 7 |
| 80 | p | 11 | p | 7 | 229 | 17 | 887 | 11 |
| 81 | p | 61 | 7 | 23 | p | 67 | 17 | p |
| 82 | 353 | p | 19 | 11 | 193 | 37 | 7 | 23 |
| 83 | p | 7 | p | 157 | 13 | 19 | 43 | p |
| 84 | 17 | p | p | 13 | 283 | 7 | 367 | p |
| 85 | p | 547 | 11 | p | 7 | p | 29 | 31 |
| 86 | 7 | p | p | p | 71 | 43 | 953 | 7 |
| 87 | 13 | 101 | p | 7 | 11 | p | 73 | p |
| 88 | 79 | 53 | 7 | 937 | 17 | p | 13 | p |
| 89 | 11 | 983 | 61 | p | p | 13 | 7 | 19 |
| 90 | 37 | 7 | 47 | p | 67 | 23 | p | 701 |
| 91 | 311 | 11 | 13 | p | 29 | 7 | 41 | 11 |
| 92 | 59 | 13 | 43 | 139 | 7 | 73 | p | 347 |
| 93 | 7 | p | p | 11 | p | p | 19 | 7 |
| 94 | p | 17 | p | 7 | 241 | p | 127 | 37 |
| 95 | 19 | 23 | 7 | 29 | 601 | 11 | 89 | 59 |
| 96 | 71 | 271 | 11 | 83 | 13 | 47 | 7 | p |
| 97 | p | 7 | 29 | 13 | 19 | 17 | p | 223 |
| 98 | p | p | 31 | p | 11 | 7 | 17 | 359 |
| 99 | 113 | p | p | p | 7 | p | 47 | 41 |

tor B fuerit numerus primus. Hinc igitur propoſito huiusmodi diuiſore primo A, pro B excerpantur ex noſtra tabula omnes numeri primi maiores quam A, eo vsque, donec productum A B ſuperet vnum millionem; hisque omnibus productis in tabula noſtra inſcribi debebit numerus A, vtpote minimus eorumdiuiſor primus. Quo autem haec operatio facilius ad formam noſtram numerorum generalem $30q+r$ reuocari poſſit, ponamus eſſe $A=30a+\alpha$ et $B=30b+\beta$, et quia productum erit $30^2ab+30a\beta+30b\alpha+\alpha\beta$, vbi ſit $\alpha\beta=30x+y$, hoc productum in forma $30q+r$ continebitur, ſumendo $q=30ab+a\beta+b\alpha+x$ et $r=y$, conſequenter areolae huic formae reſpondenti inſcribi debebit diuiſor primus A; quod quo exemplo illuſtremus, proponatur numerus $A=907$ et excerpantur ex noſtra tabula prima pro B ſequentes numeri primi

| B | | B | | B | |
|---|---|---|---|---|---|
| $30^{(b)}$ | $11^{(\beta)}$ | $33^{(b)}$ | $1^{(\beta)}$ | $35^{(b)}$ | $1^{(\beta)}$ |
| 30 | 19 | 33 | 7 | 35 | 11 |
| 30 | 29 | 33 | 19 | 35 | 13 |
| 31 | 7 | 33 | 23 | 35 | 19 |
| 31 | 11 | 33 | 29 | 36 | 7 |
| 31 | 17 | 34 | 1 | 36 | 11 |
| 31 | 23 | 34 | 11 | 36 | 13 |
| 32 | 7 | 34 | 13 | 36 | 17 |
| 32 | 11 | 34 | 19 | 36 | 33 |
| 32 | 17 | 34 | 29 | 36 | 29 |
| 32 | 23 | | | | |

Pro ſingulis igitur productis hinc natis diuiſor 907 areolis inſcribi debet.

 Scho-

## Scholion.

Ex binis poſtremis tabulis iam omnes numeri inter limites 999000 et 1002000 examinari poſſunt, vtrum ſint primi nec ne: et caſu poſteriore ſimul eorem diuiſores minimi innoteſcunt. Patet igitur, intra hoc interuallum omnino 228 numeros primos contineri, ex quibus eos, qui vnum millionem ſuperant, operae pretium erit hic exhibere, quandoquidem alia via nondum patet, tam ingentes numeros primos aſſignandi.

### Numeri primi vno millione maiores.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1000003 | 1000429 | 1000999 | 1001467 |
| 1000009 | 1000453 | 1001003 | 1001491 |
| 1000033 | 1000457 | 1001017 | 1001501 |
| 1000037 | 1000507 | 1001023 | 1001519 |
| 1000039 | 1000537 | 1001027 | 1001527 |
| 1000081 | 1000541 | 1001041 | 1001531 |
| 1000099 | 1000547 | 1001069 | 1001549 |
| 1000117 | 1000577 | 1001087 | 1001551 |
| 1000121 | 1000579 | 1001089 | 1001563 |
| 1000133 | 1000589 | 1001093 | 1001569 |
| 1000151 | 1000609 | 1001107 | 1001587 |
| 1000159 | 1000619 | 1001123 | 1001591 |
| 1000169 | 1000621 | 1001141 | 1001593 |
| 1000171 | 1000633 | 1001153 | 1001621 |
| 1000183 | 1000639 | 1001159 | 1001629 |
| 1000187 | 1000651 | 1001173 | 1001639 |
| 1000193 | 1000667 | 1001177 | 1001659 |
| 1000199 | 1000669 | 1001191 | 1001669 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1000211 | 1000679 | 1001197 | 1001683 |
| 1000213 | 1000691 | 1001219 | 1001687 |
| 1000231 | 1000697 | 1001237 | 1001713 |
| 1000249 | 1000721 | 1001267 | 1001723 |
| 1000253 | 1000723 | 1001279 | 1001743 |
| 1000261 | 1000763 | 1001291 | 1001783 |
| 1000273 | 1000777 | 1001303 | 1001797 |
| 1000289 | 1000793 | 1001311 | 1001801 |
| 1000291 | 1000801 | 1001321 | 1001807 |
| 1000303 | 1000829 | 1001323 | 1001809 |
| 1000313 | 1000847 | 1001327 | 1001821 |
| 1000333 | 1000849 | 1001347 | 1001831 |
| 1000357 | 1000859 | 1001353 | 1001839 |
| 1000367 | 1000861 | 1001369 | 1001909 |
| 1000379 | 1000889 | 1001381 | 1001911 |
| 1000381 | 1000907 | 1001387 | 1001933 |
| 1000393 | 1000919 | 1001389 | 1001941 |
| 1000397 | 1000921 | 1001401 | 1001947 |
| 1000403 | 1000931 | 1001411 | 1001953 |
| 1000409 | 1000969 | 1001431 | 1001977 |
| 1000423 | 1000973 | 1001447 | 1001981 |
| 1000427 | 1000981 | 1001459 | 1001983 |
| | | | 1001989. |

# DE RESOLVTIONE POLYGONORVM RECTILINEORVM. DISSERTATIO PRIMA.

Auctore

*AND. IOH. LEXELL.*

I.

Cum a multo inde tempore quae ad reſolutionem triangulorum pertinent, a Geometris dilucide fuerint expoſita, mirari omnino conuenit, cur non vlterius progreſſi ſunt ad reſolutionem nimirum quadrilaterorum et reliquorum Polygonorum. Quod autem communi doctrina Trigonometriae contenti, reſolutionem caeterorum Polygonorum non ſuſceperint, id ea imprimis de cauſſa factum eſſe arbitror, quod reſolutio vniuscuiusque Polygoni ad Trigonometriae regulas reuocari poſſit, Polygonum iſtud in triangula ope diagonalium reſoluendo. Quamuis autem haec reſolutio ab iis, qui principiis Trigonometriae probe imbuti ſunt, facili negotio abſoluatur, tamen ad promotionem ſcientiae pertinere cenſendum eſt, ſi regulae tradantur pro huiusmodi reſolutione generales et a praeceptis Trigonometriae independentes, quam ob rationem multum laudandum eſſe exiſtimo conſilium Cel. *Lambert* qui primus quantum

quantum conſtat, in libro qui inſcribitur: Beyträge zur Mathematik II. Theil, ideam exhibuit Tetragonometriae ſeu doctrinae de reſolutione quadrilaterorum rectilineorum, quam deinceps laudabili induſtria exſecutam eſſe vidimus a Cl. *Iohanne Tob. Mayero* in Diſſertatione quadam Geometrica, Göttingae anno proxime praeterito, euulgata. Interim tamen diffiteri non poſſum, quin reſolutio Pentagonorum vel Polygonorum plurium adhuc laterum ſi eodem modo perficeretur, operoſos et diffuſos valde requireret labores, quapropter qui huiusmodi reſolutionem ſuſcipere vult, de eo praeprimis ſollicitus eſſe debet, vt totam hanc doctrinam ad principia pauciſſima et ſua ſimplicitate maxime conſpicua reuocare queat.

2. Reſolutio autem Polygonorum duplici modo ſuſcipi poteſt, in quouis enim Polygono praeter eas partes, quae ad ipſum eius circuitum pertinent angulos et latera quibus includitur, conſiderari quoque poſſunt lineae diagonales per quas Polygonum iſtud in triangula reſoluitur, nec non anguli, quos hae lineae diagonales cum ipſis lateribus Polygoni conſtituunt. Quare polygonorum reſolutio vel ita inſtruetur, vt tantum ad partes eius principales, angulos nimirum et latera ipſius circuitum conſtituentia adtendatur, vel etiam in hac reſolutione, conſideratio non modo partium iſtarum principalium ſed linearum quoque diagonalium et angulorum inter has diagonales et latera polygoni, adhiberi poterit. Facile autem liquet ob multiplicem combinationem diagonalium et angulorum ad ipſas pertinentium,

tam inter ſe, quam cum partibus principalibus Polygoni, poſteriorem iſtum reſolutionis modum valde late patere et pro modico ſatis numero laterum Polygoni, ſolutiones numero plurimas ſuppeditare, quas omnes qui recenſere voluerit, taedioſum non minus quam diffuſum ſuſciperet laborem. De priori vero reſolutionis ſpecie, qua partes circuitum Polygoni includentes, ſolum conſiderantur, ex infra dicendis patebit, eam pro vnoquoque Polygono ad totidem reuocari poſſe aequationes, quot lateribus ipſum Polygonum conſtat, hasque aequationes ope duorum Theorematum aeque elegantium ac late patentium facili negotio elici poſſe; quo ipſo praeſtito iure meritoque contendere licet, reſolutionem Polygoni quotcunque demum fuerit laterum ad difficiliores operationes Analyticas non perducere, quam quibus ipſa Trianguli reſolutio abſoluitur. Praemiſſis etenim binis his Theorematibus generalibus, quae pro omnibus Polygonis aeque valent, per debitam eorum inter ſe combinationem, omnes inuenientur aequationes, quas haec reſolutionis ſpecies requirit, ſicque pro Tetragono quatuor omnino huiusmodi aequationes inuenientur, pro Pentagono quinque, pro Hexagono ſex et in genere pro Polygono numero laterum exiſtente $= n$, aequationes quoque numero $n$ elicientur. Haec ipſa autem in ſequentibus vberius explicabimus, dum hiſce Theorematibus demonſtratis, oſtenderimus quomodo iſta eorum combinatio inſtitui debeat per quam aequationes ad vnumquodque Polygonum pertinentes eliciuntur, nec non

quo-

quomodo ope harum aequationum, omnes ſolutionum caſus facile expediri poſſunt.

3. Theoremata igitur iſta fundamenti loco ſubſternenda, ita habentur expreſſa:

*Si polygoni rectilinei anguli externi dicantur* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$. $\lambda$ *et latera ipſis interiacentia reſpectiue deſignentur per* a, b, c, d, e ... l *erit*:

I. $a\,\text{ſin.}\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) + d\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \ldots$
$+ l\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \lambda) = 0$

II. $a\,\text{coſ.}\alpha + b\,\text{coſ.}(\alpha+\beta) + c\,\text{coſ}(\alpha+\beta+\gamma) + d\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \ldots$
$+ l\,\text{coſ}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \lambda) = 0.$

## Demonſtratio.

Repraeſentet figura rectilinea A B C D E F G Heptagonum et productis lateribus C B, D C, D E, E F dum lateri A G producto occurrant in H, I, M, O; liquet eſſe angulum Tab. I. Fig. 2.

$BAH = \alpha$; $HBA = \beta$; $ICH = \gamma$; $LDI = \delta$; $MEO = \varepsilon$;
$OFG = \zeta$; $FGO = \eta$,

tumque latera

A B, B C, C D, D E, E F, F G reſpectiue indigitari litteris $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$. Tum vero habebitur:

ang. $CHK = BAH + HBA = \alpha + \beta$
$DIK = CHK + ICH = \alpha + \beta + \gamma$
$360^\circ - DMN = LDI + DIK = \alpha + \beta + \gamma + \delta$
$360 - EOM = 360^\circ - DMN + OEM = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$
$360 - FGO = 360 - EOM + OFG = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta$
$360^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta.$

 Iam

Iam ſi ex punctis B, C, D, E, F in A G perpendiculares ducantur $Ba$, $Cb$, $Dl$, $Ei$, $Fg$ et ex punctis B, C, E, F ipſi A G parallelae quae rectae $Dl$ in $b$, $c$, $e$, $f$ occurrant, fiet

$bl = BA.\,\text{ſin}.\,BAH = a\,\text{ſin}.\,\alpha$

$bc = BC.\,\text{ſin}.\,CBb = BC.\,\text{ſin}.\,CHK = b\,\text{ſin}.(\alpha+\beta)$

$Dc = CD.\,\text{ſin}.\,DCc = CD.\,\text{ſin}.\,DIK = c\,\text{ſin}.(\alpha+\beta+\gamma)$

$De = DE.\,\text{ſin}.\,DEe = DE.\,\text{ſin}.\,DMN = -d\,\text{ſin}.(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$

$ef = EF.\,\text{ſin}.\,EFf = EF.\,\text{ſin}.\,EOM = -e\,\text{ſin}.(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$

$fl = FG.\,\text{ſin}.\,FGO = -f\,\text{ſin}.(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)$.

Quum igitur ſit:

$$lb + bc + cD - De - ef - fl = 0,$$

erit quoque

$$a\,\text{ſin}.\,\alpha + b\,\text{ſin}.(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin}.(\alpha+\beta+\gamma) + d\,\text{ſin}.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + e\,\text{ſin}.(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) + f\,\text{ſin}.(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta) = 0,$$

cui aequationi ſi placet adiici poterit terminus

$$g\,\text{ſin}.(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \zeta + \eta),$$

quippe qui per ſe euaneſcit, exiſtente

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta = 360^\circ.$$

Porro habebimus quoque

$Aa = BA.\,\text{coſ}.\,BAH = a\,\text{coſ}.\,\alpha$

$ab = BC.\,\text{coſ}.\,CBc = -BC.\,\text{coſ}.\,CHK = -b.\,\text{coſ}.(\alpha+\beta)$

$bl = CD.\,\text{coſ}.\,DCc = -CD.\,\text{coſ}.\,CIK = -c.\,\text{coſ}.(\alpha+\beta+\gamma)$

$li = DE.\,\text{coſ}.\,DEe = -DE.\,\text{coſ}.\,DMN = -d.\,\text{coſ}.(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$

$ig = EF.\,\text{coſ}.\,EFf = -EF.\,\text{coſ}.\,EON = -e.\,\text{coſ}.(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$

$Gg = FG.\,\text{coſ}.\,FGO = f\,\text{coſ}.(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)$ denique

$AG = g = g\,\text{coſ}.(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta)$.

Verum

Verum enim vero eſt

$$Aa - ab - bl - li - ig + Gg + AG = 0$$

fiet igitur harum linearum valoribus introductis

$$a\cos\alpha + b\cos(\alpha+\beta) + c\cos(\alpha+\beta+\gamma) + d\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\ldots + g\cos(\alpha+\beta+\gamma\ldots\zeta+\eta) = 0.$$

Demonſtratio haec noſtra licet Heptagono ſolum ſit adcommodata, tamen facile conſtat, demonſtrationem eodem modo adornari poſſe, quodcunque propoſitum fuerit Polygonum, ita vt in genere ſtatuere liceat, pro quocunque Polygono cuius anguli externi ſunt, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ .... $\lambda$ et latera ipſis interiacentia $a$, $b$, $c$, $d$ .... $l$, eſſe

I. $a\,\text{ſin}.\alpha + b\,\text{ſin}(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin}.(\alpha+\beta+\gamma)\ldots + l\,\text{ſin}.(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\lambda) = 0$

II. $a\cos.\alpha + b\cos.(\alpha+\beta) + c\cos.(\alpha+\beta+\gamma)\ldots + l\cos.(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\lambda) = 0.$

Interim haud ſuperuacaneum erit aliam adhuc adiungere demonſtrationem, quae pro numero laterum Polygoni quocunque valet.

## Demonſtratio II.

4. Huius demonſtrationis vis in eo conſiſtet, vt probemus Theoremata noſtra veritati eſſe conſentanea pro Polygono quocunque numero laterum $n + 1$, ſi generaliter vera ſint pro quocunque Polygono numero laterum $n$, ſic enim veritas horum Theorematum pro Polygono quotcunque laterum rite ſibi conſtabit, modo pro Triangulo inconcuſſa maneat. Propoſitum itaque ſit Polygonum A B C D E F G H numero laterum $n + 1$, et ducta diago- Tab. I. Fig. 3.

 nali

nali F H per quam triangulum G F H reſecatur, oſtendemus propoſitiones ſupra allatas locum habere pro Polygono A B C D E F G H, ſi vera fuerint pro Polygono A B C D E F H et pro triangulo F G H. Hunc in finem producta concipiantur latera Polygoni E F, F G, A H et diagonalis H F, tumque dicantur pro Polygono A B C D E F H anguli externi

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \lambda, \mu = KFH, \nu = FHM$$

et latera eiusdem Polygoni

$$a, b, c, d \ldots l, m = HF, n = AH.$$

Pro Polygono autem A B C D E F G H ſint anguli externi

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \lambda, \mu' = KFG, \pi = LGH, \nu' = GHM$$

latera vero

$$a, b, c, d \ldots l, m' = FG; p = GH; n = AH.$$

Porro ſi dicatur angulus $IFG = \Phi$, fiet $180° - \Phi = \mu - \mu'$ ex quo colligitur $\mu' = \mu + \Phi + 180°$, hinc vero obtinebimus

$$\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu') = -\text{coſ.}\Phi\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu) + \text{ſin.}\Phi\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu)$$

$$\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu') = -\text{coſ.}\Phi\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu) - \text{ſin}\,\Phi\,\text{ſin}\,(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu)$$

$$\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu'+\pi) = -\text{coſ.}(\Phi+\pi)\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu)$$
$$+\text{ſin.}(\Phi+\pi)\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu)$$

$$\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu'+\pi) = -\text{coſ.}(\Phi+\pi)\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu)$$
$$-\text{ſin.}(\Phi+\pi)\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu).$$

Ex quibus valoribus colligimus

$$m'\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu') + p\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu'+\pi) =$$
$$-\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu)(m'\,\text{coſ.}\Phi + p\,\text{coſ.}(\Phi+\pi)) + \text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu)$$
$$(m'\,\text{ſin.}\Phi + p\,\text{ſin.}(\Phi+\pi));$$

$m'$ ſin.

$m'\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu')+p\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu'+\pi)=$
$-\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu)(m'\text{coſ.}\Phi+p\,\text{coſ.}(\Phi+\pi))-\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots\mu)$
$(m'\text{ſin.}\Phi+p\,\text{ſin.}(\Phi+\pi))$.

At pro triangulo G F H eſt

$m'\text{coſ.}\Phi+p\,\text{coſ.}(\Phi+\pi)=-m$ et $m'\text{ſin.}\Phi+p\,\text{ſin.}(\Phi+\pi)=0$

quas propoſitiones heic ceu ex Elementis cognitas aſſumere licet, fiet igitur

$m'\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu')+p\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu'+\pi)=m\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu)$ et
$m'\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu')+p\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu'+\pi)=m\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu)$.

Dum igitur habetur pro Polygono A B C D E F H

$a\,\text{ſin.}\alpha+b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta)+c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma)\ldots+m\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu)=0$
$a\,\text{coſ.}\alpha+b\,\text{coſ.}(\alpha+\beta)+c\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma)\ldots+m\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu)+n=0$

erit itidem pro Polygono A B C D E F G H

$a\,\text{ſin.}\alpha+b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta)+c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma)\ldots+m'\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots\mu')$
$+p\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu'+\pi)=0$
$a\,\text{coſ.}\alpha+b\,\text{coſ}(\alpha+\beta)+c\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma)\ldots+m'\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots\mu')$
$+p\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu'+\pi)+n=0$

vbi quidem in priori aequatione adiici poterit terminus

$n\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu'+\pi+\nu)$ et in poſteriori, loco $n$ ſcribi $n\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu'+\pi+\nu)$.

Hinc itaque perſpicitur aequationes noſtras locum inuenturas pro Polygono numero laterum $n+1$, ſi generaliter valeant pro Polygono numero laterum $n$ et pro triangulo. Nullum autem eſt dubium, quin pro triangulo ſeu ſimpliciſſima figura rectilinea verae ſint, oportet igitur eas ſimiliter pro quadri-

quadrilatero, hincque pro Pentagono, tumque Hexagono, immo in genere Polygono quotcunque laterum perfecte veras eſſe.

5. Quum per figuram rectilineam in genere intelligatur ſpatium lineis rectis vndiquaque terminatum, quaeritur merito an noſtra Theoremata etiam valeant pro iis figuris rectilineis, in quibus anguli externi occurrunt, qui binos angulos rectos exſuperant, quos igitur *gibbos* ſeu conuexos adpellare licebit. Scilicet ex demonſtrationibus allatis, iam quidem perſpicue intelligitur, pro Polygonis quae in Geometria praeprimis conſiderari ſolent, quorum omnes anguli externi ſunt *concaui* ſeu duobus rectis minores, haec Theoremata perfecte valere, vtrum vero aeque feliciter adplicari poſſint ad Polygona in quibus anguli externi conuexi occurrunt, res nondum ad liquidum perducta eſſe videtur. Vt autem conſtet etiam pro huiusmodi Polygonis veritatem noſtrorum Theorematum indubiam manere, caſus nonnullos ſimpliciores huiusmodi Polygonorum contemplabimur. Conſideremus igitur quadrilaterum A B C D, cuius angulus internus A C D eſt gibbus ſeu duobus rectis maior, in hoc autem quadrilatero ſi productis lateribus A B, B C, A D, litterae $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ adhibeantur ad ſequentes deſignandos angulos:

Tab. I. Fig. 4. n. 1.

$$\alpha = aAB;\ \beta = bBC;\ \gamma = 360^\circ - cCD;\ \delta = dDC$$

latera autem A B, B C, C D, D A reſpectiue exprimantur litteris $a$, $b$, $c$, $d$, patebit omnino eſſe

*a* ſin.

$$a\,\text{ſin.}\alpha+b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta)+c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma)+d\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=0 \text{ et}$$
$$a\,\text{coſ.}\alpha+b\,\text{coſ.}(\alpha+\beta)+c\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma)+d\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=0.$$

Id igitur heic tantum probandum relinquitur, pro angulo externo ex binis lateribus B C, C D formato non ſumi debere angulum D C $c$, ſed eius complementum ad 360°, id quod ſequenti modo perſpicuum reddetur. Concipiamus per punctum A ductas eſſe lineas A $\alpha$, A $\beta$, A $\gamma$ quae cum data recta M A N angulos conſtituunt aequales iis, quos A B, B C, C D productae ſi opus ſit, faciunt cum recta A D, vbi quidem obſeruare conuenit, vt quae lineae A B reſpectu A D ſurſum tendenti, ducitur parallela A $\alpha$, ſupra lineam M A N cadat, quae vero lineis B C, C D deorſum tendentibus aguntur parallelae A $\beta$, A $\gamma$ infra lineam M A N cadere debeant. Hoc facto generatio angulorum externorum pro quadrilatero A B C D commode explicari poteſt per motum rotatorium rectae A M circa punctum A, primus ſcilicet angulus externus $\alpha = a$ A B generabitur, dum A M in ſitum A $\alpha$ peruenerit, deinde angulus externus $\beta = b$ B C orietur quando A $\alpha$ ſitum A $\beta$ occupauerit, exiſtente $b$ B C $= \alpha$ A $\beta$, porro angulus $\gamma$ producetur dum A $\beta$ in eundem ſenſum rotando in ſitum A $\gamma$ perducta fuerit et denique angulus $\delta$ habebitur, quando recta A $\gamma$ rotando primitiuum locum A M occupauerit. Naturae vero rei conueniens eſt, vt hanc rotationem ſeu ſitus mutationem ſupponamus in eundem ſemper fieri ſenſum, quo ſuppoſito omnino liquet eſſe angulum Tab. I. Fig. 4. n. 2.

$$\gamma = \beta\text{ A M} + 180^\circ + \text{N A }\gamma = 360^\circ - \beta\text{ A }\gamma.$$

Pro quadrilatero vero iſthoc A B C D, notare convenit ſummam omnium angulorum externorum non quatuor angulis rectis, ſed duplo eorum aequari, eſt enim

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=MA\alpha+\alpha A\beta+\beta AM+MA\gamma+\gamma AM,$$

quare quum

$$MA\alpha+\alpha A\beta+\beta AM=360^\circ \text{ itemque}$$

$$MA\gamma+\gamma AM=360^\circ,$$

patet omnino eſſe

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2.\,360^\circ.$$

6. Conſideremus quoque quadrilaterum A B C D cuius bina latera A B, C D ſe decuſſant in
Tab. I. Fig. 5. n. 1. puncto E, productis autem lateribus A D, A B, B C ſi $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ adhibeantur ad ſequentes angulos exprimendos:

$$\alpha=aAB;\ \beta=360^\circ-bBC;\ \gamma=360^\circ-cCD \text{ et } \delta=CDd,$$

fiet iterum

$$a\,\text{ſin.}\,\alpha+b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta)+c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma)+d\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=0$$

tumque

$$a\,\text{coſ.}\,\alpha+b\,\text{coſ.}(\alpha+\beta)+c\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma)+d\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=0,$$

quarum aequationum demonſtrationes heic adponere nihil attinet, quum earum ratio ex praecedentibus facile intelligatur. Quod vero pro angulis externis quos lineae A B, B C itemque B C, C D inter ſe faciunt, non ſumi debeant anguli *b* B C et *c* C D, ſed eorum complementa ad quatuor rectos, ſimili modo ac ſupra explicari poteſt. Ducta ſcilicet linea

nea recta M N per punctum eius A ducantur lineae Fig. 5. n. 2.
$A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$ quae cum M N angulos conſtituunt reſpectiue aequales iis, quos A B, C D et B C productae cum recta A D faciunt; vbi quidem de ſitu linearum $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$ obſeruandum, quod $A\alpha$ ad partem ſuperiorem ipſius M A N cadat, dum A B reſpectu A D ſurſum tendit, $A\beta$ vero et $A\gamma$ deorſum tendent, quia B C, C D deorſum ducuntur. Tum vero intelligitur eſſe

$$\alpha = aAB = MA\alpha;\ \beta = 360^\circ - CBb = \alpha AN + NA\beta$$
$$\gamma = 360^\circ - cCD = \beta AM + 180^\circ + NA\gamma \text{ et } \delta = CDd = \gamma AM$$

ita vt omnino ſit

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = \begin{matrix} MA\alpha+\alpha AN+NA\beta+\beta AM \\ +180^\circ+NA\gamma+\gamma AM \end{matrix} = 2.\ 360^\circ.$$

Quae autem nunc de quadrilateris monuimus, eodem tenore quoque demonſtrantur de figuris quinque, ſex et plurium laterum, modo iſte ſenſus voci anguli externi tribuatur, quem eidem tribuendum eſſe iam oſtendimus; hocque obſeruato nullum eſt dubium Theoremata noſtra generaliter vera eſſe pro omnibus figuris rectilineis. Notare autem heic conuenit, ſummam omnium angulorum externorum in figura quacunque rectilinea aequalem eſſe vel quatuor angulis rectis, vel multiplo cuidam quatuor angulorum rectorum. Et quidem pro dato numero $n$ laterum Polygoni, obſeruauimus iſtud multiplum quatuor angulorum rectorum, cui anguli externi aequantur, vsque ad numerum $n-2$ increſcere, eum vero exſuperare non poſſe, ſicque pro triangu-

 lo

lo valor angulorum externorum erit 360°, pro Tetragono vel 360°, vel 2. 360°, pro Pentagono vel 360°, vel 2. 360°, vel 3. 360° et ſic in caeteris. Huius autem dicti veritatem rigoroſa demonſtratione heic firmam reddere, ad inſtitutum noſtrum non pertinet.

7. Pro Polygono regulari vbi perfecta tam laterum, quam angulorum inter ſe obtinet aequalitas, poſito numero laterum Polygoni $n$, noſtrae aequationes in has ſequentes abibunt:

$$\text{ſin.}\,\alpha + \text{ſin.}\,2\alpha + \text{ſin.}\,3\alpha + \text{ſin.}\,4\alpha \ldots + \text{ſin.}\,(n-1)\alpha = 0$$

$$\text{coſ.}\,\alpha + \text{coſ.}\,2\alpha + \text{coſ.}\,3\alpha + \text{coſ.}\,4\alpha \ldots + \text{coſ.}\,(n-1)\alpha = 0.$$

Aliunde autem conſtat prioris progreſſionis ſummam eſſe

$$= \frac{\text{ſin.}\frac{n\alpha}{2}\,\text{ſin.}\frac{(n-1)\alpha}{2}}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha} \text{ poſteriorisque } = \frac{\text{ſin.}\frac{1}{2}n\alpha\,\text{coſ.}\frac{1}{2}(n-1)\alpha}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\alpha},$$

oportet igitur vtramque hanc expreſſionem nihilo aequari, de quo quidem nullum remanet dubium, ſi conſideremus factorem communem harum expreſſionum ſin. $\frac{1}{2}n\alpha$ = ſin. 180° = 0, ob $n\alpha = 360°$. Licet autem vtraque haec expreſſio ſeorſim euaneſcat, id tamen nihil impedit, quo minus ratio prioris ad poſteriorem finita ſit, quippe quae = − Tang. $\frac{1}{2}\alpha$.

8. Ex binis noſtris Theorematibus ſupra allatis, bina quoque alia aliquanto generaliora deduci
Tab. I. poſſunt. Si nimirum per Polygoni ABCDEFGH
Fig. 3. punctum A ducatur recta quaecunque OAP et dicatur angulus BAO, quem haec recta cum latere

Poly-

Polygoni A B conſtituit $\Phi$, tumque vt ante anguli externi Polygoni litteris, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta \ldots \nu$ lateraque litteris $a$, $b$, $c$, $d \ldots n$ deſignentur, erit

I. $$a \sin.\Phi + b \sin.(\Phi+\beta) + c \sin.(\Phi+\beta+\gamma) + d \sin.(\Phi+\beta+\gamma+\delta) \ldots + n \sin.(\Phi+\beta+\gamma \ldots + \nu) = 0$$

II. $$a \cos.\Phi + b \cos.(\Phi+\beta) + c \cos.(\Phi+\beta+\gamma) + d \cos.(\Phi+\beta+\gamma+\delta) \ldots + n \cos.(\Phi+\beta+\gamma \ldots + \nu) = 0.$$

Pro his aequationibus demonſtrationes tradi quidem poſſent, ſimiles illis quibus ſupra §. 3 et 4 vſi ſumus, vt tamen rem in compendium mittamus, placet haec Theoremata ex binis ſupra demonſtratis deducere, quod ſic commode fiet. Quia ang. B A N $=$ B A O $\mp$ N A O, ſi dicatur N A O $= \psi$ erit $\alpha = \Phi \mp \psi$, ideoque $\Phi = \alpha \pm \psi$, heic vero ad ſignorum diuerſitatem attendere nihil attinet, quare ſufficiet ſtatuiſſe $\Phi = \alpha + \psi$ vti figura allata poſtulat. Quum igitur in genere ſit

$$\sin.(\Phi+\omega) = \sin.(\alpha+\omega)\cos.\psi + \cos.(\alpha+\omega)\sin.\psi \text{ et}$$

$$\cos.(\Phi+\omega) = \cos(\alpha+\omega)\cos.\psi - \sin.(\alpha+\omega)\sin.\psi,$$

liquet priorem iſtam expreſſionem

$$a \sin.\Phi + b \sin.(\Phi+\beta) + c \sin.(\Phi+\beta+\gamma) + d \sin.(\Phi+\beta+\gamma+\delta) \ldots + n \sin.(\Phi+\beta+\gamma \ldots + \nu)$$

in ſequentes reſolui

$$\cos.\psi(a \sin.\alpha + b \sin.(\alpha+\beta) + c \sin.(\alpha+\beta+\gamma) + d \sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \ldots + n \sin.(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \nu))$$

$$+ \sin.\psi(a \cos.\alpha + b \cos.(\alpha+\beta) + c \cos.(\alpha+\beta+\gamma) + d \cos.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \ldots + n \cos.(\alpha+\beta+\gamma \ldots \nu)),$$

 tum-

tumque poſteriorem expreſſionem

$$a\cos.\Phi+b\cos.(\Phi+\beta)+c\cos.(\Phi+\beta+\gamma)+d\cos.(\Phi+\beta+\gamma+\delta)\ldots$$
$$+n\cos.(\Phi+\beta+\gamma\ldots+\nu)$$

in has reſolui

$$\cos.\psi(a\cos.\alpha+b\cos.(\alpha+\beta)+c\cos.(\alpha+\beta+\gamma)+d\cos.(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\ldots$$
$$+n\cos.(\alpha+\beta+\gamma\ldots\nu))$$
$$-\sin.\psi(a\sin.\alpha+b\sin.(\alpha+\beta)+c\sin.(\alpha+\beta+\gamma)+d\sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\ldots$$
$$+n\sin.(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\nu)).$$

Quare quum vtraque pars ex qua tam prior quam poſterior expreſſio componitur, euaneſcat, omnino euidenter cognoſcimus vtramque hanc expreſſionem nihilo aequari. Si $\Phi=0$ has conſequemur aequalitates:

$$b\sin.\beta+c\sin.(\beta+\gamma)+d\sin.(\beta+\gamma+\delta)\ldots+n\sin.(\beta+\gamma+\delta\ldots+\nu)=0 \text{ et}$$
$$a+b\cos.\beta+c\cos.(\beta+\gamma)+d\cos.(\beta+\gamma+\delta)\ldots+n\cos.(\beta+\gamma+\delta\ldots+\nu)=0,$$

quae ex prioribus illis §. 3. allatis immediate colliguntur, modo loco litterarum $a$, $b$, $c$, $d$ etc. litterae $b$, $c$, $d$, $e$ etc. tumque loco litterarum $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc. litterae $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ etc. ſufficiantur.

9. Diximus ſupra per combinationem binorum noſtrorum Theorematum omnes iſtas aequationes facile inueniri, quae reſolutioni vniuscuiusque Polygoni inſeruiunt; vt vero eo clarius quisque perſpicere queat, quomodo haec combinatio ſit inſtituenda, eandem aliquot exemplis illuſtrabimus; vbi quidem a ſimpliciſſimis Polygonorum ſpeciebus
Tab. I. Fig. 6. initium facere, conducet. Pro triangulo igitur ABC cuius anguli externi $a$AB, $b$BC, $c$CA litteris

$\alpha$, $\beta$,

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et latera AB, BC, CA litteris $a$, $b$, $c$ exprimantur, noſtra Theoremata binas has ſuppeditant aequationes:

$$a \,\text{ſin}.\, \alpha + b \,\text{ſin}.(\alpha + \beta) = 0; \quad a \,\text{coſ}.\, \alpha + b \,\text{coſ}.(\alpha + \beta) + c = 0.$$

Quum ex poſteriori harum aequationum deducatur

$$c = - a \,\text{coſ}.\, \alpha - b \,\text{coſ}.\,(\alpha + \beta)$$

ſumendo vtrinque quadrata obtinebimus:

$$cc = a^2 \,\text{coſ}.\, \alpha^2 + b^2 \,\text{coſ}.(\alpha + \beta)^2 + 2\,ab \,\text{coſ}.\, \alpha \,\text{coſ}.\,(\alpha + \beta)$$

eſt vero per priorem aequationem

$$a^2 \,\text{ſin}.\, \alpha^2 + b^2 \,\text{ſin}.\,(\alpha + \beta)^2 + 2\,ab \,\text{ſin}.\, \alpha \,\text{ſin}.\,(\alpha + \beta) = 0$$

hincque fiet:

$$cc = \begin{matrix} a^2 \text{coſ}.\alpha^2 + 2ab\,\text{coſ}.\alpha\,\text{coſ}.(\alpha+\beta) + b^2\text{coſ}.(\alpha+\beta)^2 \\ + a^2 \text{ſin}.\alpha^2 + 2ab\,\text{ſin}.\alpha\,\text{ſin}.(\alpha+\beta) + b^2\text{ſin}.(\alpha+\beta)^2 \end{matrix} = a^2 + b^2 + 2\,ab \,\text{coſ}.\,\beta$$

quia nimirum eſt

$$\text{coſ}.\, \alpha \,\text{coſ}.\,(\alpha + \beta) + \text{ſin}.\, \alpha \,\text{ſin}.\,(\alpha + \beta) = \text{coſ}.\, \beta.$$

*Prima* igitur aequatio reſolutioni trianguli inſeruiens iſthaec erit:

I. $cc = aa + bb + 2\,ab \,\text{coſ}.\, \beta.$

Reliquae duae ſequentes habentur:

II. $a \,\text{ſin}.\alpha + b \,\text{ſin}.(\alpha + \beta) = 0$; III. $a \,\text{ſin}.\alpha - b \,\text{ſin}.\gamma = 0$,

quarum ſecunda per ipſum Theorema noſtrum primum exprimitur, tertia vero ex hoc Theoremate deducitur in locum ipſius ſin. $(\alpha + \beta)$ ſubſtituendo $-$ ſin. $\gamma$, quippe quum ſit $\gamma = 360^\circ - \alpha - \beta$. Patet autem has tres aequationes ſufficere ad omnes quaeſtiones reſoluendas, quibus ex datis tribus partibus

bus trianguli, quarta quaecunque inueſtiganda eſt. Si ex datis tribus lateribus trianguli $a$, $b$, $c$ inueſtigandus ſit aliquis angulorum, vel ſi ex datis duobus lateribus $a$, $b$ cum angulo interiacente ſit quaerendum latus oppoſitum, vel ſi datis duobus lateribus, quorum vnum angulo dato opponitur, alterum ipſi adiacet, ſit quaerendum reliquum latus angulo dato quoque adiacens; ſolutio perficietur ope aequationis noſtrae *primae*. Si vero ex datis duobus lateribus cum angulo interiacente, ſit quaerendus alteruter reliquorum angulorum, vel ex datis duobus lateribus cum angulo vni ipſorum oppoſito, ſit quaerendus angulus interiacens; quaeſtionis reſolutio ex aequatione *ſecunda* deducetur. Demum ſi ex datis duobus lateribus et angulo vni ipſorum oppoſito, quaerendus ſit angulus alteri oppoſitus, huic quaeſtioni reſoluendae inſeruiet aequatio *tertia*, quae itidem adhiberi poteſt pro iſta quaeſtione, qua ex angulis binis et latere quodam trianguli, quodpiam reliquorum laterum inueſtigandum eſt.

10. Pergamus iam ad conſiderandum quadrilaterum, cuius anguli externi $aAB$, $bBC$, $cCD$, $dDA$ litteris $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ reſpectiue deſignentur, latera vero AB, BC, CD, DA eodem ordine litteris $a$, $b$, $c$, $d$ indigitentur, pro iſto igitur quadrilatero noſtra Theoremata has ſuppeditant aequationes: Tab. I. Fig. 7.

$$a\,\text{ſin.}\,\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin}\,(\alpha+\beta+\gamma) = 0$$

$$a\,\text{coſ.}\,\alpha + b\,\text{coſ.}(\alpha+\beta) + c\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma) + d = 0.$$

Ex

Ex poſteriori harum aequationum conſequimur

$$d = -a\cos.\alpha - b\cos.(\alpha+\beta) - c\cos.(\alpha+\beta+\gamma),$$

hinc ſumtis quadratis,

$$dd = a^2\cos.\alpha^2 + b^2\cos.(\alpha+\beta)^2 + c^2\cos.(\alpha+\beta+\gamma)^2 + 2ab\cos.\alpha\cos.(\alpha+\beta) + 2ac\cos.\alpha\cos.(\alpha+\beta+\gamma) + 2bc\cos.(\alpha+\beta)\cos.(\alpha+\beta+\gamma),$$

huic autem aequationi addatur quadratum prioris aequationis, quo facto prodibit:

$$dd = a^2+b^2+c^2+2ab(\cos.\alpha\cos.(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin.(\alpha+\beta))$$
$$+2ac(\cos.\alpha\cos.(\alpha+\beta+\gamma)+\sin.\alpha\sin.(\alpha+\beta+\gamma))$$
$$+2bc(\cos.(\alpha+\beta)\cos.(\alpha+\beta+\gamma)+\sin.(\alpha+\beta)\sin.(\alpha+\beta+\gamma))$$
$$= a^2+b^2+c^2+2ab\cos.\beta+2ac\cos.(\beta+\gamma)+2bc\cos.\gamma$$

ita vt noſtra aequatio *prima* ſit:

I. $dd = a^2+b^2+c^2+2ab\cos.\beta+2ac\cos(\beta+\gamma)+2bc\cos.\gamma.$

Porro ex aequatione noſtra poſteriori colligitur

$d+c\cos.(\alpha+\beta+\gamma) = -a\cos.\alpha - b\cos.(\alpha+\beta)$, ſeu ob $\alpha+\beta+\gamma = 360^\circ-\delta$

$d+c\cos.\delta = -a\cos.\alpha - b\cos.(\alpha+\beta)$,

ſumtis igitur quadratis prodibit

$dd+2dc\cos.\delta+cc\cos.\delta^2 = a^2\cos.\alpha^2+b^2\cos.(\alpha+\beta)^2+2ab\cos.\alpha\cos.(\alpha+\beta)$,

ex prima vero aequatione fit

$cc\sin\delta^2 = a^2\sin.\alpha^2+b^2\sin.(\alpha+\beta)^2+2ab\sin.\alpha\sin.(\alpha+\beta)$,

vnde has aequationes addendo colligimus.

II. $dd+2dc\cos.\delta+cc = aa+2ab\cos.\beta+bb$,

quae eſt aequatio *ſecunda* reſolutioni Tetragoni inſerviens. *Tertia* aequatio eſt iſta primitiua:

III. $a\sin.\alpha+b\sin.(\alpha+\beta)+c\sin.(\alpha+\beta+\gamma) = 0$

et *quarta* demum

IV. $a \sin.\alpha + b \sin.(\alpha+\beta) - c \sin.\delta = 0$,

quae ex priori elicitur loco ſin. $(\alpha+\beta+\gamma)$ adhibendo $-$ ſin. $\delta$, ob $\delta = 360^\circ - (\alpha+\beta+\gamma)$. Qua autem ratione ope harum quatuor aequationum omnes quaeſtiones ad reſolutionem quadrilateri reſpectu angulorum et laterum quibus includitur, pertinentes, reſolui debeant; iam fuſius oſtendere praetermittimus, quia nondum oſtendimus quot et quaenam huiusmodi quaeſtiones reſoluendae occurrunt, de quo infra ex inſtituto agemus.

11. Pro Pentagono ſequentes binas adipiſcimur aequationes:

$$a \sin.\alpha + b \sin.(\alpha+\beta) + c \sin.(\alpha+\beta+\gamma) + d \sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 0 \quad (A)$$

$$a \cos.\alpha + b \cos.(\alpha+\beta) + c \cos.(\alpha+\beta+\gamma) + d \cos.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + e = 0,$$

quarum poſterior vel ita exprimatur

$$-e = a \cos.\alpha + b \cos.(\alpha+\beta) + c \cos.(\alpha+\beta+\gamma) + d \cos.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \quad (B)$$

vel ſic

$$-e - d \cos.\varepsilon = a \cos.\alpha + b \cos.(\alpha+\beta) + c \cos.(\alpha+\beta+\gamma) \quad (C).$$

Ex priore autem dum pro ſin. $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$ ſubſtituitur $-$ ſin. $\varepsilon$, conſequimur

$$d \sin.\varepsilon = a \sin.\alpha + b \sin.(\alpha+\beta) + c \sin.(\alpha+\beta+\gamma) \quad (D).$$

Sumtis iam quadratis aequationum (B), (C), nec non aequationum (A) (D) additisque quadratis ex (B), (A) et (C), (D) has obtinebimus aequationes:

$$\text{I. } ee = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab \cos.\beta + 2ac \cos.(\beta+\gamma) + 2ad \cos.(\beta+\gamma+\delta)$$
$$+ 2bc \cos.\gamma + 2bd \cos.(\gamma+\delta) + 2cd \cos.\delta$$

$$\text{II. } e^2 + d^2 + 2ed \cos.\varepsilon = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos.\beta + 2ac \cos.(\beta+\gamma) + 2bc \cos.\gamma,$$

quae

quae ſunt aequationes *prima* et *ſecunda* pro reſolutione Pentagoni. Plenariam quadratorum euolutionem et reliquas reductiones, quibus ad has aequationes pertingimus, heic exponere nihil attinet, quum harum operationum ratio ex praecedentibus ſatis intelligatur. Reliquae tres aequationes pro reſolutione Pentagoni ſequentes habentur:

III. $a\,\text{ſin.}\,\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) + d\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 0$

IV. $a\,\text{ſin}\,\alpha + b\,\text{ſin}\,(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) - d\,\text{ſin.}\,\varepsilon = 0$

V. $a\,\text{ſin.}\,\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) - c\,\text{ſin.}(\delta+\varepsilon) - d\,\text{ſin.}\,\varepsilon = 0$

quarum *tertia* eſt ipſa noſtra aequatio primitiua (A), *quarta* vero et *quinta* ex hac deriuantur, ſubſtituendo primum pro ſin. $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$, $-$ ſin. $\varepsilon$ tum vero etiam pro ſin. $(\alpha+\beta+\gamma)$, $-$ ſin. $(\delta+\varepsilon)$, quum nempe ſit

$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360° - \varepsilon$ et $\alpha+\beta+\gamma = 360° - \delta - \varepsilon$.

12. Pro Hexagono primitiuae noſtrae aequationes ſequentes ſunt:

$$a\,\text{ſin.}\,\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) + d\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + e\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) = 0 \quad (A)$$

$$a\,\text{coſ}\,\alpha + b\,\text{coſ.}(\alpha+\beta) + c\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma) + d\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + e\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) = -f \quad (B).$$

Prior vero his quoque binis modis exprimatur:

$$a\,\text{ſin.}\,\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) + d\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = e\,\text{ſin.}\,\zeta \quad (C)$$

$$a\,\text{ſin.}\,\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) = d\,\text{ſin.}(\varepsilon+\zeta) + e\,\text{ſin.}\,\zeta \quad (E).$$

Poſteriori item binae hae tribuantur formae:

$$a\,\text{coſ}\,\alpha + b\,\text{coſ}\,(\alpha+\beta) + c\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma) + d\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = -e\,\text{coſ.}\,\zeta - f \quad (D)$$

$$a\,\text{coſ.}\,\alpha + b\,\text{coſ.}(\alpha+\beta) + c\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma) = -d\,\text{coſ.}(\varepsilon+\zeta) - e\,\text{coſ.}\,\zeta - f \quad (F).$$

 Addi-

Additis nunc quadratis aequationum (A), (B) ac (C), (D) tumque (E), (F) et facta debita reductione has tres adipiſcemur aequationes pro reſolutione Hexagoni:

I. $ff = aa + bb + cc + dd + ee$
$+ 2ab\,\text{coſ.}\beta + 2ac\,\text{coſ.}(\beta+\gamma) + 2ad\,\text{coſ.}(\beta+\gamma+\delta) + 2ae\,\text{coſ.}(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$
$+ 2bc\,\text{coſ.}\gamma + 2bd\,\text{coſ.}(\gamma+\delta) + 2be\,\text{coſ}(\gamma+\delta+\varepsilon) + 2cd\,\text{coſ.}\delta + 2ce\,\text{coſ.}(\delta+\varepsilon)$
$+ 2de\,\text{coſ}\,\varepsilon$

II. $ff + ee + 2ef\,\text{coſ.}\zeta = aa + bb + cc + dd$
$+ 2ab\,\text{coſ}\,\beta + 2ac\,\text{coſ.}(\beta+\gamma) + 2ad\,\text{coſ.}(\beta+\gamma+\delta)$
$+ 2bc\,\text{coſ.}\gamma + 2bd\,\text{coſ.}(\gamma+\delta) + 2cd\,\text{coſ.}\delta$,

III. $ff + ee + dd \qquad = aa + bb + cc$
$+ 2ef\,\text{coſ.}\zeta + 2fd\,\text{coſ.}(\zeta+\varepsilon) + 2ed\,\text{coſ.}\varepsilon \qquad + 2ab\,\text{coſ.}\beta + 2ac\,\text{coſ.}(\beta+\gamma) + 2bc\,\text{coſ.}\gamma$.

Quibus inſuper adiungantur hae tres ſequentes:

IV. $a\,\text{ſin.}\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) + d\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$
$+ e\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) = 0$,

V. $a\,\text{ſin.}\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) + d\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) - e\,\text{ſin.}\zeta = 0$,

VI. $a\,\text{ſin.}\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) - d\,\text{ſin.}(\varepsilon+\zeta) - e\,\text{ſin.}\zeta = 0$.

Et his quidem ſex aequationibus, quaeſtiones de reſolutione Hexagoni, quae noſtri nunc ſunt inſtituti perfecte reſolui poſſunt.

13. Haec exempla abunde quidem ſufficiunt, ad oſtendendum, qua ratione pro Polygono quotcunque fuerit laterum, aequationes eidem reſoluendo inſeruientes inueſtigandae ſunt et ex ſola quidem inſpectione exemplorum modo allatorum, facile diiudicari poterit, quaenam ſit forma harum aequationum pro quibusuis Polygonis. Sic pro Heptagono, cuius angulos externos ponamus eſſe, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \eta$

et

et latera $a, b, c, d \ldots g$, has ſeptem aequationes nullo negotio conſequemur:

$$\text{I. } gg = aa + bb + cc \ldots + ff$$
$$+ 2ab\,\text{coſ.}\beta + 2ac\,\text{coſ.}(\beta+\gamma) + 2ad\,\text{coſ.}(\beta+\gamma+\delta) \ldots + 2af\,\text{coſ.}(\beta+\gamma \ldots + \zeta)$$
$$+ 2bc\,\text{coſ.}\gamma + 2bd\,\text{coſ.}(\gamma+\delta) \ldots\ldots\ldots + 2bf\,\text{coſ.}(\gamma+\delta \ldots + \zeta)$$
$$+ 2cd\,\text{coſ.}\delta + 2ce\,\text{coſ.}(\delta+\varepsilon) + 2cf\,\text{coſ.}(\delta+\varepsilon+\zeta)$$
$$+ 2de\,\text{coſ}\,\varepsilon + 2df\,\text{coſ.}(\varepsilon+\zeta) + 2ef\,\text{coſ.}\zeta$$

$$\text{II. } gg + ff = aa + bb \ldots + ee$$
$$+ 2gf\,\text{coſ.}\eta \quad + 2ab\,\text{coſ.}\beta + 2ac\,\text{coſ.}(\beta+\gamma) \ldots + 2ae\,\text{coſ.}(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$$
$$+ 2bc\,\text{coſ.}\gamma + 2bd\,\text{coſ.}(\gamma+\delta) + 2be\,\text{coſ.}(\gamma+\delta+\varepsilon)$$
$$+ 2cd\,\text{coſ.}\delta + 2ce\,\text{coſ.}(\delta+\varepsilon) + 2de\,\text{coſ.}\varepsilon.$$

$$\text{III. } gg + ff + ee \quad = aa + bb + cc + dd$$
$$+ 2gf\,\text{coſ}\,\eta + 2ge\,\text{coſ.}(\eta+\zeta) + 2ef\,\text{coſ.}\zeta \quad + 2ab\,\text{coſ.}\beta + 2ac\,\text{coſ.}(\beta+\gamma) + 2ad\,\text{coſ.}(\beta+\gamma+\delta)$$
$$+ 2bc\,\text{coſ.}\gamma + 2bd\,\text{coſ.}(\gamma+\delta) + 2cd\,\text{coſ.}\delta.$$

$$\text{IV. } a\,\text{ſin.}\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) \ldots + f\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \zeta) = 0$$

$$\text{V. } a\,\text{ſin.}\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) \ldots + e\,\text{ſin.}(\alpha+\beta \ldots + \varepsilon) - f\,\text{ſin.}\eta = 0$$

$$\text{VI. } a\,\text{ſin.}\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) \ldots + d\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) - e\,\text{ſin}\,(\eta+\zeta) - f\,\text{ſin.}\eta = 0$$

$$\text{VII. } a\,\text{ſin.}\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) - d\,\text{ſin.}(\eta+\zeta+\varepsilon) - e\,\text{ſin.}(\eta+\zeta) - f\,\text{ſin.}\eta = 0.$$

Simili vero modo pro Polygonis plurium adhuc laterum procedere licet, ita vt praeter prolixitatem et laborem has aequationes litteris conſignandi, hoc negotium nullam prorſus aliam pariat difficultatem.

14. De aequationibus his noſtris in genere obſeruare conuenit, quod illae quas ſingula Polygoni latera ingrediuntur, ſecundae ſint dimenſionis, dum ipſa quadrata horum laterum inuoluunt; iſtae vero aequationes in quibus vnum Polygoni latus deſideratur, primae ſunt dimenſionis ſeu lineares, qua-

 propter

propter reſolutio poſteriorum harum aequationum pro faciliori habetur quam illarum priorum, quatenus nimirum de aliquo latere Polygoni inueſtigando quaeſtio inſtituitur. Deinde notare quoque iuuat, pro numero laterum Polygoni pari, totidem aequationes vnius claſſis occurrere ac alterius, numerus ſcilicet aequationum ſingularum claſſium dimidium numerum laterum Polygoni adaequabit; at ſi numerus laterum Polygoni ſit impar, aequationes lineares vna plures habentur, quam aequationes ſecundae dimenſionis, omnium ſcilicet numero, numerum laterum Polygoni exaequante. Aequationes autem iſtae lineares primitiuae, quae coſ. $\alpha$, coſ. $(\alpha+\beta)$ etc. inuoluunt, ſub iſta forma propoſitae ad reſolutionem Polygonorum aptae non ſunt, quum has aequationes omnia latera omnesque anguli Polygoni ingrediantur; quare ſi ex iisdem quodpiam latus vel aliquis angulus determinari deberet, plura cognitu neceſſaria ſupponerentur, quam quae ad vniuscuiusque Polygoni perfectam determinationem requiruntur. Tum vero hae aequationes ſolutionibus aptae euadunt, quando per earum combinationem cum aequationibus primitiuis linearibus, quae Sinus inuoluunt, eruuntur iſtae aequationes ſecundi dimenſionis, in quibus omnia quidem Polygoni latera occurrunt, numerus autem angulorum binario deficit a numero omnium angulorum Polygoni.

15. Antequam perſpicue intelligi poſſit, qua ratione reſolutio Polygonorum per aequationes in praecedentibus expoſitas, abſoluatur; neceſſarium eſt vt dilu-

dilucide modum explicemus, quo omnes harum reſolutionum caſus enumerari et diſtincte recenſeri poſſunt. Ex primis autem Geometriae Elementis cognoſcitur, vnumquodque Polygonum perfecte eſſe determinatum, ſi in ipſo partium principalium cognitarum numerus ternario deficiat a numero omnium harum partium, id eſt Polygonum perfecte habebitur determinatum, ſi non plures quam tres partes principales habeantur incognitae, hincque ſi numerus laterum dicatur $n$, partes cognitas numero $2n-3$ adeſſe oportet; vbi tamen perſpicuum eſt, eum caſum excipi, quo omnes anguli externi Polygoni dantur, quippe quum vnus horum angulorum, ſemper ex reliquis determinetur, dum omnium ſumma aequatur vel quatuor rectis, vel multiplo cuidam quatuor rectorum. Si itaque praeter omnes angulos externos Polygoni, latera numero $n-3$ cognoſcantur, tenendum eſt ipſum Polygonum hinc perfecte non eſſe determinatum, ſed inſuper requiri vt reliquorum trium laterum quodpiam cognitum ſit, ita vt quouis caſu pro plenaria cuiusuis Polygoni determinatione, ſaltem $n-2$ latera cognita eſſe oporteat. Si iam aliquis angulus vel quoddam latus Polygoni determinari debeat, intelligitur eam inueſtigationem perfici ope aequationis, quam $2n-2$ partium principalium Polygoni ingrediuntur et in iſta aequatione vel omnia Polygoni latera, vel ſaltem omnia vno tantum excepto occurrere debere. Nam pro eo etiam caſu, quo omnes anguli Polygoni cogniti ſupponuntur, quia ſimul $n-2$ latera cognita

cognita eſſe oportet; perſpicitur omnino $n-1$ latera aequationem ingredi debere; at tamen iſtam ſolutionum ſpeciem qua omnibus angulis Polygoni cognitis latus quodpiam quaerendum eſt, a reliquis ſolutionum ſpeciebus ſeorſim conſiderare conueniet. Prouti nunc aequationem pro ſolutione Polygoni inſeruientem, vel omnia latera ingrediuntur, vel vnum in ea deſideratur, binas ſolutionum claſſes adipiſcemur; quarum *prior* continet quaeſtiones pro quibus ſoluendis inſeruit aequatio omnia Polygoni latera et angulos numero $n-2$ complectens, *poſterior* autem in ſe comprehendet ſolutiones, quibus expediendis inſeruit aequatio in qua vnum Polygoni latus, vnusque item angulus deficit, quatenus nimirum quaeſtio eſt de quopiam angulorum determinando. His vero adiungi poteſt *tertia* claſſis ſolutionum etiam abſoluendarum ope aequationis, in qua vnum latus vnusque item angulus deficit, dum nimirum aliquod laterum quaeritur; pro his autem caſibus ſponte patet omnes Polygoni angulos pro cognitis eſſe habendos, quam ob cauſſam hanc tertiam ſolutionum claſſem a duabus prioribus merito diſtinguendam eſſe cenſuimus.

16. Quaeſtiones ad vnamquamque claſſem pertinentes, in certos iterum ordines redigi poſſunt, ſi attendatur ad ſitum partium omiſſarum inter ſe, ſic pro *prima* ſolutionum claſſe, alium conſequemur ſolutionum ordinem pro caſu quo bini anguli ex aequatione excluſi ſibi ſunt proximi, alios ordines pro caſibus, quibus angulos omiſſos, vel vnus, vel duo,

duo, vel tres reliquorum angulorum interponuntur. In hac autem diſtinctione caſuum vlterius progredi neceſſum non eſt, quam pro numero quidem laterum impari $= 2m + 1$, vbi angulos omiſſos anguli $m$ interiacent, nam ſi longius quis progredi vellet, caſus antea conſiderati manifeſto recurrerent; ſimili ratione pro numero laterum pari $= 2m$, finem diuiſionis ordinum facere oportet, vbi ad eum peruentum fuerit, quo angulos omiſſos, anguli $m - 1$ interiacent. Pro *ſecunda* claſſe diſtributio ſolutionum in ordines perficietur, dum attentio adhibetur ad angulum et latus omiſſum, ideoque diuerſi ordines emergent, prouti angulus omiſſus lateri omiſſo vel fuerit adiacens, vel inter angulum et latus, reliquorum laterum vnum, aut duo, aut tria etc. interiaceant. De limitibus autem huic diſtributioni in ordines praeſcribendis, ſimilis habetur regula ac pro claſſe priori, ſcilicet ſi numerus laterum fuerit impar, $= 2m + 1$ vltimus ordo erit is, pro quo latus et angulum omiſſum, $m$ latera interiacent, pro numero autem laterum pari $= 2m$, vltimus ordo erit is, quo latus et angulum omiſſum $m - 1$ latera interiacent. *Tertia* demum claſſis nullam parit difficultatem, pro ea enim omnes anguli vt cogniti ſpectari poſſunt, quare in ſolutionum enumeratione heic tantum reſpiciendum eſt ad ſitum, quem teneat latus inueſtigandum reſpectu lateris omiſſi.

17. His igitur in genere obſeruatis ad caſus deſcendamus ſpeciales, vbi quidem quia omnes quaeſtiones circa reſolutionem trianguli iam ſatis cognitae ſunt, initium faciamus a reſolutione quadrilateri
Tab. I. Fig. 7. A B C D. Pro hoc itaque quadrilatero ad primam quaeſtionum claſſem omnes eae pertinent, quarum ſolutio abſoluitur aequatione, quam omnia Tetragoni latera $a$, $b$, $c$, $d$ binique anguli ingrediuntur; haec vero claſſis in duos diſpeſcitur ordines prouti bini anguli omiſſi vel ſibi fuerint proximi, vel inuicem oppoſiti. Ad priorem ordinem, quo excluſi cenſentur anguli $\alpha$ et $\delta$ ſequentia referenda ſunt Problemata:

I. Datis lateribus $a$, $b$, $c$, $d$ et angulo $\beta$, inuenire angulum $\gamma$.

II. Datis lateribus $a$, $b$, $c$ et angulis $\beta$, $\gamma$ inuenire latus $d$, quod angulis omiſſis interiacet.

III. Datis lateribus $a$, $c$, $d$ et angulis $\beta$, $\gamma$ inuenire latus $b$, quod angulis datis interiacet.

IV. Datis lateribus $a$, $b$, $d$ et angulis $\beta$, $\gamma$ inuenire latus $c$, quod vni angulorum datorum adiacet; liquet autem ſolutionem eodem redire ſiue quaeratur latus $c$, ſeu datis lateribus $b$, $c$, $d$ inueſtigandum ſit latus $a$. Solutiones autem horum quatuor Problematum adornantur ope aequationis I$^{mae}$ §. 10.

Ad ſecundum ordinem prioris claſſis, quo excluſi ſupponuntur anguli $\alpha$ et $\gamma$, ſequentia bina problemata pertinent.

V. Ex datis lateribus $a$, $b$, $c$, $d$ et angulo $\beta$, inuenire angulum $\delta$, quaeſtio autem eodem redit ſi dato angulo $\delta$, quaerendus ſit $\beta$.

VI. Ex datis lateribus $a$, $b$, $c$ et angulis $\beta$, $\gamma$ invenire latus $d$, vbi perinde eſt quodnam laterum ſit inueſtigandum. Horum problematum ſolutiones perficiuntur per aequationem II[dam] §. 10.

Quaeſtiones *ſecundae* claſſis iterum in binos diſpeſcuntur ordines, prouti latus omiſſum et angulus excluſus ſibi vel adiacent, vel vnum latus ipſis interiecerit. Ad priorem ordinem ſi omiſſum intelligatur latus $d$ cum angulo $\delta$, tria pertinent Problemata:

VII. VIII. IX. quibus, ex datis lateribus $a$, $b$, $c$ et binis angulorum $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, quaeritur tertius angulus vel $\gamma$, vel $\beta$, vel $\alpha$. Solutiones horum Problematum deducuntur ex aequatione III[ia] §. 10.

Denique ad poſteriorem ordinem omiſſo latere $d$ et angulo $\gamma$, ſequentia referenda ſunt Problemata:

X. XI. XII. quibus, ex datis lateribus $a$, $b$, $c$ et binis angulorum $\alpha$, $\beta$, $\delta$, quaeritur vel $\delta$, vel $\beta$, vel $\alpha$, quorum Problematum ſolutiones ope aequationis IV[tae] §. 10. adornantur.

Praeter haec vero Problemata pro ſolutione quadrilateri, adhuc bina occurrunt ad *tertiam* claſſem referenda, nimirum

XIII. quo, datis omnibus angulis quadrilateri et lateribus $a$, $b$ ſibi adiacentibus, quaeritur latus $c$.

XIV. quo, datis itidem omnibus angulis quadrilateri et lateribus *a*, *c* ſibi oppoſitis, quaeritur latus *b*. Pro his vero Problematibus ſolutiones ope aequationum III et IV. §. 10. expedientur.

Hac igitur ratione vt ſperamus, dilucide ſatis explicauimus omnia Problemata, quae ſoluenda occurrunt pro Tetragono, quatenus reſpectus habetur ad eius partes principales, latera nimirum et angulos quibus includitur. Si bina Problemata ad tertiam claſſem referenda ſeponantur, ſolutionum numerus pro binis prioribus claſſibus numero duodenario abſoluetur, quarum ſex ad vnamquamque claſſem referuntur.

18. In ſolutione Pentagoni problemata *primae* claſſis ea dicuntur, in quibus conſideratio binorum angulorum excluditur, vnde pro hac claſſe bini exorientur ordines, prouti ſcilicet anguli omiſſi vel inuicem fuerint proximi dum eidem lateri adiacent, vel bina ipſis interponantur latera. Pro priori ordine haec habebimus Problemata:

*Propoſitis omnibus Pentagoni lateribus et tribus angulis* $\beta$, $\gamma$, $\delta$, *quarum partium ſemper ſeptem quaevis vt cognitae ſpectantur, inuenire*

I. latus *e*; II. latus *a*; III. latus *b*; IV. angulum $\gamma$; V. angulum $\beta$,

horum problematum ſolutiones ex aequatione I[ma] §. 11. deducuntur.

Pro ſecundo ordine iſta ſunt Problemata:

*Pro-*

*Propoſitis omnibus Pentagoni lateribus, angulis autem tribus β, γ, ε et ſuppoſito quod harum partium ſeptem quaeuis cognitae ſunt, inuenire*

VI. latus *b*; VII. latus *a*; VIII. latus *e*; IX. angulum β; X. angulum ε,

ſolutiones deducuntur ex aequatione II^da §. 11.

*Secundae* vero claſſis Problemata pro Pentagono ad tres reducuntur ordines, pro primo etenim ordine latus omiſſum angulo omiſſo eſt adiacens, pro ſecundo inter angulum omiſſum et latus excluſum, aliud interiacet latus et demum pro tertio ordine inter partes omiſſas bina numerantur latera. Problemata primi ex hac claſſe ordinis ita enunciantur:

*Propoſitis quatuor lateribus* a, b, c, d *et quatuor angulis* α, β, γ, δ, *ſi praeter latera terni anguli cogniti habeantur*, inuenire:

XI. angulum α; XII. angulum β; XIII. angulum γ; XIV. angulum δ,

ſolutio autem abſoluetur per aequationem tertiam §. 11.
Pro ſecundo ordine ſequentia habebuntur Problemata:

*Propoſitis quatuor lateribus* a, b, c, d *et quatuor angulis* α, β, γ, ε, *quaerere quempiam horum angulorum, dum reliquae partes vt cognitae ſpectantur*

XV. angulum α; XVI. angulum β; XVII. angulum γ; XVIII. angulum ε,

ſolutio petenda eſt ex aequatione IV. §. 11.

Tertii ordinis non niſi duo problemata oriuntur ſequentia:

XIX. *Datis Pentagoni lateribus excluſo* e, *et angulis* $\alpha$, $\beta$, $\delta$ *quaerere angulum* $\varepsilon$ vel

XX. *Datis iisdem lateribus et angulis* $\alpha$, $\beta$, $\varepsilon$ *quaerere angulum* $\delta$.

Horum problematum ſolutiones per aequationem quintam §. 11. expedientur.

Ex tertia claſſe bina adipiſcemur Problemata:

XXI. *quo datis Pentagoni angulis et lateribus* a, b, c *quaeritur latus* d.

XXII. *quo ex datis itidem angulis et lateribus* a, b, d *quaeritur latus* c

haec autem problemata per alterutram trium vltimarum aequationum §. 11. ſolui poterunt. Excluſis problematibus tertiae claſſis, ſi quisquam concluderet numerum problematum ad binas claſſes priores pertinentium ad 40 aſſurgere, quod quinque occurrant ſolutionum ordines et vnaquaeque ſolutio octo contineat partes Pentagoni, is valde falleretur, nam ex his partibus plurimae ſunt, inter quas pro aliis atque aliis ſolutionibus perfecta intercedit paritas. Vt hoc exemplo illuſtremus, pro ordine primo prioris claſſis ex datis Pentagoni lateribus et angulis $\gamma$, $\delta$ eodem modo determinabitur angulus $\beta$, quo ex iisdem lateribus et angulis $\beta$, $\gamma$ determinatur angulus $\delta$, id quod cum ex ipſa rei natura admodum perſpicuum eſt, tum euidenter quoque de-

declа-

claratur per aequationem noſtram *primam* §. 11, quippe quum rationes quibus anguli $\beta$ et $\delta$ huic inſunt aequationi in perfecta ſint paritate. Tum vero quoque inter modos, quibus latera *a*, *d* vel *b*, *c* eidem aequationi inſunt, paritas habetur manifeſta.

19. Pro Hexagono problemata primae claſſis in tres ſubdiuiduntur ordines, prouti binos angulos omiſſos vel vnum, vel duo, vel tria interiacent latera. Ad primum horum ordinum referenda ſunt Problemata, *quibus per aequationem quam omnia Hexagoni latera et anguli* $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ *ingrediuntur, determinari debet*

I. latus *f*; II. latus *a*; III. latus *b*; IV. latus *c*; V. angulus $\varepsilon$; VI. angulus $\delta$

hoc autem praeſtabitur in ſubſidium vocata aequatione I. §. 12.

Ad ſecundum ordinem pertinent Problemata, *quibus ex aequatione quam omnia Hexagoni latera et anguli* $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\zeta$ *ingrediuntur*, determinatur

VII. latus *a*; VIII. latus *b*; IX. latus *f*; X ang. $\zeta$; XI. ang. $\delta$; XII. ang. $\gamma$

huic vſui inſeruit aequatio II. §. 12.

Tertius ordo huius claſſis continet problemata, *quibus per aequationem quam polygoni latera et anguli* $\beta$, $\gamma$, $\zeta$, $\varepsilon$ *ingrediuntur, quaeri debent*

XIII. latus *b*; XIV. latus *a*; XV. angulus $\beta$,

quem in finem adhibenda eſt aequatio III. §. 12.

Secun-

Secunda claſſis problematum ſimili modo in tres ſubdiuiditur ordines, prout nimirum angulus omiſſus lateri excluſo vel adiacet, vel inter angulum et latus, vnum aut duo latera interiacent. Pro primo huius claſſis ordine Problemata oriuntur, *quibus ex aequatione complectente omnia Hexagoni latera praeter* f, *omnesque angulos praeter* $\zeta$, *quaeruntur*

XVI. angulus $\alpha$; XVII. angulus $\beta$; XVIII. angulus $\gamma$; XIX. angulus $\delta$; XX. angulus $\varepsilon$,

quorum ſolutio ab aequatione IV. §. 12. pendet. Ad ſecundum huius claſſis ordinem ſpectant Problemata, *quibus ex aequatione quam omnia latera excepto* f, *et omnes anguli praeter* $\varepsilon$ *ingrediuntur*, *quaeritur*

XXI. angulus $\alpha$; XXII. angulus $\beta$; XXIII. angulus $\gamma$; XXIV. angulus $\delta$; XXV. angulus $\zeta$

vbi ſolutio inuenitur ope aequationis V[tae] §. 12. Tertius demum ordo ſecundae claſſis in ſe comprehendet Problemata, *quibus ex aequatione quam latera* a, b, c, d, e *et anguli* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\varepsilon$, $\zeta$ *ingrediuntur*, *determinari debent*

XXVI. angulus $\alpha$; XXVII. angulus $\beta$; XXVIII. angulus $\gamma$; XXIX. angulus $\varepsilon$; XXX. angulus $\zeta$,

quod perficietur adhibendo aequationem VI[tam] §. 12. Ad tertiam claſſem tria pertinent problemata:

XXXI. *quo datis lateribus* a, b, c, d *quaeritur* latus *e*

XXXII. *quo ex lateribus* a, b, c, e *quaeritur* d

XXXIII. *quo ope laterum* a, b, d, e *inueſtigandum* eſt *c*,

quae

quae Problemata per aequationem $IV^{tam}$ vel $V^{tam}$ et $VI^{tam}$ §. 12. ſolui poſſunt. Si tertiae claſſis Problemata ſeponantur, quae ad binas priores claſſes pertinent, numerantur 30, pro Pentagono autem numerus Problematum ex his claſſibus erat 20, pro Tetragono 12, dum pro triangulo ſex tantum huius generis oriuntur Problemata. Quod ſi igitur in genere numerus laterum Polygoni exprimatur per $n$, hinc per inductionem colligere poterimus numerum omnium Problematum ad binas claſſes priores pertinentium eſſe $= n(n-1)$. Vt autem pateat, hoc omnino in genere verum eſſe, caſus Polygonorum adhuc magis compoſitorum contemplabimur, pro quibus iſtam ſolutionum enumerationem ita adornabimus, vt adplicari poſſit ad Polygona quotcunque laterum.

20. In recenſendis ſolutionibus cuiuscunque Polygoni, id imprimis agitur, vt numerus ſingulorum ordinum ſub binis prioribus claſſibus contentorum exponatur, tumque vt in ſolutiones ex vnoquoque ordine deducendas inquiratur. Hoc autem poſterius facillime perficietur pro prima quidem ſolutionum claſſe, ſi attendatur ad latera et angulos quorum eadem eſt ratio in aequationibus; tum autem anguli vel latera pari modo aequationi cuidam huius claſſis inſunt, quando eundem ſitum reſpectu angulorum omiſſorum tenent. Sic bina latera quae angulis omiſſis adiacent dummodo in contrarias accipiuntur plagas, pro hac claſſe in perfecta ſunt paritate. Pro ſecundae claſſis ordinibus, ſi numerus la-

 terum

terum Polygoni fuerit par, tot habebuntur ſolutiones, quot anguli vnicuique aequationi inſunt, at ſi numerus laterum Polygoni impar ſit $= 2m + 1$, vltimus ordo huius claſſis, quo angulus omiſſus lateri omiſſo opponitur, non niſi *m* ſolutiones ſuppeditabit, quippe quum pro hoc ordine angulorum in aequatione contentorum tot habeantur paria. Sit igitur propoſitum Polygonum numero laterum impari $2m + 1$; dum autem heic ſpeciatim loquuturi ſumus de *Endecagano*, quae de hoc Polygono dicentur, ſimili ratione ad alia quaecunque Polygona numero laterum impari, adplicari poterunt. Exprimantur iam latera *Endecagoni* per *a*, *b*, *c*, *d* . . . *l* et anguli eius externi per A, B, C, D . . . L. Ad primam itaque ſolutionum claſſem eae referuntur, quas bini anguli huius Polygoni non ingrediuntur, et quoniam euidens eſt vnum eorum pro arbitrio ſemper aſſumi poſſe, ponamus angulum L ſemper eſſe omiſſum, quo ſuppoſito numerus ordinum huius claſſis determinabitur ex vario ſitu, quem alter angulus tenere poterit reſpectu anguli L. Conſequemur igitur quinque ordines, prouti nimirum omiſſi concipiuntur anguli:

I°. K, L; II°. I, L; III°. H, L; IV°. G, L; V°. F, L

ſi enim vlterius progrediamur, conſtabit ſitum anguli E reſpectu anguli L ſimilem eſſe ac anguli F, tumque angulum D reſpectu L ſitum tenere ſimilem illi, quem tenet G reſpectu ipſius L et ſic in ſequentibus, quare hinc nullae nouae oriuntur ſolutiones.

tiones. In genere pro numero laterum $2m+1$ hac ratione $m$ emergent ordines.

Pro I°. ordine excluſis angulis K, L paritas intercedit

angulos A, I; B, H; C, G; D, F;
latera *a*, *k*; *b*, *i*; *c*, *h*; *d*, *g*; *e*, *f*;

angulus vero E et latus *l* paria non agnoſcunt pro hoc ordine; eſt igitur omnium ſolutionum numerus tam ex angulis quam lateribus $= 11$, et in genere pro numero laterum $2m+1$, totidem quoque per hunc ordinem ex angulis et lateribus habebuntur ſolutiones.

Pro II°. ordine excluſis angulis L, I paritas habetur inter

angulos A, H; B G; C, F; D, E
latera *l*, *k*; *a*, *i*; *b*, *h*; *c*, *g*; *d*, *f*

angulus autem K et latus *e* paribus deſtituuntur, erit ergo ſolutionum numerus ex hoc ordine denuo 11, ſeu in genere $= 2m+1$.

Pro III°. ordine omiſſis angulis L, H paritas intercedit

angulos A, G; B, F; C, E; I, K;
latera *l*, *i*; *a*, *h*; *b*, *g*; *c*, *f*; *d*, *e*

quibus accedunt angulus D et latus *k*, quorum non occurrunt paria, ſolutionum igitur numero ex hoc ordine exiſtente 11, ſeu in genere $2m+1$.

Pro ordine IV°. omiſſis angulis L, G paritas habetur pro

angulis A, F; B, E; C, D; H, K

lateribus *k*, *i*; *l*, *h*; *a*, *g*; *b*, *f*; *c*, *e*

angulus autem I et latus *d* paribus deſtituuntur, vnde ſolutionum numerus iterum fiet 11, ſeu in genere $2m + 1$.

Pro $V^{to}$ ordine omiſſis angulis L, F paritas oritur inter

angulos A, E; B, D; K, G; I, H;

latera *k*, *h*; *l*, *g*; *a*, *f*; *b*, *e*; *c*, *d*

his accedunt angulus C et latus *e*, quae paria non agnoſcunt, ex quo ſolutionum numerus denuo fit 11, ſeu in genere $2m + 1$. Quum igitur ſinguli ordines praebeant $2m + 1$ ſolutiones, numerus autem ordinum ſit *m*, patet primam claſſem continere $m(2m + 1)$ ſolutiones.

21. Pro ſecunda claſſe ordines habebimus ſi de Endecagono ſermo ſit ſex, in genere autem $m + 1$. Scilicet ſi ponatur latus *l* continuo excludi, numerus ordinum aeſtimabitur ex vario ſitu, quem angulus omiſſus reſpectu lateris *l* habere poteſt; hinc planum euadit pro Endecagono ſex oriri ordines prouti praeter latus *l*, omiſſus fuerit angulus

I°. L; II°. K; III°. I; IV°. H; V°. G; VI°. F,

vlterius autem procedendo perueniemus ad angulos, qui reſpectu lateris *l* ſimilem tenent ſitum ac quispiam horum propoſitorum. Simili modo in genere conſtat pro Polygono numero laterum $2m + 1$, numerum ordinum huius claſſis aequalem eſſe $m + 1$.

Quin-

Quinque priores ordinum iam propoſitorum tot praebent ſolutiones, quot anguli ingrediuntur aequationes ad ipſos pertinentes, id eſt pro Endecagano 10 in genere autem $2\,m$; vltimus autem ordo quo angulus omiſſus lateri omiſſo opponitur, dimidium numerum ſolutionum hoc eſt pro Endecagono 5 vel in genere $m$ ſolutiones ſuppeditabit, quare ex his ſecundae claſſis ordinibus collectim ſumtis conſequemur $2\,m^2 + m = m\,(2\,m + 1)$ ſolutiones; at prima claſſis ſuppeditauerat quoque $m\,(2\,m + 1)$ ſolutiones, ideoque numerus ſolutionum ex binis his claſſibus erit $2\,m\,(2\,m + 1) = n\,(n - 1)$, ſi ponatur numerus laterum $= 2\,m + 1 = n$. De ſolutionibus tertiae claſſis, quae ſeorſim conſiderandae ſunt, heic in genere monuiſſe ſufficiat pro numero laterum impari $2\,m + 1$, easdem numero $m$ exprimi, at ſi numerus laterum fuerit par $= 2\,m$, quaeſtiones ad hanc claſſem referendae numero $m$ occurrent.

22. Si numerus laterum Polygoni fuerit par, bini habebuntur caſus, maioris perſpicuitatis gratia ſeorſim contemplandi, prouti nimirum numerus iſte fuerit vel impariter, vel pariter par. Conſideremus itaque primo Polygonum numero laterum impariter pari praeditum et in exemplum adhibeamus Decagonum, cuius latera dicantur $a$, $b$, $c$, $d \ldots k$ et anguli A, B, C, D . . . K, et pro prima quidem ſolutionum claſſe ſtatim patet quinque inueniri ordines, prouti omiſſi cenſentur anguli:

I°. K, I; II°. K, H; III°. K, G; IV°. K, F; V°. K, E.

In genere pro numero laterum $4m + 2$, hoc modo $2m + 1$ inuenientur ordines.

Pro I°. ordine decagoni ſequentia habemus paria
angulor. A, H; B, G; C, F; D, E
laterum *k*, *h*; *a*, *g*; *b*, *f*; *c*, *e*

accedunt latera *i* et *d*, quae paria non habent, hinc ſolutionum numerus fiet 10, et in genere $4m + 2$.

Pro II. ordine excluſis angulis K, H paria occurrunt

angulor. A, G; B, F; C, E
laterum *i*, *h*; *k*, *g*; *a*, *f*; *b*, *e*; *c*, *d*

accedunt anguli I, D tam inter ſe, quam cum reliquis diſpares, ex quo ſolutionum numerus 10, ſeu in genere $4m + 2$.

Pro III. ordine excluſis angulis K, G paritas habetur

angulor. I, H; A, F; B, E; C, D
later. *i*, *g*; *k*, *f*; *a*, *e*; *b*, *d*

accedunt latera *h*, *c* paribus deſtituta, ſolutionum numerus fit 10, in genere $4m + 2$.

Pro IV. ordine omiſſis angulis K, F paria habemus

angulor. I, G; A, E; B, D
laterum *h*, *g*; *i*, *f*; *k*, *e*; *a*, *d*; *b*, *c*

quibus adnumerantur anguli C, H inter ſe diſpares, hinc ſolutionum numerus 10, ſeu in genere $4m + 2$.

Pro

Pro V$^{to}$ ordine omiſſis angulis K, E ſibi inuicem oppoſitis, occurrunt anguli et latera, ex quibus duplici modo paria formari poſſunt, ſeu occurrunt paria inter ſe congrua et quidem angulorum

$$\text{I} \begin{matrix} \text{I}, & \text{F} \\ \text{A}, & \text{D} \end{matrix}\Big\} \ \text{II.} \begin{matrix} \text{H}, & \text{G} \\ \text{B}, & \text{C} \end{matrix}\Big\} \ \text{tum vero laterum I.} \begin{matrix} b, & f \\ a, & c \end{matrix}\Big\} \ \text{II.} \begin{matrix} i, & e \\ k, & d \end{matrix}\Big\}$$

quibus paribus accedit par laterum *b*, *g*, quod aliud ſibi congruum non agnoſcit, numerus igitur ſolutionum pro hoc ordine erit $= 5$; leui autem adhibita attentione conſtat pro ſuppoſitione generali numeri laterum $= 4m + 2$, hunc ordinem $2m + 1$ largiri ſolutiones, ſcilicet angulorum bina quaeuis ſemper occurrent paria congrua, totidemque paria congrua laterum, vnico tamen remanente laterum pari, quod aliud ſibi congruum non habet, idque ea complectetur latera, quae ab angulis omiſſis vtrinque aequaliter diſtant. Quatuor ordines priores huius claſſis pro decagono praebebant 40 ſolutiones, quibus ex vltimo ordine accedunt quinque; at in genere pro numero laterum $4m + 2$, liquet $2m$ ordines priores ſuppeditare $2m(4m + 2)$ ſolutiones, hisque ex vltimo ordine accedere $2m + 1$ ſolutiones, ita vt Problematum ad claſſem primam referendorum numerus ſit

$$= 2m(4m + 2) + 2m + 1 = (4m + 1)(2m + 1).$$

Quod ſecundam attinet claſſem, illa nullam parit difficultatem, habentur enim pro hac claſſe $2m + 1$ ordines, quorum vnusquis $4m + 1$ largitur ſolu-

tiones,

tiones, totidem ſcilicet, quot anguli ingrediuntur aequationes ad hanc claſſem pertinentes. Solutionum igitur ex hac claſſe ortarum numerus erit $(2m+1)(4m+1)$, hincque prima et ſecunda claſſis coniunctim praebebunt ſolutiones $(4m+1)(4m+2) = n(n-1)$, exiſtente numero laterum Polygoni $= 4m+2 = n$.

23. Pro numero laterum pariter pari, in exemplum proferamus Dodecagonum cuius latera dicantur $a$, $b$, $c$, $d$ ... $m$ et anguli externi A, B, C, D ... M. Pro hoc igitur Polygono tam prima, quam ſecunda claſſis ſolutionum ſex ſub ſe comprehendet ordines, et in genere pro Polygono quocunque, numero laterum exiſtente $4m$, ordines ad vnamquamque claſſem pertinentes habebuntur $2m$. Ordines Dodecagoni ſub prima claſſe contenti ſequentes numerantur, prouti omiſſi cenſentur anguli

I°. M, L; II°. M, K; III°. M, I; IV°. M, H; V°. M, G; VI°. M, F.

Pro ſingulis autem his ordinibus paria angulorum et laterum, cum angulis vel lateribus ſeparatim occurrentibus, ita ſuccincte repraeſentare licebit:

Pro

| Pro ordine | Paria angulor. et laterum | Anguli et lat ſepar. | Numer. ſolut. |
|---|---|---|---|
| I. | A, K; B, I; C, H; D, G; E, F | . . . . . . . | 12 |
| | *m, k; a, i; b, h; c, g; d, f* | *l, e* | |
| II. | A, I; B, H; C, G; D, F | L, E | 12 |
| | *l, k; m, i; a, h; b, g; c, f; d, e* | . . . . . . . | |
| III. | L, K; A, H; B, G; C, F; D, E | . . . . . . . | 12 |
| | *l, i; m, h; a, g; b, f; c, e* | *k, d* | |
| IV. | L, H; A, G; B, F; C, E | K, D | 12 |
| | *k, i; l, h; m, g; a, f; b, e; c, d* | . . . . . . . | |
| V. | K, I; L, H; A, F; B, E; C, D | . . . . . . . | 12 |
| | *k, h; l, g; m, f; a, e; b, d* | *i, c* | |
| VI. | Paria dupla | Par ſimplex | 6 |
| | L, G } K, H }<br>A, E } B, D } | C, I | |
| | *i, h* } *k, g* } *l, f* }<br>*b, c* } *a, d* } *m, e* } | | |

In genere autem pro numero laterum Polygoni $4m$, facile colligitur vnumquemque priorum $2m-1$ ordinum praebere $4m$ ſolutiones, vltimum vero pro quo anguli omiſſi inuicem ſunt oppoſiti, non ſuppeditare niſi $2m$ ſolutiones; quum ſcilicet ex lateribus inueniantur $2m$ paria, quorum bina quaeuis inter ſe congruunt, ita vt pro inueſtigatione laterum tantum $m$ quaeſtiones inter ſe diuerſae occurrant, pro angulis vero habebuntur $2m-1$ paria inter quae vnum, quod cum nullo alio congruit, hinc ex angulis reſultabunt $m$ quaeſtiones diuerſae, ſicque tam ex angulis, quam lateribus pro hoc vl-

 timo

timo ordine $2m$ prodibunt ſolutiones. Quum igitur ex $2m-1$ prioribus ordinibus naſcantur $4m(2m-1)$ ſolutiones, coniunctim cum vltimo ordine numerus ſolutionum ex tota prima claſſe erit

$$= 4m(2m-1) + 2m = 2m(4m-1).$$

Quod vero ſecundam attinet claſſem, facile perſpicitur ſingulos eius ordines ad tot perducere ſolutiones, quot in Polygono habentur anguli vno excepto, quapropter ex tota hac claſſe orientur $2m(4m-1)$ ſolutiones perinde ac ex prima, ſicque ex binis claſſibus omnino habebuntur $4m(4m-1)$ quaeſtiones pro huiusmodi Polygono reſoluendae. Vnde noſtra iterum confirmatur regula: pro vnoquoque Polygono quaeſtionum ad binas priores claſſes ſpectantium numerum eſſe $n(n-1)$, exprimente $n$ numerum laterum Polygoni. Sicque per ſingulos caſus eundo, huius regulae veritatem exacte demonſtratam dedimus.

24. Vt eo luculentius perſpiciatur, quomodo haec diſpertitio ſolutionum pro quocunque Polygono ſatis commode inſtitui queat, placet eandem exemplo quodam vberius illuſtrare. Ponamus igitur pro Heptagono omnes caſus ſolutionum eſſe deſcribendos, et pro iſto polygono latera exprimi litteris, $a, b, c \ldots g$, angulos vero indigitari per A, B, C ... G. Quo obſeruato ſcribantur hae partes prouti ſe ordine excipiunt, ſequentem in modum:

A*a* B*b* C*c* D*d* E*e* F*f* G*g* A*a* B*b* C*c* D*d*.

Primum

Primum igitur liquet pro prima ſolutionum claſſe, ordines inueniri tres, prouti omiſſi concipiuntur anguli:

I. $\left.\begin{matrix} G, F \\ G, A \end{matrix}\right\}$ II. $\left.\begin{matrix} G, E \\ G, B \end{matrix}\right\}$ III. G, D

nam caſus quo G, A excluduntur nullo reſpectu diſpar eſt ab eo, quo G, F omiſſi concipiuntur. Pro *primo* ordine ſi excluſi cenſeantur anguli G, F, patet ſequentes partes Polygoni reſpectu horum angulorum ſimiliter diſpoſitas eſſe:

angulos A, E; B, D et latera *g*, *e*; *a*, *d*; *b*, *c*

latus autem *f* quod angulis omiſſis interponitur et angulus C paribus deſtituuntur, quocirca concluditur pro hoc ordine ſeptem diuerſas oriri quaeſtiones. Pro *ſecundo* ordine excluſis angulis G, E, conſtat partes Polygoni, quae reſpectu horum angulorum eundem tenent ſitum, eſſe ſequentes:

angulos A, D; B, C et latera *f*, *e*; *g*, *d*; *a*, *c*

at angulus F qui intermedius eſt inter omiſſos et latus *b*, quod ab vtroque hoc angulo numeratur tertium, caeteris partibus diſſimiles erunt, ſicque pro hoc ordine iterum ſeptem emergent ſolutiones. Pro *tertio* ordine reſpectu angulorum omiſſorum G, D partes Polygoni ſequentes eundem tenent ſitum:

anguli F, E; A, C et latera *f*, *d*; *g*, *c*; *a*, *b*,

latus autem *e* ab vtroque angulo G et D numeratur ſecundum, angulusque item B, qui ſecundus eſt, tam a G quam D, paria non habent, hinc ex

 hoc

hoc denuo ordine ſeptem prodibunt ſolutiones. Pro ſecunda claſſe quatuor habebuntur ordines prouti praeter angulum G omiſſum concipiatur

latus $\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} e \\ a \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} d \\ b \end{matrix}\right\} c.$

Pro tribus prioribus ordinibus leui adhibita attentione conſtat determinationes reliquorum angulorum nullam inter ſe praeferre ſimilitudinem; at pro quarto ordine, quo omiſſum ſtatuitur latus $c$; manifeſtum eſt angulos A, F; B, E; C, D in perfecta eſſe paritate, ideoque pro hoc ordine tres tantum habebuntur ſolutiones, cum trium priorum vnusquisque ſex omnino praebeat.

25. Haec igitur ſunt principia ex quibus ſolutio cuiusuis Polygoni adornatur, quatenus reſpiciendum ſolummodo eſt ad latera et angulos quibus comprehenditur. Poſtquam enim ex Theorematibus generalibus ad Polygonum propoſitum adplicatis, deductae fuerint aequationes ad iſtud Polygonum pertinentes, enumeratio Problematum quae pro dicto Polygono locum habebunt, ratione in ſuperioribus praeſcripta inſtitui debet, tumque oſtendendum eſt, quaenam aequationum inuentarum pro vnoquoque Problemate ſoluendo adhiberi debeat. Quod autem reliquum operis eſt, in eo conſiſtit, vt pro ſingulis Problematibus, aequationes ita euoluantur, vt ſolutionibus euadant accommodatae; id eſt vt quantitates incognitae per iſtas aequationes commode determinari queant. Huiusmodi autem euolutio,

prae-

praeterquam quod nullam pariat difficultatem, exemplis melius illuſtrari poteſt, quam certis regularum praeceptis ſtabiliri. In genere tamen obſeruare convenit determinationem laterum Polygoni per Problemata primae claſſis ad aequationes deducere quadraticas ſiue puras, ſeu affectas; hoc eſt ſi latus incognitum dicatur $x$, eius determinatio abſoluetur vel per aequationem $x^2 = P$, poſito quod P ſit quantitas cognita ex cognitis Polygoni lateribus et angulis certo modo compoſita; vel per aequationem $x^2 + Px = Q$, vbi P et Q iterum ſunt quantitates cognitae ex partibus Polygoni cognitis conflatae. Determinatio angulorum incognitorum per Problemata huius claſſis, inſtituetur per aequationem vel huius formae $\text{coſ.}\,\Phi = R$, vel iſtius $\text{coſ.}\,\Phi = R\,\text{ſin.}\,\Phi + S$, deſignante $\Phi$ angulum incognitum, R vero et S quantitates cognitas latera et angulos Polygoni involuentes. Denique inueſtigatio angulorum per Problemata ſecundae claſſis ad huiusmodi perducet aequationes:

$$\text{Tang.}\,\Phi = R,\quad \text{ſin.}\,\Phi = R \quad \text{vel} \quad \text{ſin.}\,\Phi = R\,\text{coſ.}\,\Phi + S,$$

deſignantibus iterum R, S quantitates quaspiam cognitas. Sic per aequationem tertiam pro Tetragono §. 10 habetur

$$\text{Tang.}\,\alpha = -\frac{(b\,\text{ſin.}\,\beta + c\,\text{ſin.}\,(\beta + \gamma))}{a + b\,\text{coſ.}\,\beta + c\,\text{coſ.}\,(\beta + \gamma))},$$

per aeqnationem vero quartam

$$\text{ſin.}\,\delta = \frac{a\,\text{ſin.}\,\alpha + b\,\text{ſin.}\,(\alpha + \beta)}{c}.$$

Tum vero per aequationem tertiam pro Tetragono elicitur:

$$\text{ſin.}\,\beta = -\frac{\text{coſ.}\,\beta\,(b\,\text{ſin.}\,\alpha + c\,\text{ſin.}\,(\alpha+\gamma)) - a\,\text{ſin.}\,\alpha}{b\,\text{coſ.}\,\alpha + c\,\text{coſ.}\,(\alpha+\gamma)}$$

vel potius ſi placet

$$\text{ſin.}\,(\alpha+\beta) = -\frac{c\,\text{coſ.}\,(\alpha+\beta)\,\text{ſin.}\,\gamma - a\,\text{ſin.}\,\alpha}{b + c\,\text{coſ.}\,\gamma}.$$

26. Diximus ſupra in reſolutione Polygonorum reſpectum quoque haberi poſſe ad lineas eius diagonales, et angulos harum diagonalium cum lateribus Polygoni, hanc autem reſolutionis ſpeciem multo latius patere, quam illam priorem iam a nobis adumbratam. Interim tamen videtur haec quoque reſolutio ad certa principia generalia reuocari poſſe, quamuis omnium ſolutionum euolutio haud parum euadat prolixa. Pro iſthac vero reſolutione id imprimis agendum eſt, vt certa ſolutionum conſtituantur genera, quae deinde in ſuas claſſes et ordines ſibi ſubordinatos commode diſtribui poterunt. Sic ſi attendatur ad vnicam tantum diagonalem Polygoni eiusque angulos cum lateribus Polygoni, duo genera ſolutionum conſtitui poſſunt; quorum prius eas complectitur quaeſtiones quas haec linea diagonalis ingreditur, poſterius autem ſolutiones inuoluere cenſendum eſt, quae non ipſam diagonalem, ſed angulos tamen eius cum lateribus Polygoni inuoluunt. Prius genus in varias ſubdiuidi poteſt claſſes prouti cum hac linea diagonali, vnum vel duo, vel tria vel adeo omnia Polygoni latera ſolutionem ingrediantur. Haec autem conditio ſemper

per quidem praeſcribitur, vt ſaltem vnum Polygoni latus cum diagonali in ſolutione occurrat; nam ex ſolis angulis figurae cuiuscunque rectilineae, linea quaedam ad eam pertinens, ſiue latus fuerit ſeu diagonalis minime determinari poteſt. Pro ſolutionibus poſterioris generis, ſimili ex principio diſtributio in claſſes perficienda videtur, attendendo nimirum ad numerum laterum Polygoni, quae ſolutionem ingrediuntur. Haec autem partitio quae pro vnico Polygoni diagonali haud parum complicata eſt, multo intricatior euadet, ſi ad binas, tres vel plures Polygoni diagonales ſimul attendendum ſit; nec adhuc quidem mihi liquet quomodo ita in genere adumbrari poſſet, vt ad vnumquodque Polygonum facilis eius eſſet adplicatio.

27. Qui attente conſiderauerit modum, quo euolutio ſolutionum pro quouis Polygono perficienda eſt, facile perſpiciet eam ad iſta Problemata referri poſſe, quae ad doctrinam de combinationibus pertinent; quare quum circa reſolutionem Polygonorum aliae quoque occurrant quaeſtiones, quarum ſolutiones ex hac doctrina petendae ſunt, de praecipuis quibusdam earum nonnulla monuiſſe haud pigebit. A Geometris quaeſtionem propoſitam fuiſſe conſtat, quot diagonales in vnoquoque Polygono duci queant, huius autem quaeſtionis ſolutio facillime expedietur, ſi conſideremus quot omnino in vniuerſum duci poſſint lineae rectae, bina quaeuis puncta Polygoni iungendo; ſi enim a numero omnium harum linearum

nearum ſubtrahatur numerus laterum Polygoni, reſiduum dabit numerum linearum diagonalium. Poſito igitur numero laterum Polygoni $= n$, patet ex quouis eius puncto A ad reliqua B, C, D etc. quorum numerus eſt $n - 1$, duci quoque poſſe $n - 1$ lineas rectas, ſimiliter ex angulo B ad puncta C, D, E etc. duci poterunt $n - 2$ lineae rectae et lineae ex puncto C ad puncta D, E etc. ducendae habebuntur $n - 3$; ex quo colligitur numerum omnium harum linearum rectarum eſſe ſummam progreſſionis arithmeticae vnitate creſcentis, cuius primus terminus eſt 1 et vltimus $n - 1$, hincque $= \frac{n(n-1)}{2}$. Ex hac igitur ſumma ſubtrahatur ſumma laterum Polygoni $n$, reſtabit ſumma linearum diagonalium $= \frac{n(n-3)}{2}$, ſicque pro quadrilatero conſequemur 2 diagonales, pro Pentagono 5, pro Hexagono 9 etc. vti vnicuique ad ipſas quoque figuras attendenti, haud dubium eſſe poterit. Deinde iſta quoque proponi poteſt quaeſtio, quot in vnoquoque Polygono dentur anguli ſiue laterum, ſiue diagonalium? Facile autem liquet ad hanc quaeſtionis reſolutionem id tantum requiri, vt inueſtigetur quotnam anguli conſtituantur circa punctum quodcunque A Polygoni; ſi enim numerus horum angulorum multiplicetur per numerum laterum Polygoni, habebitur numerus omnium angulorum ad Polygonum pertinentium. At circa punctum A in polygono $n$ laterum, inuenientur omnino $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ anguli; tot ſcilicet habebuntur, quot modis litterae B, C, D .. G

reliqua

reliqua puncta Polygoni indigitantes inter ſe combinari poſſunt, binas quasuis earum iungendo, harum autem combinationum numerus eſt $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, exiſtente numero litterarum B, C, D ... G $= n - 1$. Conſequitur ergo in figura rectilinea numero laterum $n$ praedita, eſſe numerum omnium angulorum ſiue laterum ſeu diagonalium $= \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ et ſi inde ſubtrahantur anguli, quos latera Polygoni inter ſe conſtituunt, quorum numerus eſt $n$, habebitur numerus angulorum, quos diagonales ſiue inter ſe, ſeu cum lateribus conſtituunt $= \frac{n^2(n-3)}{2}$.

28. Denique haec quaeſtio haud parum curioſa proponi poteſt, quot modis data quaeuis puncta A, B, C, D ... L quorum numerus eſt $n$, lineis rectis ita iungi poſſunt, vt inde oriatur Polygonum numero laterum $n$ praeditum? Si nimirum quatuor proponantur puncta A, B, C, D, patet per eorum coniunctionem tria omnino quadrilatera produci poſſe A B C D, A B D C, A C D B; prouti ſcilicet ordo quo litterae A B C D ſe inſequuntur, immutetur. In hoc igitur Problemate id agitur, vt datis litteris A, B, C, D ... K, L quorum numerus eſt $n$, quaeratur, quot dentur variationes pro ordine, quo hae litterae ſe inſequuntur; intelligitur autem ordinem litterarum eundem manere, quaecunque earum prima cenſeatur; ita vt hae combinationes A B C D, B C D A, C D A B, D A B C, nec non D C B A, C B A D, B A D C, A D C B ratione or-

 dinis

dinis litteras intercedentis pro identicis ſint habendae. Quum igitur poſitio vniuscuiusque litterae heic non ſpectetur, modo eundem ordinem reſpectu reliquarum teruet; ponamus A eſſe in vnoquoque ordine primam, tum autem liquet perinde eſſe ſiue A cum reliquis illo modo A, B, C, D ... K, L, ſiue hoc A, L, K ... C, B iungatur, ideoque ſi numerus omnium permutationum pro litteris, B, C, D...K, L quaeratur, dimidium huius numeri exprimet numerum variationum pro ordine inter litteras A, B, C, D ... K, L; inter permutationes enim litterarum B, C ... K, L binae quaeuis dantur quae ipſi A iunctae, vnam eandemque variationem ordinis inter A, B, C ... K, L producunt. At pro litteris B, C, D ... K, L earum numero exiſtente $n - 1$, numerus omnium permutationum eſt $= (n-1)(n-2)(n-3) \ldots 2 . 1$, ideoque numerus qui exprimit variationes ordines inter latera Polygoni numero $n$, erit $= \frac{(n-1)(n-2)(n-3) \ldots 3 . 2 . 1}{2}$. Idem vero etiam ſequenti ratione demonſtrari poteſt. Ponamus $m$ deſignare numerum, qui exprimit variationes ordinis inter litteras A, B, C, D ... K, L et omnes harum litterarum factas eſſe permutationes; euidens itaque erit ad eundem ordinem eas referri debere permutationes, quibus litterae A, B, C, D ... K, L ſi in orbem diſponantur, eundem inter ſe ſeruent ſitum, cuiusmodi ſunt:

A, B, C ... I, K, L; B, C, D ... K, L, A; C, D, E ... L, A, B; etc.
L, K, I ... C, B, A; A, L, K ... D, C, B; B, A, L ... E, D, C; etc.

Leui

Leui autem adhibita attentione conſtat, ad vnumquemque ordinem hoc modo $2n$ permutationes referendas eſſe; nam ſeruato ordine litterarum inter ſe, littera A numerari poteſt vel prima, vel ſecunda, vel tertia vel $n$ſima, idque duplici ratione. Fiet igitur $2nm$ aequalis numero omnium permutationum, quae cum litteris A, B, C . . . K, L inſtitui poſſunt, hoc eſt

$$2nm = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots 2.1,$$

vnde conſequitur

$$m = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)(n-3)\dots 3.2.1$$

prorſus vt modo inuenimus. Suppoſuimus heic numerum punctorum A, B, C, D . . . K, L aequare numerum laterum Polygoni, at ſi numerus punctorum $= m$ maior ſit numero laterum $n$, quaeſtio aliquanto generalior euadit, quae tamen aeque feliciter expediri poteſt, dum nempe quaeritur quot modis iungendo puncta A, B, C, D . . . K, L formari poſſit Polygonum numero laterum $n$ conſtans? Si ſcilicet quaeratur numerus omnium combinationum inter litteras A, B, C, D . . . K, L quarum $n$ ſimul ſumi oportet, hicque numerus multiplicetur per eum, qui exprimit variationes ordinis pro qualibet combinatione; habebitur numerus qui indigitabit quot modis ex datis punctis A, B, C, D . . . K, L exiſtente eorum numero $m$, conſtrui poſſit Polygonum numeri $n$. At numerus combinationum eſt

$$= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-n+2)(m-n+1)}{n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1},$$

 quare

quare fiet numerus modorum quibus ex punctis A, B, C ... K, L conſtruitur Polygonum

$$= \frac{m}{2n}(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+2)(m-n+1),$$

quod etiam alio modo facile euinci poterit. Hinc intelligitur ex quatuor punctis, quadruplici modo triangula conſtrui poſſe, ex quinque punctis decem, ex ſex punctis viginti et ſic in ſequentibus. Ex quinque autem punctis quadrilatera conſtrui poſſunt quindecim, ex ſex 45, ex ſeptem 105 etc.

PHYSI-

# PHYSICO-
# MATHEMATICA.

# COMMENTATIO PHYSICO-MECHANICA GENERALIOR PRINCIPII DE COEXISTENTIA VIBRATIONVM SIMPLICIVM HAVD PERTVRBATARVM IN SYSTEMATE COMPOSITO.

Auctore

*DANIELE BERNOVLLI.*

§. 1.

Non haeſito principium, de quo hic ſermo eſt et quod in Commentariis Academiae Berolinenſis demonſtraui, inter vtiliſſima referre theoremata phyſico-mechanica, etiamſi ſummis quibusdam Geometris viſum fuerit non poſſe integram, de chordis vniformiter craſſis vibrantibus, theoriam exinde deduci, cui tamen ſententiae ego nunquam aſſentire potui firmiter perſuaſus, omnem hanc theoriam in hoc ſolo poſitam eſſe, vt vibrationes ſingulorum ordinum inferiorum exacte ſint ſubmultiplae, duratione ſua, vibrationum chordae fundamentalium. Ponamus autem ad momentum chordam tenſam curuaturas admittere, quas principium meum non poſſit exacte ſuppeditare,

tare, nemo tamen inficias ibit, tales ſuppeditare, quae ab omni curuatura data, in tota chordae longitudine, *infinite parum* differant: id etenim apodictice demonſtraui; velim igitur mihi ſignificetur, quid per diſcrimen *infinite parum* in hoc negotio intelligi debeat, et quidem in argumento, quo ipſae vibrationes ſupponi debent infinite paruae, ita vt ſolutionem abſolute geometricam pro vibrationibus vtcunque ſenſibilibus nequidem admittat; ſi ſolutionem pure geometricam in his contendas, motum vibratorium determinabis in perfecta quiete, quia nec minimae vibrationes ſunt perfectae inter ſe iſochronae. At probe gnarus quam inutile ſit cum aliis de rebus diſputare, quae vnice ab idea *infiniti* ſiue *abſoluti* ſiue *relatiui* pendent ſimulque ambiguam inuoluunt quaeſtionem, quo vsque iſtud infinitum cum argumento ſubſtrato phyſico in ſingulis partibus elementaribus conſiſtere poſſit; horum, inquam, gnarus, nolui litem, qua nodus in ſcirpo quaeritur, vrgere maluique ad argumenta, quae dicuntur *ad hominem*, confugere; igitur problema propoſui de vibrationibus chordae inaequaliter craſſae, cuius ſolutio generalis adhuc deſideratur quidem, at quod diuerſas admittit ſolutiones particulares, viſurus quaenam inter methodos noſtras fertiliorem habitura eſſet ſegetem, at vero intra eosdem, ſua quisque methodo vſus, ſubſtitimus cancellos, niſi quod mea, ſynthetica potius quam pure analytica, methodus, corollaria prodiderit ſpecialiſſima, quae ſubterfugerunt methodos, quas opinantur, fertiliores. Tolle modo omnem

omnem de infinito amphiboliam, quod in honorem ſtudii mathematici dixerim, fallere neſcii, et omnem inter nos tolles controuerſiam.

§. 2. Sed quam egregie ipſa experientia docet atque confirmat coëxiſtentiam vibrationum in chorda tenſa, dum quaeuis vibratio ſimplex ſeorſim organo auditus diſtincte percipitur; experimentum volo notiſſimum, quod nondum fuerat explicatum, cum in vna eademque chorda ſaepe ſimul duo pluresue ſoni percipiuntur, inter quos eminent ſonus fundamentalis eiusque duodecima; imo muſicus attentus ſubandit atque diſtingnit tertiam maiorem octauae duplicis ſiue decimam ſeptimam ſimul ſonantem; ſonant vtique et ipſa octaua cum octaua duplice qui vero ſoni ob nimiam conſonantiam difficulter a ſono fundamentali dignoſcuntur. Mire placuit phaenomeni explicatio mea Magno *Eulero*, quam eandem prorſus reiecit ſagaciſſimus geometra de la *Grange*. Exemplum afferam ſimpliciſſimum vt clarius pateat quod res eſt.

*Sit* $p$ aequalis ſemicirculo, cuius radius vnitate expreſſus eſt; ponatur longitudo chordae $= l$; ſumatur in chorda abſciſſa $x$; ſit pro ſono fundamentali maxima elongatio chordae ab axe $= \alpha$ et pro ſono tertii ordinis $= \beta$; ſit denique pro abſciſſa $x$, applicata $= y$; erit aequatio ad curuam chordae pro ſolo ſono fundamentali $y = \alpha$ ſin. $\frac{x}{l} p$ et pro eiusdem duodecima $y = \beta$ ſin. $\frac{3x}{l} p$; pro ambabus vibrationibus coëxiſtentibus habes itaque $y = \alpha$ ſin. $\frac{x}{l} p + \beta$ ſin. $\frac{3x}{l} p$

fac $\beta = 0$ ſolum audies ſonum fundamentalem; pone e contrario (quod haud difficulter obtinetur, vt conſtat per experimenta muſica) $\alpha = 0$, percipies ſolam duodecimam: denique ſi ſenſibilis ſit ratio inter $\alpha$ et $\beta$, ambo ſoni ſimul percipiuntur; praeminebit alteri ſonus, pro quo maiores et fortiores militant elongationes: haec indicat theoria noſtra, confirmat experientia; quid dubium mouere poſſit vel vllam haeſitationem, nullus videre poſſum.

§. 3. Ab exemplo in chordis muſicis ſumpto progrediamur ad aliud, difficiliores quidem ac ſublimiores calculos poſtulans, quod vero plures ſonos coëxiſtentes eosque admodum diſtinctos ſed valde disſonos auribus offert. Scilicet in arte muſica adhibere etiam ſolent laminas chalybeas variae dimenſionis, quae combinatae ludum efformant gallice *carillon* dictum; huiusmodi laminae prismaticae longiuſculae, e filo ſuſpenſae, percutiantur, plerumque pro re nata tres, quatuor pluresue ſonos, diverſos, diſtinctos, atque plenos ſimul edunt. Dedimus autem, Illuſtris *Eulerus* et ego, integram horum ſonorum et vibrationum, quibus quisque ſonus debetur, theoriam, cui multas ſuperaddidi obſeruationes experimentales, quibus abſtruſa haec theoria egregie confirmata fuit. Viam ingreſſus ſum plane ſimilem cum ea, quam calcauerat *Newtonus* in aurea theoria ſua de coloribus; modum oſtendi quo ad lubitum ſonus quisque ſupprimi poſſit ita, vt vnus ſolus retineatur. Poſtquam enim intellexiſſem laminam inter vibrandum figuram aſſumere angui-

formem,

formem, quae axem diuerſis in punctis, in quibus *nodi* formantur, interſecet, protinus animaduerti innumeras admittendas eſſe, in eadem lamina percusſa, vibrationum ſpecies, quarum quaeuis ſuum habeat nodorum numerum determinatum; pro ſimpliciſſima vibratione, quae ſono reſponderet fundamentali, duos orituros eſſe nodos, pro ſequente tres, dein quatuor etc. Facile autem intelligitur, ſi lamina duobus extremis digitis eo in loco prehendatur, vbi nodus eſt, cuicunque vibrationi nodus iſte repondeat, fore vt a lamina percuſſa ſolus ſonus, iſti vibrationi debitus, edatur, ſuppreſſis caeteris omnibus, niſi fortaſſe nodus iſte communis ſit duobus pluribusue vibrationum ordinibus; Caſus iſte praeſertim obtinetur, ſi lamina in medio, vbi nempe centrum grauitatis eſt, prehendatur; punctum enim medium nodum ſiſtit omnibus et ſingulis ordinibus, quorum nodi ſunt numero impares, communem; ſic ſoli ordines nodorum parium ſupprimuntur in hoc caſu ſpecialiſſimo, manent impares omnes: Igitur lamina in alio nodo digitis premenda eſt, vt vnicus prodeat ſonus purus, clarus, medulloſus atque firmatus, praeter quem nihil percipiatur, quam ſtrepitus aliquis ſuffocatus. Ad hoc requiritur, vt ſinguli nodi pro quouis ordine eorumque poſitiones calculo ſubducantur, quod olim feci; his poſitionibus cognitis, cuiusuis experimenti euentus praeſagiri poterit. Si quaeſtio fuerit verbi gratia de vibrationibus quatuor nodos formantibus, a quibus ſonus edatur ordine ſuo tertius, in quocunque

 nodo

nodo aut in quibusuis nodis binis ſimul aut etiam ternis vel denique ſinguli quaternis lamina digitis comprimatur atque percu iatur ſonus vnicus ſemperque idem orictur, ſi omni accuratione experimentum fuerit inſtitutum; hunc ſonum notaui in monochordio eundemque etiam diſtincte percepi, cum lamina e filo ſuſpenſa percuteretur, etſi multos alios ſonos tunc haberet permixtos. An non huiusmodi experimenta veluti apodictice demonſtrant, coëxiſtentiam plurium ſonorum prouenire a coëxiſtentia plurium vibrationum, nequaquam ſe inuicem perturbantium? Adde his experimentis plurima alia, quae allegaui in Exercitatione de ſonis, qui a tibiis pneumaticis formantur, Commentariis Academiae Pariſinae inſerta, vbi principiorum meorum feliciſſimum vſum in plurimis nouis problematibus ſoluendis mechanico-muſicis abunde oſtendi ſimulque experimentis confirmaui. Sed quid profundioribus opus eſt in re per ſe clara? an non e longinquo in choro Muſico ſinguli ſoni, vtut ſimul ſonantes, diſtincte percipiuntur, qui non ſolum tenore ſuo ſed et modificatione inſtrumento propria, valde inter ſe diverſi ſunt? An non haec omnia in eodem aere intermedio propagantur? An non in quauis particula aerea, vbicunque fuerit poſita, innumerae ſimul excitantur vibratiunculae, quarum quaeuis ſuam perpetuo conſeruat indolem, quam ſi ſola eſſet. Video certo idem hic accidere aëri tremulo, quod obſervatur in camera obſcura de materia aetherea, dum infiniti radii ex omni plaga aduentantes atque per mini-

minimam aperturam tranſeuntes ſinguli obiecta externa nitidiſſime interne depingunt absque perturbatione, oculisque diſcernuntur qualia ſunt, prouti auribus ſoni ſimul percipiuntur varii, vnusquisque tenoris vibrationibus ſuis ſimplicibus debiti. At taedet plura de re nimis manifeſta diſputare.

§. 4. Relicta hac controuerſia, liceat ſaltem quaedam de praeſtantia methodi noſtrae commentari. Sit ſyſtema qualecunque ex pluribus corporibus, certa lege mobilibus, compoſitum, quae a ſitu ſuo naturali paululum diſtracta moxque ſibi relicta motibus reciprocis inter ſe diuerſiſſimis agitentur atque tunc quaeſtio ſit determinandi hosce motus in ſingulis corporibus. Non puto quaeſtionem hanc generalem vnquam ante me fuiſſe tractatam; ego quidem, cum ante hos 40 annos de motibus reciprocis catenae ſuſpenſae ſimulque de pluribus corporibus e filo flexili ſuſpenſis eorumque vibrationibus vel oſcillationibus agerem in Commentariis veteribus Academiae, modum oſtendi, quo oſcillationes ſynchronae, quas regulares et permanentes ab eo tempore vocaui, ſingulorum corporum ſimul vibrantium, ſuasque vibrationes eodem inſtanti incipientium atque finientium determinarentur; problema iſtud tot ſemper radices habet quot ſunt corpora in ſyſtemate atque docet configurationem ſitus initialis corporum, vt inde vibrationes ſynchronae fiant, ſimplices, regulares atque permanentes: Cum vero praeter hos caſus ſaepius inſpicerem motus oſcillatorios in variis corporibus filo flexili connexis et ſuſ-

 penſis,

penſis, dici non poteſt, quam varios, vagantes, anormes, inconſtantes illos tunc conſpexerim, ita vt tum temporis, quo nouum adhuc erat argumentum, exiſtimarem fruſtra operam impendi in illorum indaginem geometrico mechanicam; nec dubito quin idem ſenſerint hac de re vel praeſtantiſſimi huius ſaeculi geometrae, quia nulla huius quaeſtionis ſolutio comparuerat, cum tandem obſeruaſſem atque demonſtraſſem motus reciprocos in ſingulis corporibus ſemper componi ex oſcillationibus omnibus, quas ſyſtema admittit, ſimplicibus et regularibus, quarum determinationem praemiſeram. Hoc autem problema poſtremum omnibus numeris eſt determinatum, pure geometricum nec vlli controuerſiae obnoxium, quotcunque fuerint corpora, qualiscunque eorum maſſa, vbicunque ſint poſita et quibuscunque demum vinculis, inflexionem admittentibus, inter ſe connexa. Haec cum ita ſint absque vlla exceptione pro quocunque corporum numero, vera etiam erunt, ſi numerus iſte ſtatuatur infinitus et quidem *complete* vera, hinc apparet in theoria noſtra contineri, quicquid catenae ſuſpenſae, chordae tenſae ſiue vniformiter ſiue inaequaliter craſſae, motibus ſuis reciprocis, proprium habent. Denique notandum eſt, praefatas vibrationes in ſyſtemate coëxiſtentes, alias aliis eſſe tardiores, chordas autem vniformiter craſſas eius eſſe indolis, vt quaeuis vibratio, cuiuscunque ſit ordinis, exacte ſubmultipla ſit, vibrationis tardiſſimae fundamentalis; igitur omnes omnium ordinum vibrationes, ſi ſimul incipiant ſimul

mul etiam finient cum vibratione tardiſſima, vnde intelligitur qui fiat, vt ſolae chordae vniformes egregia gaudeant proprietate, quam Illuſtris Geometra, D. *D'Alembert* primus in illis ſagaciſſime animadvertit, ſcilicet quod pro qualicunque curuatura initiali, poſt quamuis vibrationem *fundamentalem* quaevis chordae puncta in ſtatum quietis momentaneae reducantur, cui ego theorematí plane conſentio, modo nullum ſit, in curuatura aſſumta, punctum, quod contradictionem implicet cum hypotheſi, qua ſingulae motiunculae pro *infinite paruis* habentur. In hanc hypotheſin impingunt omnes variationes quae fiunt per ſaltus; oportet, meo iudicio, vt radius oſculi pro quouis puncto poſſit pro infinite magno haberi, id eſt, infinities maiore, quam, verbi gratia, longitudo chordae. Haec quidem pro vibrationibus plurium ordinum coëxiſtentium, quae ſingulae quietem offerunt momentaneam, quoties vibratio fundamentalis ad eam perducta eſt; at vero caſus iſte vnicus eſt inter infinitos; etenim vibrationes diuerſorum ordinum poſſunt non ſimul incipere et ne tunc quidem deficit principium noſtrum, ita vt hoc titulo ſolutio noſtra poſſit pro multo generaliori haberi, quam quae a ſummis Geometris impertita fuit; Indicat enim methodus noſtra fore, vt ſingulae vibrationes vnius eiusdemque ordinis abſolvantur et reciprocentur eodem modo ac ſi nulli alii vibrationi ſint permixtae. Hinc oritur theorema generalius.

Quiſ-

*Quiscunque fuerit ſtatus chordae vniformis tenſae pro dato quouis temporis inſtanti, tam ratione incuruationis chordae quam ratione motus abſoluti in ſingulis particulis, is idem ſtatus ſitu inuerſo recurret poſt quoduis interuallum vnius vibrationis ſimplicis fundamentalis vel in eodem ſitu poſt quasuis duas vibrationes fundamentales.*

Hinc illa affinitas, quam praeſens argumentum habet cum theoria ſerierum *recurrentium.* Inde etiam plurima deduxi conſectaria pro chordis inaequaliter craſſis, notatu pariter digna, quae vix a ſublimioribus calculis expectanda fuiſſent absque ſynteſi noſtra.

§. 5. Redeo ad ſyſtemata corporum numero finitorum quotcunque; quae non puto aliter quam methodo noſtra pertractari poſſe, vtpote quae neceſſario praeuiam determinationem ſingularum radicum in aequatione algebraica cuiuscunque dignitatis poſtulant. In hoc latiſſimo campo nullae quaeſtiones ancipites occurrunt; nulla hic lis eſt; ſolutio horum problematum *in abſtracto* facilis eſt, vtcunque prolixa aut difficilis ſaepe ſit methodi applicatio *in concreto.* Ipſa vero methodus in hoc conſiſtit, vt in ſyſtemate ſingula corpora ab axe aequilibrii diducta putentur atque proportio elongationum ab axe, ſecundum principia mechanica, inquiratur ea lege, vt vires acceleratrices corporum verſus axem ſint ipſis elongationibus proportionales: hoc praeſtito fiet vtique, vt ſingulae ſyſtematis partes ſimul oſcillationes ſuas perficiant, ſi ſimul eas inchoarint, atque

hoc

hoc modo oſcillationes ſimplices, ſynchronae, permanentes fiant. Verum aequatio finalis, qua corporum ſingulae elongationes ab axe determinantur, tot habebit dimenſiones, quot ſunt corpora, vnde ſequitur totidem ſimul fore radices, quarum quaeuis ſingularem ſyſtematis configurationem initialem ſiſtit ſimulque diuerſam longitudinem penduli ſimplicis iſochroni exhibet: quaelibet etiam configuratio ſeruabit pro vnico corpore diductionem arbitrariam, ad quam caeterae diductiones determinabuntur. Sic rurſus erit problema determinatum, vt quaeratur quaenam in quauis configuratione ſeorſim ſumta diductio arbitraria ſeligenda ſit, vt pro coëxiſtentibus ſingulis vibrationibus ab initio diductio cuiusuis corporis abſoluta datam obtineat magnitudinem. Hinc denique patet, quod in omni ſyſtemate, vtcunque eius partes a ſitu aequilibrii fuerint deductae, motus abſolutus inde oriturus definiri poſſit.

§. 6. Syſtemata corporum, diuerſis vinculis connexorum, innumera concipi poſſunt; in aliis motus reciproci ſingulorum ordinum ita rapide ſe ſubſequuntur, vt oculorum aciem effugiant, cuiusmodi eſſe ſolent chordae muſicae tenſae, quibus etiam corpora annexa eſſe poſſunt: ad hunc cenſum quoque pertinent laminae elaſticae earumque motus tremuli a percuſſione ſiue etiam campanae aut tympana, de quibus poſterioribus ſolus Incomparabilis *Eulerus* agere auſus eſt. Hoſce motus tremulos auris, non oculus, diiudicat, ſi modo plusquam triginta vibrationes intra minutum ſecundum perficiantur,

tur. Quia vero phaenomena, in diuerſitate ſonorum coëxiſtentium, obſeruata aliter ab aliis explicantur, argumentum noſtrum malo dilucidare, a motibus reciprocis in ſyſtemate, qui oculis diſtincte cum omnibus variationibus obſeruari poſſunt. Huic fini egregie inſeruiunt pendula multifila, ſi ſcilicet plura corpora, filis intermediis connexa, ſuſpendantur motibusque reciprocis agitentur: tunc, pro diuerſis circumſtantiis, tam varii coëxiſtentes motus in ſingulis corporibus apparent, vt non aliter quam ad legem principii noſtri explicari poſſe videantur: ſi verbi gratia, tria corpora plumbea vncis paruulis inſtructa ad commodiorem ſuſpenſionem, duobus filis intermediis connexa, atque corpus ſupremum filo tertio ſuſpendatur, tumque ſingula corpora pro lubitu a ſitu ſuo naturali paululum diducantur tandemque totum ſyſtema ſimul ſibi relinquatur, tunc plerumque in ſingulis corporibus agitationes hinc inde oriuntur tam irregulares omnique titulo tam variabiles ac incerti, vt ab omni lege mechanica ſolutas dixeris. Attamen, ex datis corporum maſſis, eorundemque diſtantiis a puncto ſuſpenſionis ac denique diductionibus primitiuis, ſitus ſingulorum corporum pro quouis momento temporis deſiderato praedici poteſt, ſecundum theoriam noſtram. Sed et plura puncta cardinalia, oculis facile diſcernibilia, ita determinari poſſunt, vt totam theoriam hanc exacte per experimenta confirment. At calculus, pro pluribus corporibus filo connexis ac ſuſpenſis, operoſus nec euitabilis requiritur; imprimis negotium

tium faceſſit taedioſa ſingularum radicum inueſtigatio in aequatione, quae cuiuslibet corporis elongationem ab axe, pro oſcillationibus ſimplicibus et perfecte ſynchronis in ſyſtemate formandis, indicat. Methodum docuiſſe generalem contentus, ſolum commentabor caſum ſimpliciſſimum pro duobus corporibus, ſcopo noſtro non male congruum.

§. 7. Sit pendulum bimembre $a\,c\,d$ (fig. 1 et 2); corpus ſuperius in $c$, inferius in $d$; putentur haec corpora a ſitu ſuo naturali diducta in $b$ et $e$; Data elongatione $b\,c$ quaeritur elongatio $e\,d$ hac lege, vt ambo corpora oſcillationes ſimplices et regulares, iſochronas ac ſynchronas faciant? Plurima iam paſſim pertractaui argumenta, quae ſingula hanc quaeſtionem, ceu ſimplex corollarium, in ſe continent; tota autem eius ſolutio in eo conſiſtit vt, ſecundum leges mechanicas, determinentur vires acceleratrices pro ambobus corporibus in $b$ et $e$ poſitis, eaeque viis ſimul perficiendis $b\,c$ et $e\,d$ proportionales fiant: his veſtigiis inſiſtendo ſequens oritur aequatio. Tab. II.

Sit longitudo fili $a\,c = l$; $c\,d = \lambda$; maſſa corporis in $c = m$; in $d = \mu$; elongatio $b\,c = \alpha$; $e\,d = f\,d + e\,f = \alpha + \beta$: his poſitis fit,

$$\beta\beta + \frac{(l-\lambda).(m+\mu)}{l\mu}\alpha\beta = \frac{\lambda(m+\mu)}{l\mu}\alpha\alpha \text{ hinc}$$

$$\beta = \frac{(m+\mu).(\lambda-l)\alpha \mp \alpha\sqrt{((m+\mu)^2.(\lambda-l)^2 + 4(m+\mu)\mu l\lambda)}}{2\mu l}.$$

Igitur aequatio duas habet radices, quia ſcilicet duo ſunt corpora, quae ambae radices ſemper ſunt reales; ſignum autem ſuperius, quantitati radicali prae-

 fixum,

fixum, valet pro configuratione prima; inferius pro ſecunda.

Poſtquam ſic determinata fuit ratio inter $\beta$ et $\alpha$, licet etiam determinare longitudinem penduli ſimplicis iſochroni cum vibrationibus ſimplicibus penduli bimembris pro vtraque claſſe. Si nempe praefata longitudo penduli ſimplicis iſochroni ponatur $= P$, reperitur

$$P = \frac{m l \lambda}{m \lambda + \mu \lambda - \frac{\beta}{\alpha} \times \mu l}$$

atque ſi pro $\frac{\beta}{\alpha}$ ſubſtituatur valor eius modo inuentus ſimulque, breuitatis gratia, ponatur $m + \mu = M$ et $\lambda - l = L$, prodit tandem

$$P = \lambda + \frac{2 \mu l \lambda}{ML \pm \sqrt{(MMLL + 4 \mu M l L + 4 \mu M l l)}}.$$

§. 8. Inſeruient praemiſſae formulae ad veram indolem totius argumenti noſtri detegendam: Etenim, quae dicta ſunt in praecedente paragrapho, vnice inſeruiunt ad quamuis vibrationum ſpeciem ſeorſim explicandam, accipiendo ſignum ſuperius pro configuratione prima et inferius pro ſecunda; quod ſi vero ambas vibrationum ſpecies ſimul exiſtere velimus, tunc amplitudines $b c$ in vtraque figura vtcunque diuerſas aſſumere licebit easque ita ſeligere, vt ab initio, diductiones abſolutae amborum corporum ab axe, quaeuis datam magnitudinem obtineat poſteaque ambo corpora ſecundum legem vtriusque configurationis ſimul oſcillent, ſic variatio ſitus abſoluta ſingulis momentis in vtroque corpore innoteſcet,

teſcet, ſi vtraque oſcillatio ſeorſim, vna poſt alteram conſideretur, deindeque loco axis recti *a c d* ſumatur figura paululum inflexa *a b e*, ſuper qua inflexio figurae ſecundae conſtruatur. Conſtructio haec figura tertia explicatur, in qua configuratio *a b e d c a* plane eadem eſt cum figura prima, iisdem litteris circumſcripta; poſt modum arculus $b' c'$ figurae ſecundae ad ſiniſtram poſitus, translatus eſt in ſitum $b' b$ figurae tertiae; ſic a combinata oſcillatione ſitus corporis ſuperioris in figura tertia, pro aſſumto temporis momento, erit in puncto $b'$: ſimiliter pro inferiori corpore arculus $d' e'$ figurae ſecundae ad dextram poſitus, translatus eſt in ſitum $e e'$ figurae tertiae, quia ſcilicet ab oſcillatione primae configurationis punctum *d* translatum fuit in *e*: Denique ſi in configuratione tertia coniungantur puncta *a* et $b'$ pariter ac puncta $b'$ et *e* rectis $a b'$ et $b' e'$ habebimus ſitum penduli bimembris, pro dato temporis puncto, in $a b' e'$.

Caeterum notari meretur, quod ſi in configuratione prima filum inferius *e b* producatur vsque in *o*, vbi axem interſecat, futurum ſit, vt longitudo *o d* fiat aequalis longitudini penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus ſimplicibus penduli compoſiti tardioris, prouti in configuratione ſecunda longitudo analoga $o' d'$ denotat longitudinem penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus ſimplicibus penduli compoſiti celerioris. Nec minus notatu dignum eſt, quod generaliter ambo pendula ſimplicia, vtrique oſcillationum ſpeciei reſpondentia, ſimul

 ſumta

ſumta ſemper ſint aequalia longitudini amborum filorum $l+\lambda$ ſiue $= a\,d$ vel $a\,d'$ pro duabus prioribus figuris; reperio enim, quod ſit $a\,o$ figurae primae aequalis $o'\,d'$ figurae ſecundae. Egregia haec proprietas deducitur ex valore vtroque penduli ſimplicis iſochroni in fine paragraphi praecedentis expoſito. Eſt nempe in figura prima

$$o\,d = \lambda + \frac{2\mu l \lambda}{ML + \sqrt{(MMLL + 4\mu MlL + 4\mu Mll)}},$$

ſimulque in fig. ſecunda

$$o'\,d' = \lambda + \frac{2\mu l \lambda}{ML - \sqrt{(MMLL + 4\mu MlL + 4\mu Mll)}}.$$

Inde deducitur quod ſit ſumma vtriusque valoris, nempe $o\,d + o'\,d' = l + \lambda$, ſi pro L reſtituatur valor eius aſſumtus $\lambda - l$. Video hic veſtigia naturae ſpecioſa ſimplicitate conſpicuae.

§. 9. Deſcendam ad exempla ſpecialiora: Sint ambo fila inter ſe aequalia ſiue $l = \lambda$, fiet in paragrapho ſeptimo pro figura prima et ſecunda

$$ef = \beta = \pm a \sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} \text{ atque } e\,d = \alpha + \beta = a \pm a \sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}}.$$

Si vero, quod licet, quaeuis configuratio ſeorſim ſumatur, poterunt amplitudines vel diductiones $b\,c$ atque $b'\,c'$ inaequales accipi; ponatur itaque $bc = \alpha$ et $b'\,c' = \alpha'$; tunc erit in figura prima

$$e\,d = \alpha + \alpha \sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} \text{ et in figura ſecunda}$$

$$e'\,d' = a' - a' \sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}}:$$

Ergo, vi conſtructionis §. 8. indicatae, fiet pro figura tertia diſtantia abſoluta $b'\,c = \alpha + \alpha'$ pro corpore

pore ſuperiore; verum pro inferiore corpore obtinetur diſtantia abſoluta

$$e' d = e d - e e' = a + a \sqrt{\tfrac{m+\mu}{\mu}} - e e';$$

eſt vero per conſtructionem, $e e'$ in figura tertia aequalis $d' e'$ in figura ſecunda ſiue $= a' - a' \sqrt{\tfrac{m+\mu}{\mu}}$ et quoniam in figura tertia arculus $e e'$ ad ſiniſtram axis $a d$, in figura autem ſecunda ad dextram ſumitur, facienda nunc erit

$$e e' = - a + a' \sqrt{\tfrac{m+\mu}{\mu}};\ \text{hinc}$$

$$e d = a + a \sqrt{\tfrac{m+\mu}{\mu}} + a' - a' \sqrt{\tfrac{m+\mu}{\mu}} = a + a' + a \sqrt{\tfrac{m+\mu}{\mu}} - a' \sqrt{\tfrac{m+\mu}{\mu}}$$

atque ſic tandem pro figura tertia inuenimus

$$b c' = a + a' \ \text{atque}\ e' d = a + a' + a \sqrt{\tfrac{m+\mu}{\mu}} - a' \sqrt{\tfrac{m+\mu}{\mu}}:$$

Igitur ex datis duabus oſcillationibus elementaribus determinare licet oſcillationem reſultantem compoſitam configuratione tertia repraeſentatam.

§. 10. Facile nunc erit reſpondere ad quaeſtionem vniuerſam, nempe vt pro motu reciproco abſoluto figurae tertiae determinentur ambae oſcillationes elementares, ex quibus componitur. Conſideretur itaque, in figura tertia $a\ b'\ c$ tanquam poſitio initialis penduli bimembris ponaturque diſtantia initialis $b' c = a$ et $e' d = b$ ac quaerantur quantitates $a$ et $a'$. Sic habebimus, vi paragraphi praecedentis,

$$a + a' = a \ \text{et}\ a + a' + a \sqrt{\tfrac{m+\mu}{\mu}} - a' \sqrt{\tfrac{m+\mu}{\mu}} = b.$$

Ope

Ope harum duarum aequatiuncularum elementarium inuenitur

$$a' = \frac{a\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} + b - a}{2\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}}}$$

$$a' = \frac{a\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} + a - b}{2\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}}}.$$

Cognitis in figura prima et ſecunda diductionibus primitiuis $b\,c$ et $b'\,c'$, a quibus vnitis reſultet data configuratio initialis tertia, inſeruiet paragraphus ſeptimus ad determinandas, in ambabus figuris primis, diductiones corporis inſerioris, vt iam monui in paragrapho praecedente; erit ſcilicet

$$od = a + a\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} + \tfrac{1}{2}b + \frac{b-a}{2\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}}}$$ ſimulque

$$o'd' = a' - a'\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} = -\tfrac{1}{2}a\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} + \tfrac{1}{2}b + \frac{a-b}{2\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}}}.$$

Valent hae formulae, quoties ambo fila ſunt inter ſe aequalia, quaecunque caeterum ſit ratio inter maſſas corporum ſuſpenſorum.

Tum etiam, pro ambobus definiendis pendulis ſimplicibus iſochronis cum ambabus oſclillationibus elementaribus, vtemur duabus formulis in fine paragraphi octaui expoſitis, faciendo $l = \lambda$ atque adeo $L = 0$ ſimulque, ſi lubeat, reſtituendo pro $M$ valorem eius $m + \mu$. Hoc modo oritur, pro figura prima, longitudo penduli ſimplicis iſochroni ſiue $od = l + l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}}$ atque pro figura ſecunda, $o'd' = l - l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}}$.

Iam

Iam igitur integra relatio inter oſcillationes elementares (quarum quaeuis eſt ſimplex, permanens, inuariabilis legibusque cognitis penduli ſimplicis ſubiecta) et motus reciprocos abſolutos ad normam figurae tertiae inde reſultantes, qui videri poterunt valde anomali et plerisque in caſibus nunquam in ſtatum primitiuum recurrunt.

§. 11. Si longitudo vtriusque fili $l$ quaeratur vt oſcillationes principales, ſecundum leges configurationis primae, quouis minuto ſecundo abſoluantur, faciendum erit $l + l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = 440$ lin. vnde habetur $l = \frac{440\sqrt{(m+\mu)}}{\sqrt{(m+\mu)}+\sqrt{\mu}}$ lin., fuerit, verbi gratia, $m = 16$ vnciis et $\mu = 9$ vnc. erit $l = 275$ lin. ſiue $l = 1$ ped. 10 poll. 11 lin. Simul autem oſcillationes celeriores, pro lege configurationis ſecundae, perficientur quouis ſemiminuto ſecundo eritque pendulum ſimplex iſochronum cum hiſce oſcillationibus elementaribus $= 110$ lin. In genere, ſi animus ſit pro data configuratione tertia primitiua determinare tempora oſcillationum elementarium pro configuratione prima et ſecunda, ex quibus motus reciproci abſoluti componantur, haec tempora vnice conficientur a maſſis amborum corporum et longitudinibus filorum nec elongationes initiales $b'c$ et $e'd$ in figura tertia quicquam conferent ad determinanda tempora oſcillationum ſimplicium in duabus primis figuris; at vero praefatae elongationes $b'c$ et $e'd$, figurae tertiae, determinant amplitudines $bc$ et $b'c'$ vna cum amplitudinibus $ed$ et $e'd'$ in figura pri-

ma ac ſecunda. Quamuis porro oſcillationes ambae generatrices in duabus figuris primis ſint plane ſimplices et permanentes et vnaquaeuis earum motum perficiant ſecundum easdem leges quibus pendulum ſimplex mouetur, attamen motus reciproci abſoluti in figura tertia plerumque, pro variis circumſtantiis, mirum in modum variantur, dum ambo corpora ab initio in $b'$ et $e'$ poſita omni titulo a motu corporis penduli ſimplicis recedunt atque excurſiones faciunt modo maiores modo minores easque temporibus inaequalibus perficiunt nec accelerationes aut retardationes admittunt, quae ſint diſtantiis corporum ab axe proportionales. His tamen non obſtantibus ſpinis, motus integer corporum pro configuratione tertia ope vtiliſſimi principii noſtri exacte determinari poteſt pro quocunque temporis momento: Requirit autem methodus noſtra, vt ex datis filorum longitudinibus, corporum ſuſpenſorum maſſis eorumque ab axe diductionibus initialibus determinentur omnes et ſingulae oſcillationes ſyſtematis propoſiti ſimplices ac permanentes, a quarum concurſu motus reciproci abſoluti ſemper deduci poterunt, qui datis circumſtantiis ſoli conueniant, cum ſit problema noſtrum plane determinatum quotcunque fuerint corpora; igitur quidni determinatum erit, ſi numerus corporum cenſeatur infinitus: Solutio autem problematis determinati aut fallax eſt aut problema, pro tota eius extenſione, complectitur. Si vero reſtrictionem ſuſpiceris in ſolutione mea de vibrationibus chordarum tenſarum, ab initio

tio certa lege incuruatarum, illa neceſſario conſiſtet in inſufficiente enumeratione vibrationum ſimplicium Taylorianarum, ex quibus vibrationes componantur abſolutae.

Ergo darentur vibrationes ſimplices Taylorianae in vna eademque chorda, quae ſimul incipiant ſimulque terminentur et quarum tempora non forent ſubmultipla temporis vnius vibrationis fundamentalis, quam nemo fouebit ſententiam. Non inſiſtam liti nec enim aliud intendi hiſce pagellis, quam vt viam praepararem, quae nos ad pleniorem principii noſtri applicatioem conduceret in problemate ſoluendo mechanico, ſimpliciſſimo quidem ſed nondum explorato, quantumuis plurimis proprietatibus geometrarum attentione digno. De hoc proxima agam occaſione.

# COMMENTATIO PHYSICO - MECHANICA SPECIALIOR DE MOTIBVS RECIPROCIS COMPOSITIS.

## MVLTIFARIIS NONDVM EXPLORATIS QVI IN PENDVLIS BIMEMBRIBVS FACILIVS OBSERVARI POSSINT IN CONFIRMATIONEM PRINCIPII SVI DE COEXISTENTIA VIBRATIONVM SIMPLICIORVM.

Auctore

*DANIELE BERNOVLLI.*

§. 1.

Praemiſſa huius argumenti noſtri explanatione vtar in hac altera parte ad motus reciprocos in pendulis bimembribus determinandos; facillimus vtique eſt caſus iſte ſpecialis nec tamen, quantum ſcio, adhuc examinatus ratione inaequalitatum et apparentium irregularitatum, quae in motibus reciprocis pendulorum compoſitorum latent veramque eorum indolem conſtituunt, niſi ſolicite ſegregatae fuerint oſcillationes ſolitariae ſimplices et regulares ab innumeris motibus reciprocis, quos pendula compoſita naturaliter perficiunt. Pendula autem quod ſeligam

bifila

biſila iisque ſolis inſiſtam etiamſi methodus noſtra ad quemuis filorum corporumque connexorum numerum applicari poſſit, moueor partim a calculorum breuitate partim vt argumentum tanto magis inclareſcat ſimulque experimenta in confirmationem foecundiſſimi principii noſtri inſtituenda tanto fiant faciliora magisque conſpicua: imo ſufficiet pro inſtituto noſtro conſideraſſe pendula aequimembria, ambobus ſcilicet ſumtis filis inter ſe aequalibus, vnde formulae in prima noſtra diſſertatione praeliminari expoſitae admodum contrahuntur. His omnibus factis reſtrictionibus duo ſuper erunt elementa a quorum variatione arbitraria variantur motus aeciproci abſoluti in propoſito pendulo; *primum* poſitum eſt in proportione maſſae corporis ſuperioris ad maſſam inferioris, a qua ſola proportione pendet ratio inter pendula ſimplicia cum duabus oſcillationibus regularibus, ex quibus motus reciproci abſoluti componuntur, iſochrona; *alterum* elementum pro lubitu variabile conſiſtit in diſtantiolis, ad quas ambo corpora diducta fuerunt in primo motus abſoluti momento, a quarum variatione plurimae iniiciuntur motiunculis abſolutis variationes. In prima Commentatione §. 10. poſui diductionem initialem pro corpore ſuperiori $= a$ et pro inferiori $= b$, vbi notandum eſt quod, ſi ab initio ambo corpora ad partes oppoſitas reſpectu axis verticalis poſita fuerint, poſſit diſtantiola $a$ pro corpore ſuperiori ſemper pro affirmatiua accipi mutato ſaltem ſigno diductioni corporis inferioris praefixo. De vtroque elemento

 ſeorſim

ſeorſim quaedam monebo retentis literis et figuris in prima Commentatione adhibitis atque explicatis.

§. 2. Initium faciam ab maſſis, vnde pendent longitudines pendulorum ſimplicium iſochronorum cum ambabus oſcillationibus regularibus ex quibus motus reciproci abſoluti componantur. Vidimus autem §. 9. praecedentis Commentationis has pendulorum ſimplicium longitudines eſſe, pro oſcillationibus tardioribus $= l + l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}}$ et pro oſcillationibus celerioribus $= l - l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}}$. Patet ex iſtis formulis eam ſemper proportionem maſſis $m$ et $\mu$ aſſignari poſſe vt praefatae longitudines quamcunque datam proportionem obtineant atque, ſi proportio haec ſumatur vt numerus quadratus maior ad numerum quadratum minorem, fore vt tempora oſcillationum ſimplicium ſint vt numerus integer ad numerum integrum, ſecus fore haec tempora incommenſurabilia: fuerit tempus vnius oſcillationis ſimplicis tardioris pro configuratione prima $= T$ ac tempus vnius oſcillationis celerioris ad modum figurae ſecundae $= t$, ponaturque $T = n\,t$; dico aliter atque aliter, pro diuerſitate numeri $n$, ſe habituros motus reciprocos abſolutos ad modum figurae tertiae. Diuerſos euentus percurram prouti fuerit $n$ vel numerus integer vel fractus vel irrationalis.

§. 3. Ponatur pro $n$ numerus integer, fiet vt ambo corpora, poſt ſingula temporis interualla $T$, ſimul extremitatem oſcillationis attingant et in ſtatum quietis momentaneae perueniant ſimulque nouam

vam inchoarent oſcillationem ſimplicem. Nec tamen exinde ſequitur fore vt ambo corpora, motu abſoluto verſus axem regrediantur; fieri enim poteſt, vt incipientes nouae oſcillationes ſimplices, hoc temporis momento, in diuerſas partes eant atque corpus alterutrum motu abſoluto etiamnum paululum recedat ab axe, ſiue inferius ſit corpus ſiue ſuperius; interea tamen ſtatus iſte quietis momentaneae, qui in vtroque corpore, pro ambabus oſcillationibus ſimplibus ſimul continget, oculorum intentorum aciem non effugiet, quandoquidem et ipſe motus abſolutus hoc temporis momento ceſſabit; Probe hic obſeruandum eſt inſigne diſcrimen in motibus reciprocis abſolutis contingere, prouti numerus integer *n* fuerit vel par vel impar; in priori enim caſu perfecte ſingulae recurrent circumſtantiae poſt quaeuis demum bina interualla 2 T, in poſteriori poſt ſingula ſimplicia interualla T; atque haec obſeruatio pariter formanda eſt de duobus punctis qualibuscunque in chorda vniformi vibrante pro ratione vibrationum ſimplicium, quae motus reciprocos chordae abſolutos conſtituunt; etenim in his motibus reciprocis pariter fieri poteſt, vt a ſtatu perfectae quietis momentaneae totius chordae, alia puncta extrorſum alia introrſum moueantur; ſingula chordae puncta equidem, poſt ſingulas vibrationes fundamentales, periodicos ſtatus quietis momentaneae ſimul obtinent, at minime ſimul, in omni caſu, excurſiones ſuas abſoluunt motu ſuo abſoluto nec in vllo puncto motiunculae reciprocae abſolutae leges obſeruant motuum

ſim-

ſimplicium iſochronorum, qui proprie vibrationes aut oſcillationes dicuntur. Quod ſi vero numerus integer $n$ fuerit impar, fiet vt poſt ſingula temporis interualla T, ambo corpora ſimul pro momento quieſcant, configurationemque initialem reſumant ſimulque etiam axem verticalem tranſeant, quamuis a momento communis quietis ad diuerſas ire poſſint partes, alterum ſcilicet accedere ad axem alterum recedere; motus denique reciproci abſoluti minime fient ſecundum notiſſimas iſochroniſmi leges, dum durante vna eademque oſcillatione fundamentali corpora nunc progreſſiua, nunc retrograda nunc ſtationaria eſſe poſſint atque idem in ſingulis chordae irregulariter vibrantis punctis contingere poteſt.

Quod ſi pro $n$ accipiatur numerus non integer, veluti $\frac{13}{6}$ aut $\frac{15}{7}$, periodi in motibus reciprocis abſolutis non niſi poſt plures oſcillationes fundamentales recurrent, veluti poſt ſex aut ſeptem huiusmodi oſcillationes atque in his caſibus, vt de motibus reciprocis inde reſultantibus recte iudicare posſimus rurſus diſpiciendum erit an denominator in his fractionibus ad minimos terminos reductis, ſit numerus par vel impar: Sed in poſteriori caſu attendendum erit ad numeratorem an ſit numerus par vel impar; etenim aliter ſe res habebit pro numero $\frac{15}{7}$ aliter pro $\frac{16}{7}$ haec manifeſta fient, ſi non ſolum ad periodos pro quietis momentaneae concurſu ſed et pro configuratione ſyſtematis, his momentis reſpondente, animum attendamus;

Deni-

Denique ſi fuerit $n$ numerus irrationalis, nulla vnquam fiet reſtitutio perfecta neque ratione concurſus in quiete momentanea neque ratione configurationis in ſyſtemate, etiamſi ambas oſcillationes ſimplices liberrime fieri et continuari ſupponas ſine fine; attamen pro quouis momento dato in vtroque corpore et ſitus et velocitas determinari poterunt ad mentem theoriae noſtrae, vti infra videbimus.

§ 4. Deſcendamus ad exempla particularia, retinendo hypotheſin aequalitatis inter ambo fila, vtrumque aequale $l$.

(*a*) Ponatur corpus ſuperius $m = 16$ et inferius $\mu = 9$; fiet $\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \frac{3}{5}$; hinc longitudo penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus ſimplicibus tardioribus $= l + l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \frac{8}{5}\,l$ ac pro oſcillationibus celerioribus $= l - l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \frac{2}{5}\,l$; hinc prius alterius quadruplum eſt; vnde $T = 2\,t$ et $n = 2$.

(*b*) Inuertantur corpora atque nunc ſupponatur $m = 9$ et $\mu = 16$; habebitur $\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \frac{4}{5}$; hinc longitudo penduli iſochroni tardioris $= \frac{9}{5}\,l$ et celerioris $= \frac{1}{5}\,l$; vnde $T = 3\,t$ et $n = 3$.

(*c*) Manente maſſa corporis ſuperioris, apparet pendulum ſimplex iſochronum cum oſcillationibus ſimplicibus primi generis tanto maius fore quanto maior ſumitur maſſa corporis inferioris et tanto minus pro oſcillationibus ſimplicibus ſecundi generis atque ſic duplici titulo fore vt numerus $n$ increſcat. Si maſſa corporis inferioris $\mu$ fuerit admodum magna,

 erit

erit propemodum pendulum pro prioribus oſcillationibus $= 2\,l$ et pro oſcillationibus ſecundi generis admodum paruum numerusque $n$ proueniet permagnus. Si e contrario maſſa $\mu$ ſtatuatur perexigua, fient ambo pendula ſimplicia iſochrona proxime inter ſe aequalia et numerus $n$ parum vnitate maior. Attamen pendulum ſimplex iſochronum cum oſcillationibus ſimplicibus primi generis ſemper excedet pendulum alterum, quod conuenit oſcillationibus ſecundi generis et numerus $n$ ſemper vnitatem paululum excedet. Sequitur exinde, ambo puncta interſectionis $o$ et $o'$ in duabus primis figuris fore proxime ad puncta media $c$ et $c'$ poſita, primum paullo ſuperius alterum paullo inferius, nec id fieri poteſt quin, pro oſcillationibus ſimplicibus vtriusque generis, corpus inferius arcus deſcribat longe maiores quam corpus ſuperius, quod adeoque tantum non quieſcere debet, ne nimium recedamus, reſpectu ad corpus inferius, ab hypotheſi qua ſingulae oſcillationes admodum exiguae ſupponuntur.

§. 5. Poſtquam, pro dato pendulo compoſito, longitudines pendulorum ſimplicium requiſitas determinauimus; ſupereſt, vt ab datis diductionibus initialibus $b' c$ et $e' d$ in figura tertia, (quas in prima noſtra commentatione literis $a$ et $b$ denotauimus) inquiramus in ſemi amplitudines $b c$ et $b' c'$ pro ambabus figuris primis, quas vocauimus $a$ et $a'$; Indicaui hos valores paragrapho decimo primae commentationis: tranſcribam valores paulo magis concinnatos nempe

$a =$

$\alpha = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(b-a)\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}}$ atque $\alpha = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}(b-a)\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}}$.
Cognitis valoribus $\alpha$ et $\alpha'$ arculorum $bc$ et $b'c'$, innoteſcent etiam arculi inferiores $ed$ et $e'd'$ per paragraphos 7 et 9; erit nempe, pro caſu amborum filorum inter ſe aequalium,

$$ed = \alpha + \alpha\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} \text{ et } e'd' = \alpha' - \alpha'\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}}.$$

Atque hoc modo determinauimus, pro data configuratione initiali motuum reciprocorum abſolutorum, ambas figuras ſimplices generatrices. Inde talia conſequuntur corollaria.

($a$) Si, pro configuratione tertia, fiat $a = (b-a)\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}}$, proueniet $\alpha' = 0$; $\alpha = a$; atque ſic figura tertia plane eadem erit cum figura prima, ad cuius ſimplicem normam fient motus reciproci abſoluti, euaneſcentibus oſcillationibus ſimplicibus ſecundi ordinis figura ſecunda expreſſis.

($b$) Sin altera quantitas $\alpha$ ponatur $= 0$, tunc fiet $\alpha' = a$; euaneſcent oſcillationes ſimplices primi ordinis, ac ſolae retinebuntur oſcillationes ſecundi ordinis et configuratio tertia plane eadem erit cum ſecunda.

($c$) Indicant etiam formulae noſtrae, quod, ſi diſtantia initialis $b$ in figura tertia ſumatur maior quam $a(1 + \sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}})$, fiat, in figura ſecunda, $b'c'$ negatiua ita vt ſi in figura prima poſita ſit $bc$ ad ſiniſtram, altera $b'c'$ ponenda ſit ad dextram.

($d$) Si pro figura tertia ponatur diductio initialis $b'c = e'd$ ſiue $a = b$ ita vt filum inferius ab initio

motus abſoluti ſit verticaliter poſitum, fiet $\alpha = \alpha' = \frac{1}{2} a$, quaecunque fuerit proportio inter maſſas $m$ et $\mu$, atque tunc erit

$$e\,d\ (\text{fig. 1.}) = \tfrac{1}{2} a + \tfrac{1}{2} a \sqrt{\tfrac{m+\mu}{\mu}}$$

ſimulque ad partes contrarias

$$e'\,d'\ (\text{fig. 2.}) = \tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{2} a \sqrt{\tfrac{m+\mu}{\mu}}.$$

§. 6. Vtar praeſertim poſtremo hoc corollario, partim ob ſimplicitatem calculorum, partim vt in experimentis inſtituendis certi ſimus de exacta ſimultaneitate, qua ambo corpora motum ſuum incipere debent; quod ſi enim ſolum corpus ſuperius, extremis digitis ad latus diducatur, filum inferius ſua ſponte ad ſitum verticalem ſe componet ipſoque momento dimiſſionis neceſſe eſt, vt ambo corpora exacte ſimul moueri incipiant. Progredior ad pauca exempla ſimpliciſſima, inſtituto noſtro accommoda omnique titulo determinata. *Exemplum primum.* Sit longitudo $l = \lambda = 275$ lin. Pariſ. maſſa corporis ſuperioris $= 16$ ſemiunciis, maſſa corporis inferioris $= 9$ ſemiunciis; quoniam vero hae maſſae in vno puncto concentratae ponuntur, erunt longitudines filorum a centris corporum dimetiendae; tum putetur corpus ſuperius in figura tertia ad diſtantiam 4 poll. ſiue 48 lin. diductum in punctum $b'$, ita vt ſit diſtantia $a = b'c = 48$ lin. cui quoque diſtantia initialis inferioris corporis $b = e'd$ aequalis in hoc exemplo ponitur.

His

His poſitis fit quantitas $\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} = \frac{5}{3}$. Erit quoque pro figura prima

$b\,c = a = \frac{1}{2}\,a = 24$ lin. (§. 5.) ſimulqu

$e\,d = a + a\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} = \frac{8}{3}\,a = 64$ lin. (§. 5.).

Pro figura autem ſecunda habebitur

$b'\,c' = a' = \frac{1}{2}\,a = 24$ lin.

vt ante, verum diſtantia inferior

$e'\,d' = a' - a'\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} = -\frac{2}{3}\,a = -16$ lin.

vbi ſignum negatiuum indicat, hanc diſtantiam ad alteram partem axis $a\,d'$ eſſe accipiendam. Denique pendulum ſimplex iſochronum cum oſcillationibus regularibus figurae primae reſpondentibus fit $= \frac{8}{5}\,l$ $= 440$ lin. (§. 4.) ac pro figura ſecunda ſimile pendulum iſochronum longitudinem obtinet 110 lin. Igitur oſcillationes ſimplices regulares tardiores formabuntur ad quaeuis minuta ſecunda, celeriores ad quaeuis ſemi-minuta ſecunda. Sic itaque omnia determinauimus, quae ad ambas oſcillationes ſimplices et regulares, ad ductum duarum primarum figurarum, pertinent, ex quarum combinatione integer motus abſolutus, pro figura tertia, deduci poterit ſecundum praecepta, paragrapho octauo primae commentationis, exhibita: Etenim motus in pendulo ſimplici facile determinantur: rem proſequar, pro praeſenti exemplo, poſt quaeuis ſemi-minuta ſecunda. Ab initio corporis ſuperioris diſtantia ab axe ad ſiniſtram eſt $= 2\,a = 48$ lin. poſt ſemi-minutum ſecundum corpus iſtud ſuperius perficiet, pro

figura prima verſus dextram ſemioſcillationem $= a$ $=$ 24 lin. et pro figura ſecunda oſcillationem integram $= 2a = 48$ lin. pariter verſus dextram; atque adeo pro figura tertia ſpatium deſcribet 72 lin. ſic itaque tunc poſitum erit ad dextram axis a quo diſtabit 24 lin. hoc ipſo momento ſtationarius erit motus oſcillatorius figurae ſecundae atque retrogradi incipiet, dum ratione alterius motus oſcillatorii figurae primae maxima ſua velocitate verſus dextram gaudebit: igitur corpus finito primo ſemi-minuto ſecundo etiamnum verſus dextram moueri perget motu compoſito ex duobus motibus ſimplicibus obviam euntibus, quorum alter retardatur alter acceleratur; ſic vnus alterum mox deſtruet; interea autem, quod me calculus deinceps indicandus docuit, corpus illud etiamnum ſpatiolum 3 lin. verſus dextram motu ſuo abſoluto perficiet, tuncque diſtabit ab axe 27 lineis eoque ipſo momento velocitas abſoluta nulla eſt et corpus incipiet retrogredi, abſit itaque vt motus abſolutos corporis pro oſcillationibus regularibus habeamus; malim eos nomine generaliori *motuum reciprocorum* deſignare, qui non poſſunt aliter, vt videtur, quam ad mentem theoriae noſtrae deſcribi. Porro tempus, quo corpus ſuperius, motu ſuo abſoluto, vltimum ſpatiolum trium linearum deſcribit, eſt aequale dimidio minuto ſecundo multiplicato per rationem arcus $14^\circ. 28'. 40''$ ad $90^\circ$ vel paulo minus quam $\frac{1}{12}$ minuti ſecundi atque adeo tempus elapſum integrum $= \frac{7}{12}$ minuti ſecundi etc. quo ipſo temporis puncto incipit corpus

pus

pus retrogredi verſus ſiniſtram tuncque motum ſervat ad finem vsque alterius ſemi-minuti ſecundi, quo momento poſitum erit in ipſo axe verticali; quoniam enim integrum minutum ſecundum elapſum eſt, posquam motus incepit, corpus integram oſcillationem $2a$ ſiue 48 lin. verſus dextram interea reſpectu primae figurae perficit dum reſpectu alterius figurae duas abſoluit oſcillationes atque ſic in locum vnde venerat rediit: hoc temporis puncto motus corporis erit iterum veluti ſtationarius, quia ſimul pro vtraque oſcillatione ſimplici limen attigit; mox igitur corpus de nouo motum abſolutum incipiet verſus dextram atque inuerſo ordine motuque priori contrario tandem poſt duo minuta ſecunda in locum primitiuum redibit, id eſt poſt $\frac{5}{12}$ minuti ſecundi iterum maximam ſuam habebit elongationem ab axe, 27 linearum indeque tempore $\frac{1}{12}$ minuti ſecundi redibit in locum, qui ab axe 24 lin. diſtat ad dextram, vnde finito quarto ſemi-minuto ſecundo in punctum primitiuum redibit motusque ſuos reciprocos porro continuabit eadem lege.

§. 7. Atque ſic totum definiuimus motum in corpore ſuperiori; figura quarta vno intuitu rem explicabit. Sit $mn = 48$ lin. $np = 24$ lin. $pq = 2$ lin. Denotet $n$ locum corporis pro filo verticali; $m$ ſitum corporis initialem; ſitque tempus vnius ſemiminuti ſecundi $= t$, dico tempore $t$ corpus peruenturum in punctum $p$; ſequente tempore $t$ deſcripturum ſpatiolum $pq + qn$; in puncto $n$ fore ad momentum ſtationarium indeque tertio tempore $t$ inverſo

verſo motu percurſurum ſpatium $pq + qp$ ac denique quarto tempore $t$ deſcripturum ſpatium $pm$; tempuſculum autem quo percurritur ſpatiolum $pq$ erit proxime $= \frac{1}{6} t$ ſiue $\frac{1}{12}$ minuti ſecundi. Haec cum ita ſint, non video quid pro motu abſoluto intelligi debeat per vnicam oſcillationem; ſi enim per primam oſcillationem integram intelligere velis ſpatium deſcriptum $mp$ erit pro ſecunda oſcillatione integra ſumendum ſpatium $pq + qm$; ſic quidem tempora forent aequalia, ſpatia deſcripta inaequalia; ſi vero aſſumas motus integros et inuerſos, ſcilicet $mq$ et $qm$, tunc ſpatia erunt aequalia at tempore inaequalia. Mihi itaque non vt oſcillationes ſed vt motus reciproci ſunt, qui aliquando ſuas formant periodos recurrentes, aliquando non formant aut tardiſſime formant. Idemque dixerim de punctis in chordis vibrantibus ſiue aequaliter ſiue inaequaliter craſſis.

Verum, quod nunc potiſſimum volo, in hoc conſiſtit, vt theoria noſtra ad *experimenta* reuocetur, quibus accurate confirmetur; facillimum autem erit
Tab. II. obſeruare punctum extremum $q$ (fig. 4.) poſteaque arcum aſcenſus $nq$ comparare cum arcu deſcenſus $mn$; indicat theoria hos arcus rationem inter ſe habituros vt 27 ad 48 ſiue vt 9 ad 16 ipſumque corpus ſuperius viam integram $mq$ deſcripturum tempore $\frac{7}{12}$ vnius minuti ſecundi: tum porro docet theoria, corpus retrogreſſurum verſus ſiniſtram atque elapſis $\frac{5}{12}$ minuti ſecundi peruenturum in ipſum punctum $n$, vbi nouus fieri debeat regreſſus verſus dextram;

dextram; punctum autem ſecundi regreſſus iterum accurate obſeruari poterit et examinari an fiat in ipſo puncto $n$: poſtmodum corpus ſecunda vice peruenire debet ad punctum $q$ ibique tertius fieri regreſſus; interuallum autem temporis inter ſecundum et tertium regreſſum iterum proxime erit $\frac{5}{16}$ minuti ſec. Denique poſt vltimum interuallum temporis $\frac{5}{16}$ min. ſec. corpus ſpatium integrum $q\,m$ per ſecerit oportet imminente quarto et vltimo periodi primae regreſſu. Quo accuratius inſtitutum fuerit iſtud experimentorum genus, tanto magis, vt nullus dubito, euentus conueniet cum theoria.

§. 8. Proſequamur nunc etiam motus reciprocos pro eodem exemplo in corpore inferiori: Diſtantia inferioris corporis ab axe ad ſiniſtram ab initio iterum eſt $= 2\,a = 48$ lin. poſt ſemi-minutum ſecundum deſcripſerit hoc corpus verſus dextram ſpatium $e\,d$ (fig. 1.) $= \frac{8}{3}a = 64$ lin. (§. 6.) pro lege oſcillationum ſimplicium tardiorum ſimulque pro lege altera verſus ſiniſtram ſpatium $2\,e'\,a'$ (fig. 2.) $= \frac{4}{3}a = 32$ lin. ergo vtroque motu compoſito ſpatium percurretur verſus dextram intra ſemi-minutum ſecundum, quod erit $= 32$ lin. Caeterum ab initio vel etiam quoties corpus inferius in ſitum primitiuum redit, quietem momentaneam obtinet intenſiorem, quam in pendulis ſimplicibus, quia non ſolum pro vtroque oſcillationum ſimplicium genere velocitates euaneſcunt ſed et ambae velocitates naſcentes ſunt contrariae et aequales. Sequente ſemi-minuto ſecundo corpus, pro lege oſcillationum ſimplicium tar-

 dio-

diorum, iterum deſcribet verſus dextram 64 lin. et pro lege altera 32 lin. pariter verſus dextram; ergo ſpatium deſcriptum a motu compoſito = 96 lin. elapſis ambobus ſemi - minutis ſecundis corpus inferius ſtationarium eſt, retrogredi incipit ac tertio ſemi - minuto ſecundo iterum percurrit verſus ſiniſtram 96 lin. pariterque quarto ſemi - minuto ſecundo 32 lin. atque ſic ad ſitum primitiuum redit. Igitur excurſiones integrae erunt 128 lin. alternatim ad dextram atque ſiniſtram, nec hic vllum erit punctum regreſſus intermedium, motus abſolutus tamen valde differt a motu penduli ſimplicis; maximus receſſus ab axe ad ſiniſtram eſt 48 lin. ad dextram vero 80 lin. Vnicum allegabo *experimentum*, ſed apodicticum, quod in eo conſiſtit vt videatur num reuera maxima elongatio corporis ab axe ſit 80 lin. Inde iterum confirmabitur theoria.

Comparentur nunc motus abſoluti pro vtroque corpore in praeſenti exemplo: In vtroque perfecta erit periodus recurrens poſt duo minuta ſecunda, corpus autem ſuperius quatuor manifeſtos faciet itus reditusque, intermedios multo minores duobus extremis, corpus inferius duos ſaltem faciet motus reciprocos et inuerſo ordine perfecte inter ſe aequales. Porro corpus ſuperius maiores formabit ab axe diſceſſus ad ſiniſtram quam ad dextram; contrarium accidit in corpore inferiori: Denique poſt duo ſemi-minuta ſecunda corpus ſuperius erit in ipſo axe poſitum, inferius autem eo ipſo momento ab axe erit remotiſſimum, idemque continget poſt ſex, decem etc. ſemi-minuta ſecund.

§. 9.

§. 9. *Exemplum ſecundum.* Inuertamus nunc corpora ita vt ſuperius ſit $= 9$ ſemiunciis ac inferius $= 16$ ſemiunciis, caetera vero omnia eadem permaneant; quae in priori exemplo; ſola pendula ſimplicia iſochrona cum oſcillationibus regularibus, ad normam duarum figurarum primarum orituris, mutantur; fiet nempe longitudo iſtius penduli pro figura prima

$$= l + l\sqrt{\tfrac{\mu}{m+\mu}} = \tfrac{9}{5}\,l$$

et pro figura ſecunda

$$= l - l\sqrt{\tfrac{\mu}{m+\mu}} = \tfrac{1}{5}\,l \text{ (§. 4. not. (b))}$$

atque hoc modo tempore vnius oſcillationis regularis tardioris tres perficientur oſcillationes regulares celeriores. Sic facile eſt praeuidere fore vt in motibus reciprocis compoſitis omnia poſt quamuis oſcillationem ſimplicem tardiorem perfecte reſtituantur; nec tamen propterea meo ſaltem iudicio, motus ille pro vna oſcillatione erit habendus, quandoquidem quiuis motus compoſitus, qui ab vna extremitate ad alteram perficitur, manifeſte ex tribus motibus reciprocis conſtat, vti mox videbimus. Commodiſſime tempus vnius oſcillationis regularis tardioris diuidemus in tres partes aequales ſimulque in anteceſſum obſeruabimus, vti in mechanica demonſtratur, quod ſi integra penduli excurſio ſit $= 2\,\alpha$, primo triente deſcribatur ſpatium $\frac{1}{2}\alpha$, ſecundo ſpatium $\alpha$, tertioque iterum ſpatium $\frac{1}{2}\alpha$, ſimulque quouis triente temporis integra abſoluatur oſcillatio celerior, cuius excurſio $= 2\,\alpha'$ vel $= 2\,\alpha$, quandoquidem hic ite-

rum fit $a' = \alpha$. Videamus nunc motum compoſitum pro corpore ſuperiori ad normam figurae tertiae, in qua $b' b = b c = \alpha = 24$ lin.

Excurſio integra corporis ſuperioris pro motu compoſito fit $= 4 \alpha = 96$ lin. primo triente temporis deſcribetur ſpatium abſolutum $2\frac{1}{2} = \alpha = 60$ lin. (nempe ſpatium $\frac{1}{2} \alpha$ ab oſcillatione regulari tardiori et ſpatium $2 \alpha$ a celeriori, vtrumque verſus dextram) ſecundo triente inde deſcribet ſpatium $\alpha - 2 \alpha = - \alpha$, id eſt, regredietur per ſpatium 24 lin. tertio autem triente iterum deſcribit motu progreſſiuo ſpatium $2\frac{1}{2} \alpha$ finito ſcilicet primo triente corpus ſuperius diſtabit a ſitu initiali 60 lin. tertio triente 96 lin. Hos ſitus diuerſos indicat figura 5, vbi iterum $m n = 48$ lin. $n r$ pariter $= 48$ lin. deinde $n p = n s = 12$ lin. atque ſic erit corpus poſt primum temporis interuallum in $p$; poſt ſecundum in $s$ ac poſt tertium in $r$.

Verum notetur, corpus ſuperius, cum perueniet poſt primum temporis trientem in ſitum $p$, gaudere etiamnum aliqua velocitate verſus dextram atque ſic peruenire poſſe ad punctum $q$, parum quidem diſtans, antequam velocitas abſoluta tota euaneſcat; In hoc puncto $q$ poſitum eſt punctum regreſſus, quod ſolum in *experimento* recte obſeruari poteſt: a vero puncto $q$ regreditur corpus vsque in $t$ (facta $s t = p q$) indeque ſecundus fit regreſſus verſus dextram: ſic proprie ſecundo temporis triente corpus viam deſcribit $p q t s$, quae eſt aequalis 24 lin. $+ 2 p q$; inuenio autem paruulam diſtantiam

$p q =$

$pq = 24$ lin. $\times (-\cos. 65^\circ.54' + \cos. 60^\circ) = 24$ lin. $\times 0.09167 = 2\frac{1}{5}$ lin.

Igitur ſi ſumatur $nq = nt = 14\frac{1}{5}$ lin. regreſſus fiet in punctis $q$ et $t$, haecque ſi cum experimento accurate inſtituendo conueniant, iterum theoriam noſtram confirmabunt. Ambobus autem regreſſus punctis $q$ et $t$ ipſa quoque puncta extrema $r$ et $m$ annumeranda ſunt.

§. 10. Faciamus nunc quoque calculum pro inferiori corpore ad modum, quem iniuimus pro primo exemplo in paragrapho octauo Hic rurſus requiritur ante omnia, vt in figura prima ex data $bc = \alpha$ determinetur

$$ed = \alpha + \alpha \sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} = \frac{9}{4}\alpha = 54 \text{ lin.}$$

ſimulque in figura ſecunda

$$e'd' = \alpha - \alpha \sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} = -\frac{1}{4}\alpha = 6 \text{ lin.};$$

igitur excurſio integra $2ed = 108$ lin. atque $2e'd' = -12$. Si iterum tempus oſcillationis ſimplicis tardioris diuidatur in tres partes aequales, deſcribet corpus inferius pro oſcillatione tardiore, durante primo triente, 27 lin. durante ſecundo triente 54 lin. et durante tertio triente 27 lin. ac, pro oſcillatione celeriori, perficiet iisdem temporis interuallis ſucceſſiue 12 lin. verſus ſiniſtram, tum rurſus 12 lin. verſus dextram ac denique 12 lin. verſus ſiniſtram; hinc vtroque motu coniuncto primo triente percurret corpus verſus dextram ſpatium 27 lin. $-$ 12 lin. vel 15 lin. ſecundo triente pariter verſus dextram ſpatium 54 lin. $+$ 12 lin. ſiue 66 lin. ac tertio trien-

te itidem verſus dextram 27 lin. — 12 lin. vel 15 lin. atque tunc motu contrario ſingula recurrent, nec vlla in corpore inferiori erunt puncta regreſſus, niſi in punctis extremis. Filum inferius vtroque ſitu extremo erit verticaliter poſitum pariter atque in medio excurſionis; ſic quidem corpus ipſum, motibus ſuis reciprocis, vtrinque aequalibus, in medio velociſſimis oſcillationes mentitur ſimplices perinde ac ſi in pendulo fierent ſimplici; attamen velocitates in omnibus locis intermediis longe aliter ſe habent nec enim in noſtro argumento vires acceleratrices pro motu abſoluto ſunt diſtantiis ab axe proportionales; ſunt tamen, in hoc exemplo, motus integri reciproci iſochroni, ſiue maiores ſiue minores excurſiones efficiantur. Vnica quidem lex eſt iſochroniſmi in vno corpore; at in pluribus corporibus in ſe inuicem agentibus haec lex infinitis modis variari poteſt, quia non licet variare diſtantiam initialem ab axe pro vno corpore, quin ſimul varietur in reliquis corporibus.

§. 11. Videmus in hoc altero exemplo omnia perinde aequaliter ſe habere ab vtraque axis parte, ſecus, ac in primo exemplo, in quo elongationes ſuperioris corporis ad ſiniſtram indicatae per $mn$ (fig. 4.) notabiliter excedunt elongationes ad dextram expreſſas per $nq$; eſt enim $mn : nq = 48 : 27 = 16 : 9$, vti demonſtrauimus §. 7. dum e contrario in inferiori corpore elongationes ad ſiniſtram ſunt multo minores elongationibus ad dextram in ratione 48 ad 80 ſiue 3 ad 5: perinde autem poſt quasuis bi-

nas

nas oſcillationes fundamentales in primo exemplo recurrunt, in ſecundo poſt quasuis ſingulas huiusmodi oſcillationes: atque idem contingit quoties numerus oſcillationum ſimplicium tardiorum ſubmultiplus eſt numeri celeriorum eodem tempore abſolutarum oſcillationum; verum quando ratio inter hos ambos numeros minus ſimplex eſt, plures atque plures requiruntur oſcillationes, vt perfecta fiat rerum omnium reſtitutio. Liceat vnicum ſuperaddere caſum, quo ambo pendula ſimplicia, cum oſcillationibus vtriusque generis iſochrona, vel potius tempora horum pendulorum parum a ratione multipla recedunt.

*Exemplum tertium.* Ponatur ea, inter maſſas *m* et $\mu$, ratio vt duodecim oſcillationes tardiores, ad normam figurae primae, perficiantur eodem tempore, quo viginti quinque abſoluuntur oſcillationes celeriores ſecundum leges figurae ſecundae. Sic quidem ab initio motus reciproci abſoluti parum ab exemplo noſtro primo §. 6. abludent. Durante prima oſcillatione tardiore corpus ſuperius iterum perveniet proxime vsque ad punctum *q* figurae quartae, veruntamen id paullulum praeteribit, poſt ſecundam oſcillationem ſimilem, proxime perueniet in punctum primitiuum *m*, nec tamen id prorſus attinget; excurſiones laterales ad ſiniſtram, qualis eſt *m n*, ſenſim decreſcent atque excurſiones ad dextram, qualis eſt *n q*, increſcent, vsque dum maximae fiant a latere dextro, minimae a latere ſiniſtro, in ratione 16 ad 9, quae ab initio fuerat vt 9 ad

16;

16; haec maxima variatio periodice continget poſt quasuis duodenas oſcillationes tardiores, diuque iſta reciprocatio ſubſiſtit, ſi modo motus reciproci libere fiant atque accurata inſtituantur experimenta. Quod dein pertinet ad motum corporis inferioris, dico ſimiles reciprocationes inter maximas et minimas elongationes, ab vtroque latere, orituras ſed ordine inverſo. Vidimus nimirum, § 8, quod ſi tempora pro vtroque oſcillationum ſimplicium genere fuerint praeciſe in ratione dupla, maximum receſſum ab axe fore ad ſiniſtram 48 lin. et ad dextram 10 lin. hancque legem per totum experimenti decurſum eſſe ſubſtituram. Nunc vero in praeſenti exemplo, ab initio increſcent diſceſſus ab axe ad ſiniſtram, decreſcent ad dextram; aequales fient poſt ſex oſcillationes tardiores et poſt totidem oſcillationes ſequentes maximae erunt ad latus ſiniſtrum minimae ad dextrum; finita hac prima periodo, recurrent mutato latere, eaedem motuum reciprocorum leges poſt ſingulas duodenas oſcillationes ſimplices tardiores atque variationes. Haec omnia ſi experimentis, ſed accurate inſtituendis, reſpondeant, non ſolum theoriam confirmabunt, ſed et haud parum momenti illi ſuperaddent.

§. 12. Vereor equidem, ne perpetuae rerum omnium variationes veris motuum reciprocorum legibus nimiam iniiciant moram, quam vt hi motus poſt magnum eorum numerum integri ſeruentur ab impedimentis phyſicis; nullus tamen dubito quin experimenta veſtigia veritatis ſint manifeſtatura, quae intelli-

intelligentibus ſufficiant. Ego quidem memini, me forte fortuna ſimiles motuum reciprocationes in duobus corporibus, ſed aliter connexis, olim obſeruaſſe tantoque magis fuiſſe miratum, quod tunc temporis vſum principii de coëxiſtentia vibrationum ſimplicium regularium, nondum cogitaſſem. Obſeruatio, de qua loquor, haec eſt.

Cum aliquando in libra, maiori eaque ſubpigra, alteram lancem forte fortuna ad latus diducerem moxque rurſus dimitterem, accidit vtique vt protinus hinc inde oſcillaret nec ab initio lanx oppoſita de loco moueretur: mox autem et haec quoque agitari ſenſimque maiores oſcillationes formare, dum e contrario lanx prior motum ſuum oſcillatorium gradatim perderet tandemque fere quieſceret; hoc ipſo momento altera maximum motionis gradum, initiali lancis ſociae fere aequalem, attingebat: tunc ordine contrario eaedem mutationes repetebantur, vsque dum prima lanx motum ſuum primitiuum integrum reſumeret ſociaque quieti ad momentum redderetur; haec autem oſcillationum communicatio ac reciprocatio diu ſatis ſeſe manifeſtabat.

§. 13. Ex paucis allatis liquet, quam fertile ſit argumentum noſtrum, cum vel minimus ſurculus innumeros offerat fructus, inter quos paucos decerpſi lectu facillimos. Si plura quam duo corpora ſuſpenſa conſiderare lubeat, res quidem in abſtracto foret aeque facilis, conceſſa radicum in altioribus aequationibus extractione, at ſimul nimis in concre-

 to

to laborioſa; Ipſa interim argumenti natura praeter eam, quam docuimus methodum, nullam aliam admittere videtur; manifeſtum etiam eſt hanc methodum omnia comprehendere, quae rei ipſi inſunt, quiscunque fuerit corporum numerus ſiue finitus ſiue infinitus, qualis foret in catenis ſuſpenſis vel etiam in chordis muſicis tenſis.

Caeterum paſſim in hoc ſchediasmate mentionem feci punctorum regreſſuum; haec autem ex eo determinantur, vt, pro oſcillationibus ſimplicibus vtriusque generis, puncta quaerantur in quibus motus ſint contrarii cum velocitatibus aequalibus, ſi tempora ſumantur eadem; hinc ambo ſpatia, vtroque pendulo ſimplici deſcripta, innoteſcunt; ſumma vel differentia ſpatiorum deſcriptorum dabit in pendulo compoſito locum abſolutum. Si porro ſuper vtraque excurſione integra in ambabus oſcillationibus ſimplicibus tanquam ſuper diametro conſtruatur circulus in eoque abſcindatur arcus qualiscunque, arcus iſte exprimet tempus inſumtum, ſinus verſus huius arcus indicabit ſpatium hoc tempore deſcriptum et ſinus ipſe dabit velocitatem corporis pro aſſumta oſcillatione ſimplici.

Tab. II. Sint nempe (fig. 6 et 7.) $afcd$ et $a'f'c'd'$ duo circuli radiis $ao$ et $a'o'$ deſcripti ſintque radii $ao$ et $a'o'$ aequales elongationibus initialibus corporis ſuperioris ab axe pro vtraque oſcillationum ſimplicium claſſe ſiue $ao = \alpha$ atque $a'o' = \alpha'$. Conſiderantur hic viae a corporibus oſcillando deſcriptae tanquam lineae rectae ob inſignem, quae ſupponitur

tur in oſcillationibus, paruitatem. Sint porro tempora, quibus integrae oſcillationes $a c$ et $a' c'$ perficiuntur aequalia $t$ et $t'$ et velocitates in punctis mediis $o$ et $o' = c'$ et $c'$. Peruenerit inter oſcillandum corpus eodem temporis interuallo ex punctis $a$ et $a'$ in puncta $e$ et $e'$, ex quibus erigantur perpendiculares $e b$ atque $e' b'$: erunt velocitates in punctis $e$ et $e' = \frac{e b}{o f} c$ et $\frac{e' b'}{o' f'} c'$, quae affirmatiuae vel negatiuae pro re nata erunt accipiendae; habebimus quoque tempora pro percurſis ſpatiis $a e$ et $a' e$ aequalia $\frac{a f b}{a f c} t$ et $\frac{a' f' b'}{a' f' c'} t'$, haecque tempora pro motu abſoluto ſemper ſtatuenda ſunt inter ſe aequalia. Sit nunc quadrans circuli, cuius radius vnitate exprimitur, $= q$, ponaturque ſpatium $a e = x$; ſpatium $a' e' = x'$, erit arcus $a f b$ exprimendus per $\alpha$ multiplicatum per arcum cuius ſinus verſus eſt $x$, id eſt, per $\alpha$ Arc. ſin. verſ $x$ atque ſemicirculus $a f c$ per $2 \alpha q$, hocque modo fit $\frac{a f b}{a f c} = \frac{\text{Arc. ſin. verſ.}\, x}{2 q}$ pariterque $\frac{a' f' b'}{a' f' c'} = \frac{\text{Arc. ſin. verſ.}\, x'}{2 q}$; vnde, ob praefatam temporum aequalitatem vel potius identitatem, obtinemus $t$ Arc. ſin. verſ. $x = t'$ Arc. ſin. verſ. $x'$: quia porro velocitates in punctis $e$ et $e'$ debent eſſe inter ſe contrariae et aequales, habebitur quoque $\frac{\sqrt{(2 \alpha x - x x)}}{\alpha} c = \frac{-\sqrt{(2 \alpha' x' - x' x')}}{\alpha'} c'$, praefatis ambabus aequationibus facillime tentando ſatis fiet et inuenientur valores $x$ atque $x'$ quod nunc exemplo paragraphi ſexti explicabo, in quo facienda eſt $\alpha = \alpha'$; $t = 2 t'$; $c = \frac{1}{2} c'$, quia ſcilicet velocitates maximae $c$ et $c'$ ſunt vt $\sqrt{\frac{\alpha \alpha}{2 P}}$ ad $\sqrt{\frac{\alpha' \alpha'}{2 P'}}$, ſi per P et P' intelligantur,

pro vtraque oſcillationum ſimplicium claſſe, longitudines pendulorum ſimplicium iſochronorum, id eſt, vt 1 ad 2 in praeſenti exemplo. Hinc ſequitur, ob aequalitatem radiorum $a\,o$ et $a'\,o'$, fore arcum $a\,f\,b$ aequalem dimidio arcui $a'\,f'\,b'$ ſimulque $b\,e$ ſiue ſin. Arc. $a\,f\,b = 2\,b'\,e'$ ſiue aequalem 2 ſin. Arc. $a'\,f'\,b'$ negatiue ſumto, cui vtrique conditioni ſatis fit, ſumendo arcum $a\,f\,b = 104^{\circ}.\,28'.\,40''$. Sic fiet $a\,e = 1.\,25000\,\alpha = \frac{5}{4}\,\alpha = 30$ lin. ſimulque $a'\,e' = 1,\,87500\,\alpha = 45$ lin. hi duo valores nos docent, corpus ſuperius ab initio vsque ad primum punctum regreſſus deſcribere ſpatium 30 lin. oſcillatione ſua ſimplici tardiore atque 45 lin. oſcillatione ſua celeriori, adeoque motu ſuo compoſito 75 lin. Haec omnia exacte conueniunt cum paragrapho ſexto.

Sed hoc exemplum facillime per prima elementa geometrica ſoluitur, poſtquam demonſtrauimus, poſitis radiis $a\,o$ et $a'\,o'$ inter ſe aequalibus, quod ſit $b\,e = 2\,b'\,e'$ ſimulque arcus $a\,f\,b =$ dimidio arcui $a'\,f'\,b'$ ſiue $f\,b = \frac{1}{2}\,c'\,b'$ vnde ſtatim, absque vlla appropinquatione, inuenitur exacte $o\,e$ ſiue ſinus arc. $f\,b = \frac{1}{4}$ rad. $= \frac{1}{4}\alpha = 6$ lin. adeoque $a\,e = \frac{5}{4}\alpha = 30$ lin. vt ante.

DE

# DE OSCILLATIONIBVS MINIMIS PENDVLI QVOTCVNQVE PONDVSCVLIS ONVSTI.

Auctore

*L. EVLERO.*

## Problema.

Si filo tenuiſſimo ſiue grauitatis experti quotcunque ponduſcula A, B, C, D in datis a ſe inuicem interuallis fuerint alligata, idque ex puncto O ſuſpenſum et vtcunque ad motum concitatum oſcillationes minimas peragat, eius ſtatum et motum ad quoduis tempus definire.

## Solutio.

§. 1. Ex puncto ſuſpenſionis O ducatur recta verticalis O V, et quicunque motus pendulo primum fuerit impreſſus elapſo tempore $= t$ pendulum teneat ſitum in figura expreſſum O A B C D etc. et ex ſingulis ponduſculis ad verticalem O V agantur normales A P, B Q, C R, D S etc. Iam quia ſingula ponduſcula dantur, eorum maſſae ſeu pondera deſignentur litteris A, B, C, D etc. et quia eorum interualla etiam dantur ponamus diſtantias Tab. III. Fig. 1.

$$O A = a;\ A B = b;\ B C = c;\ C D = d \text{ etc.}$$

 Porro

Porro pro ſingulis ponduſculis ſtatuantur coordinatae

$$OP = x;\ OQ = x';\ OR = x'';\ OS = x''' \text{ etc.}$$
$$PA = y;\ QB = y';\ RC = y'';\ SD = y''' \text{ etc.}$$

Tum vero ductis verticalibus $Aq$, $Br$; $Cs$ etc. vocentur anguli quibus ſingula interualla a ſitu verticali declinant

$$AOp = p;\ BAq = q;\ CBr = r;\ DCs = s \text{ etc.}$$

ex quibus illae coordinatae ita determinantur vt ſit

| | |
|---|---|
| $x = a\cos.p$ | $y = a\sin.p$ |
| $x' = a\cos.p + b\cos.q$ | $y' = a\sin.p + b\sin.q$ |
| $x'' = a\cos.p + b\cos.q + c\cos.r$ | $y'' = a\sin.p + b\sin.q + c\sin.r$ |
| $x''' = a\cos.p + b\cos.q + c\cos.r + d\cos.s$ | $y''' = a\sin.p + b\sin.q + c\sin.r + d\sin.s$ |
| etc. | etc. |

§. 2. His poſitis, pro motu determinando vocetur

tenſio fili $OA = P$

tenſio fili $AB = Q$

tenſio fili $BC = R$

tenſio fili $CD = S$

atque hinc, ſi tempus $t$ in minutis ſecundis exprimatur eiusque differentiale $dt$ pro conſtante habeatur, altitudo autem ex qua grauia vno minuto ſecundo libere delabuntur notetur littera $g$, principia mechanica ſequentes ſuppeditant aequationes

$\frac{ddx}{2g\,dt^2}$

$$\frac{ddx}{2gdt^2} = 1 - \frac{P\,\text{coſ.}\,p}{A} + \frac{Q\,\text{coſ.}\,q}{A} \qquad \frac{ddy}{2gdt^2} = -\frac{P\,\text{ſin.}\,p}{A} + \frac{Q\,\text{ſin.}\,q}{A}$$

$$\frac{ddx'}{2gdt^2} = 1 - \frac{Q\,\text{coſ.}\,q}{B} + \frac{R\,\text{coſ.}\,r}{B} \qquad \frac{ddy'}{2gdt^2} = -\frac{Q\,\text{ſin.}\,q}{B} + \frac{R\,\text{ſin.}\,r}{B}$$

$$\frac{ddx''}{2gdt^2} = 1 - \frac{R\,\text{coſ.}\,r}{C} + \frac{S\,\text{coſ.}\,s}{C} \qquad \frac{ddy''}{2gdt^2} = -\frac{R\,\text{ſin.}\,r}{C} + \frac{S\,\text{ſin.}\,s}{C}$$

$$\frac{ddx'''}{2gdt^2} = 1 - \frac{S\,\text{coſ.}\,s}{D} \qquad \frac{ddy'''}{2gdt^2} = -\frac{S\,\text{ſin.}\,s}{D}$$

etc. etc. | etc. etc.

harum aequationum numerus, qui duplo maior eſt quam numerus pendulorum, ſufficit tam ad ſingulas tenſiones P, Q, R, S etc. quam ad angulos $p$, $q$, $r$, $s$ etc. determinandos pro quouis tempore $t$.

§. 3. Haec ita ſe habent in genere quantaecunque etiam fuerint oſcillationes, quo autem caſu vix vlterius progredi licet, quam ob rem cogimur inueſtigationes noſtras tantum ad eos caſus accommodare, quibus oſcillationes ſunt quam minimae, vti in problemate enunciatur. Quin igitur hoc caſu omnes anguli $p$, $q$, $r$, $s$ eſſe debent quam minimi, pro eorum coſinibus ſcribere licebit vnitatem; pro ſinibus autem ipſos angulos $p$, $q$, $r$, $s$ etc. Hinc igitur ſingulae abſciſſae et applicatae ſortientur valores

| | |
|---|---|
| $x = a$ | $y = ap$ |
| $x' = a+b$ | $y' = ap+bq$ |
| $x'' = a+b+c$ | $y'' = ap+bq+cr$ |
| $x''' = a+b+c+d$ | $y''' = ap+bq+cr+ds$ |
| etc. | etc. |

Quia igitur abſciſſae hoc caſu fiunt conſtantes, earum differentialia euaneſcent; ex quibus naſcentur ſequentes aequationes:

$$0 = A$$

$o = A - P + Q;\ o = B - Q + R;\ o = C - R + S;\ o = D - S$

ex quibus ſtatim ſingulae tenſiones facillime definiuntur, ſcilicet

$S = D;\ R = C + D;\ Q = B + C + D$ et $P = A + B + C + D$; etc.

hinc ad calculum contrahendum ponamus breuitatis gratia

$$\frac{P}{A} = 1 + \frac{B + C + D}{A} = \alpha \text{ hinc erit } \frac{Q}{A} = \frac{B + C + D}{A} = \alpha - 1$$

$$\frac{Q}{B} = 1 + \frac{C + D}{B} = \beta \qquad \frac{R}{B} = \frac{C + D}{B} = \beta - 1$$

$$\frac{R}{C} = 1 + \frac{D}{C} = \gamma \qquad \frac{S}{C} = \frac{D}{C} = \gamma - 1$$

$$\frac{S}{D} = 1 = \delta \qquad \text{etc. etc. etc.}$$

§. 4. Quod ſi iam pro applicatis $y, y', y''$ itemque pro tenſionibus P, Q, R, S etc. ſuos ſcribamus valores, adipiſcemur ſequentes aequationes differentiales ſecundi gradus:

I. $\frac{a\,ddp}{2g\,dt^2} = -\alpha p + (\alpha - 1) q$

II. $\frac{a\,ddp + b\,ddq}{2g\,dt^2} = -\beta q + (\beta - 1) r$

III. $\frac{a\,ddp + b\,ddq + c\,ddr}{2g\,dt^2} = -\gamma r + (\gamma - 1) s$

IV. $\frac{a\,ddp + b\,ddq + c\,ddr + d\,dds}{2g\,dt^2} = -\delta s = -s.$

Sicque totum negotium ad reſolutionem harum aequationum differentio-differentialium reducitur, quae vtique artificia prorſus ſingularia poſtulat.

§. 5. Quia in omnibus his aequationibus variabiles $p, q, r, s$ etc tantum vnicam tenent dimenſionem, euidens eſt, his aequationibus ſatisfieri poſſe, ſi

ſi inter quantitates $p, q, r, s$ certae rationes conſtantes ſtatuantur. Sit igitur

$$p = \mathfrak{A} z ; \; q = \mathfrak{B} z ; \; r = \mathfrak{C} z ; \; s = \mathfrak{D} z$$

ſic enim illae aequationes ſequentes induent formas:

$$\text{I. } \frac{\mathfrak{A} a \, d d z}{2 g \, d t^2} = -\alpha \mathfrak{A} z + (\alpha - 1) \mathfrak{B} z$$

$$\text{II. } \frac{(\mathfrak{A} a + \mathfrak{B} b) \, d d z}{2 g \, d t^2} = -\beta \mathfrak{B} z + (\beta - 1) \mathfrak{C} z$$

$$\text{III. } \frac{(\mathfrak{A} a + \mathfrak{B} b + \mathfrak{C} c) \, d d z}{2 g \, d t^2} = -\gamma \mathfrak{C} z + (\gamma - 1) \mathfrak{D} z$$

$$\text{IV. } \frac{(\mathfrak{A} a + \mathfrak{B} b + \mathfrak{C} c + \mathfrak{D} d) \, d d z}{2 g \, d t^2} = -\delta \mathfrak{D} z + = -\mathfrak{D} z$$

quae aequationes cum omnes inter ſe conuenire debeant, ſingulas ad hanc formam reuocemus;

$$\frac{d d z}{2 g \, d t^2} = -\frac{z}{k}$$

quo valore in ſingulis ſubſtituto nanciſcemur ſequentes quatuor aequationes inter meras quantitates conſtantes, ſcilicet

$$\text{I. } -\frac{\mathfrak{A} a}{k} = -\alpha \mathfrak{A} + (\alpha - 1) \mathfrak{B}$$

$$\text{II. } -\frac{\mathfrak{A} a - \mathfrak{B} b}{k} = -\beta \mathfrak{B} + (\beta - 1) \mathfrak{C}$$

$$\text{III. } -\frac{\mathfrak{A} a - \mathfrak{B} b - \mathfrak{C} c}{k} = -\gamma \mathfrak{C} + (\gamma - 1) \mathfrak{D}$$

$$\text{IV. } -\frac{\mathfrak{A} a - \mathfrak{B} b - \mathfrak{C} c - \mathfrak{D} d}{k} = -\mathfrak{D}.$$

§. 6. Ex his iam aequationibus determinare licebit coëfficientes aſſumtos $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ etc. Ex prima enim erit

$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}}{\alpha - 1} \left(\alpha - \frac{a}{k}\right)$; ex ſecunda erit

$\mathfrak{C} = \frac{1}{\beta - 1} \left(\beta \mathfrak{B} - \frac{\mathfrak{A} a - \mathfrak{B} b}{k}\right)$ ſiue $\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}}{\beta - 1} \left(\beta - \frac{b}{k}\right) - \frac{\mathfrak{A}}{\beta - 1} \frac{a}{k}$

eodem modo ex tertia elicimus

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{C}}{\gamma - 1} \left(\gamma - \frac{c}{k}\right) - \frac{\mathfrak{B}}{\gamma - 1} \frac{b}{k} - \frac{\mathfrak{A}}{\gamma - 1} \frac{a}{k}$$

 Qui

Qui valores in quarta ſubſtituti producent aequationem algebraicam, ex qua quantitatem incognitam $k$ determinari oportebit; vbi aequatio tot inuoluat radices, quot dantur ponduſcula: ita vt pro $k$ totidem diuerſi valores ſint produturi. Quarta autem aequatio quae hic eſt vltima hac forma repraeſentatur:

$$\mathfrak{A}a + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}c + \mathfrak{D}d - \mathfrak{D}k = 0.$$

§. 7. Subſtituamus nunc ſucceſſiue valores ex prioribus aequationibus inuentos in poſterioribus; et quia erat

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}}{\alpha - 1}\left(\alpha - \frac{a}{k}\right) \text{ fiet}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{A}}{(\alpha - 1)(\beta - 1)}\left(\alpha - \frac{a}{k}\right)\left(\beta - \frac{b}{k}\right) - \frac{\mathfrak{A}}{\beta - 1}\frac{a}{k}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{A}}{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)}\left(\alpha - \frac{a}{k}\right)\left(\beta - \frac{b}{k}\right)\left(\gamma - \frac{c}{k}\right) - \frac{\mathfrak{A}}{(\alpha - 1)(\gamma - 1)}\left(\alpha - \frac{a}{k}\right)\frac{b}{k} - \frac{\mathfrak{A}}{\gamma - 1}\frac{a}{k} - \frac{\mathfrak{A}}{(\beta - 1)(\gamma - 1)}\left(\gamma - \frac{c}{k}\right)\frac{a}{k}$$

qui valores ad ſequentes formas reducuntur

$$(\alpha - 1)\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = \alpha - \frac{a}{k}$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1)\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = \alpha\beta - \frac{a(\alpha + \beta - 1) - \alpha b}{k} + \frac{ab}{kk}$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} = \alpha\beta\gamma - \frac{a(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 1) - \alpha b(\beta + \gamma - 1) + c\alpha\beta}{k} + \frac{ab(\beta + \gamma - 1) + ac(\alpha + \beta - 1) + bc.\alpha}{kk} - \frac{abc}{k^3}.$$

§. 8. Quod ſi iam iſtos valores in aequatione inuenta ſubſtituamus, pro determinatione quantitatis $k$ prodibit aequatio quarti gradus, ad quam commodius inueniendam illam aequationem multiplicemus per $\frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)}{\mathfrak{A}k}$ vt habeatur iſta aequatio:

$$\frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)a}{k} + \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)\mathfrak{B}b}{\mathfrak{A}k} + \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)\mathfrak{C}c}{\mathfrak{A}k}$$

$$+ \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)\mathfrak{D}d}{\mathfrak{A}k} - \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} = 0$$

facto

facto autem calculo aequatio iſta biquadratica ita reperietur expreſſa:

$$\alpha\beta\gamma\, k^4 - \alpha\beta\gamma(a+b+c+d)k^3 \left.\begin{array}{l} + ab.\beta\gamma \\ + bc.\alpha\gamma \\ + cd.\alpha\beta \\ + ac.\gamma(\alpha+\beta-1) \\ + bd.\alpha(\beta+\gamma-1) \\ + ad(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha-\beta-\gamma+1) \end{array}\right\} kk$$

$$\left.\begin{array}{l} - bcd.\alpha \\ - abc.\gamma \\ - abd(\beta+\gamma-1) \\ - acd(\alpha+\beta-1) \end{array}\right\} k + abcd = 0$$

vbi obſeruaſſe iuuabit, primo litteras $a$, $b$, $c$, $d$ ſemper denotare diſtantias poſitiuas; tum vero litteras $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, eſſe numeros poſitiuos atque adeo vnitate maiores. Hinc enim ratio intelligi poterit, cur omnes quatuor radices huius aequationis proditurae ſint reales: eas autem omnes eſſe poſitiuas permutatio ſignorum declarat.

§. 9. Ipſi reſolutioni huius aequationis hic non immoramus, quando quidem ſi numerus ponduſculorum eſſet maior a tali inueſtigatione prorſus abſtinere cogeremur: deſignemus igitur quatuor huius aequationis radices litteris $k$, $k'$, $k''$ et $k'''$ ex quarum ſingulis peculiares valores pro litteris $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ colligemus, quos pariter hoc modo deſignemus $\mathfrak{A}'$ $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ $\mathfrak{D}'$; $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{C}''$, $\mathfrak{D}''$ et $\mathfrak{A}'''$, $\mathfrak{B}'''$, $\mathfrak{C}'''$, $\mathfrak{D}'''$; vbi quidem patet, litteras $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$ arbitrio noſtro

penitus relinqui; ita vt hoc modo quatuor habeamus quantitates pro lubitu accipiendas.

§. 10. Proſequamur igitur noſtrum calculum pro ſola radice $k$, cui reſpondent coëfficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, quandoquidem quod pro hac radice fuerit compertum facillime quoque ad reliquas radices applicatur. Cum igitur ſtatuiſſemus hanc aequationem differentialem ſecundi gradus $\frac{ddz}{2g\,dt^2} = \frac{z}{k}$, ita vt ſit $\frac{ddz}{dt^2} + \frac{2gz}{k} = 0$ ſi ponamus $\frac{2g}{k} = \lambda\lambda$ vt ſit $\lambda = \sqrt{\frac{2g}{k}}$ ſi quidem $k$ ſemper eſt quantitas realis poſitiua, notum eſt poſt duplicem integrationem prodire $z = f$ ſin $(\lambda t + \vartheta)$: vbi $\vartheta$ eſt angulus ab arbitrio noſtro pendens. altera autem conſtans arbitraria $f$ ſine reſtrictione vnitati aequalis poni poteſt: propterea quod coëfficiens $\mathfrak{A}$ iam eſt arbitrarius. Hinc igitur ad quodvis tempus $t$ ſinguli anguli $p$, $q$, $r$, $s$ ita determinabuntur, vt ſit

I. $p = \mathfrak{A}\,\text{ſin.}(\lambda t + \vartheta)$; $q = \mathfrak{B}\,\text{ſin.}(\lambda t + \vartheta)$; $r = \mathfrak{C}\,\text{ſin.}(\lambda t + \vartheta)$ et $s = \mathfrak{D}\,\text{ſin.}(\lambda t + \vartheta)$

ſimilique modo ſi ex reliquis radicibus, $k'$, $k''$, $k'''$ ponamus

$$\lambda' = \sqrt{\frac{2g}{k'}},\ \lambda'' = \sqrt{\frac{2g}{k''}},\ \lambda''' = \sqrt{\frac{2g}{k'''}}$$

praeter illam ſolutionem adhuc habebimus tres ſequentes

II. $p = \mathfrak{A}'\,\text{ſin}(\lambda' t + \vartheta')$; $q = \mathfrak{B}'\,\text{ſin}(\lambda' t + \vartheta')$; $r = \mathfrak{C}'\,\text{ſin.}(\lambda' t + \vartheta')$; $s = \mathfrak{D}'\,\text{ſin.}(\lambda' t + \vartheta')$

III. $p = \mathfrak{A}''\,\text{ſin.}(\lambda'' t + \vartheta'')$; $q = \mathfrak{B}''\,\text{ſin.}(\lambda'' t + \vartheta'')$; $r = \mathfrak{C}''\,\text{ſin}(\lambda'' t + \vartheta'')$ $s = \mathfrak{D}''\,\text{ſin.}(\lambda'' t + \vartheta'')$

IV.

IV. $p = \mathfrak{A}''' \operatorname{ſin.}(\lambda''' t + \vartheta''')$; $q = \mathfrak{B}''' \operatorname{ſin.}(\lambda''' t + \vartheta''')$; $r = \mathfrak{C}''' \operatorname{ſin.}(\lambda''' t + \vartheta''')$; $s = \mathfrak{D}''' \operatorname{ſin.}(\lambda''' t + \vartheta''')$.

§. 11. Singulae autem hae quatuor ſolutiones maxime ſunt particulares: propterea quod duas tantum conſtantes arbitrarias inuoluunt, ſcilicet $\mathfrak{A}$ et $\vartheta$, dum ſolutio generalis ob quatuor aequationes differentio-differentiales octo conſtantes arbitrarias complecti deberet. Qualis igitur motus ſingulis reſpondeat operae pretium erit accuratius inueſtigare; ac primo quidem quoniam pro qualibet caſu quatuor anguli $p$, $q$, $r$, $s$ eandem perpetuo inter ſe ſeruant rationem, motus erit maxime regularis et pendulum perinde oſcillations ſuas pereget ac ſi eſſet ſimplex; atque quia elapſo tempore $t = \frac{2\pi}{\lambda}$ ſi loco $t$ ſcribamus $t + \frac{2\pi}{\lambda}$ ſinguli anguli in eundem ſtatum reuertuntur, ideoque pendulum interea duos oſcillationes abſolviſſe cenſetur, ſicque tempus vnius oſcillationis erit $= \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi \sqrt{k}}{\sqrt{2g}}$, quod adeo tempus in minutis ſecundis exprimitur. Eodem modo pro ſecunda radice $k'$ erit tempus vnius cuiusque oſcillationis $= \frac{\pi \sqrt{k'}}{\sqrt{2g}}$; pro tertia radice $= \frac{\pi \sqrt{k''}}{\sqrt{2g}}$ et pro quarta $\frac{\pi \sqrt{k'''}}{\sqrt{2g}}$.

§. 12. Cum igitur hae quatuor ſolutiones ſimplices problemati noſtro ſatisfaciant, quoniam in aequationibus differentio-differentialibus ad quas nos ſolutio perduxit ſingulae quantitates $p$, $q$, $r$, $s$ vbique vnam tantum dimenſionem tenent, ſolutiones illae particulares quomodocunque inter ſe combinentur pro-

 blema-

blemati pariter ſatisfacient, vnde ſequens ſolutio generalis conficitur:

$$p = \mathfrak{A}\,\text{ſin.}(\lambda t + \vartheta) + \mathfrak{A}'\,\text{ſin.}(\lambda' t + \vartheta') + \mathfrak{A}''\,\text{ſin.}(\lambda'' t + \vartheta'') + \mathfrak{A}'''\,\text{ſin.}\,\lambda''' t + \vartheta''')$$

$$q = \mathfrak{B}\,\text{ſin.}(\lambda t + \vartheta) + \mathfrak{B}'\,\text{ſin.}(\lambda' t + \vartheta') + \mathfrak{B}''\,\text{ſin.}(\lambda'' t + \vartheta'') + \mathfrak{B}'''\,\text{ſin.}(\lambda''' t + \vartheta''')$$

$$r = \mathfrak{C}\,\text{ſin.}(\lambda t + \vartheta) + \mathfrak{C}'\,\text{ſin.}(\lambda' t + \vartheta') + \mathfrak{C}''\,\text{ſin.}(\lambda'' t + \vartheta'') + \mathfrak{C}'''\,\text{ſin.}(\lambda''' t + \vartheta''')$$

$$s = \mathfrak{D}\,\text{ſin.}(\lambda t + \vartheta) + \mathfrak{D}\,\text{ſin.}(\lambda' t + \vartheta') + \mathfrak{D}''\,\text{ſin.}(\lambda'' t + \vartheta'') + \mathfrak{D}'''\,\text{ſin.}(\lambda''' t + \vartheta''')$$

in his enim formulis octo occurrunt conſtantes arbitrariae, ſcilicet quatuor coëfficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$ quippe per quos reliqui determinantur; tum quatuor anguli $\vartheta$, $\vartheta'$, $\vartheta''$, $\vartheta'''$, quemadmodum gemina integratio quatuor illarum aequationum poſtulat. Hinc igitur patet, principium Illuſtriſſ. D. *Bernoulli*, quo omnes huiusmodi oſcillationes ex duobus vel pluribus motibus oſcillatoriis ſimplicibus et regularibus componi ſtatuit, omnino in primis motus principiis eſſe fundatum atque adeo ex iis immediate deduci poſſe.

§. 13. Ope harum igitur formularum ad quodvis tempus $t$ ſinguli illi anguli $p$, $q$, $r$ et $s$ aſſignari hincque ſtatus penduli definiri poterit. Quin etiam horum angulorum variationes momentaneae celeritates praebebunt, quibus ſtatus penduli quouis temporis momento $dt$ immutatur. Cum enim formulae

$$\frac{dp}{dt},\ \frac{dq}{dt},\ \frac{dr}{dt}\ \text{et}\ \frac{ds}{dt}$$

exprimant celeritates angulares, quibus iſti anguli tempuſculo $dt$ augentur, hae celeritates ita ſe habebunt

$\frac{dp}{dt}$

$$\frac{dp}{dt} = \lambda\mathfrak{A}\,\text{coſ.}(\lambda t+\vartheta)+\lambda'\mathfrak{A}'\,\text{coſ.}(\lambda' t+\vartheta')+\lambda''\mathfrak{A}''\,\text{coſ.}(\lambda'' t+\vartheta'')$$
$$+\lambda'''\mathfrak{A}'''\,\text{coſ.}(\lambda''' t+\vartheta''')$$
$$\frac{dq}{dt} = \lambda\mathfrak{B}\,\text{coſ.}(\lambda t+\vartheta)+\lambda'\mathfrak{B}'\,\text{coſ.}(\lambda' t+\vartheta')+\lambda''\mathfrak{B}''\,\text{coſ.}(\lambda'' t+\vartheta'')$$
$$+\lambda'''\mathfrak{B}'''\,\text{coſ.}(\lambda''' t+\vartheta''')$$
$$\frac{dr}{dt} = \lambda\mathfrak{C}\,\text{coſ.}(\lambda t+\vartheta)+\lambda'\mathfrak{C}'\,\text{coſ.}(\lambda' t+\vartheta')+\lambda''\mathfrak{C}''\,\text{coſ.}(\lambda'' t+\vartheta'')$$
$$+\lambda'''\mathfrak{C}'''\,\text{coſ.}(\lambda''' t+\vartheta''')$$
$$\frac{ds}{dt} = \lambda\mathfrak{D}\,\text{coſ.}(\lambda t+\vartheta)+\lambda'\mathfrak{D}'\,\text{coſ.}(\lambda' t+\vartheta')+\lambda''\mathfrak{D}''\,\text{coſ.}(\lambda'' t+\vartheta'')$$
$$+\lambda'''\mathfrak{D}'''\,\text{coſ.}(\lambda''' t+\vartheta''')$$

ſicque omnia ſumus adepti, quae circa ſolutionem huius problematis deſiderari poſſunt.

## Corollarium.

§. 14. Maxima igitur difficultas in reſolutione aequationis algebraicae ex qua omnes valores litterae $k$ determinari oportet, occurrit; praecipue ſi pendulum pluribus penduſculis fuerit oneratum. Tum vero etiam quemadmodum pro ſingulis valoribus ipſius $k$ coëfficientes $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ definiri commode queant nondum ſatis liquet pro pluribus quam quatuor ponduſculis. Quo igitur hanc inueſtigationem faciliorem reddamus, differentias inter binas aequationes ſe inſequentes (§. 5.) exhibitas conſideremus

I $\quad -\frac{\mathfrak{A}a}{k} = -\alpha\mathfrak{A}+(\alpha-1)\mathfrak{B}$ ſiue $0=\mathfrak{A}(\frac{a}{k}-\alpha)+(\alpha-1)\mathfrak{B}$

I–II. $\frac{\mathfrak{B}b}{k} = -\alpha\mathfrak{A}+\mathfrak{B}(\alpha+\beta-1)-\mathfrak{C}(\beta-1)$

II–III. $\frac{\mathfrak{C}c}{k} = -\beta\mathfrak{B}+\mathfrak{C}(\beta+\gamma-1)-\mathfrak{D}(\gamma-1)$

III–IV. $\frac{\mathfrak{D}d}{k} = -\gamma\mathfrak{C}+\gamma\mathfrak{D}$

vnde

vnde facile patet quomodo hae aequalitates ſint continuandae, ſi ponduſculorum numerus fuerit maior.

§. 15. Supra litterae $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ ex prima $\mathfrak{A}$ determinauimus; nunc autem a poſtrema incipientes ſingulas ex vltima $\mathfrak{D}$ deriuemus, vnde fit vt ſequitur

$$\gamma\,\mathfrak{C} = \mathfrak{D}\left(\gamma - \tfrac{d}{k}\right)$$

$$\beta\,\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\left(\beta + \gamma - 1 - \tfrac{c}{k}\right) - \mathfrak{D}\,(\gamma - 1)$$

$$\alpha\,\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\left(\alpha + \beta - 1 - \tfrac{b}{k}\right) - \mathfrak{C}\,(\beta - 1)$$

vnde reperimus

$$\tfrac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \tfrac{1}{\gamma}\left(\gamma - \tfrac{d}{k}\right)$$

$$\tfrac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} = \tfrac{1}{\beta\gamma}\left(\gamma - \tfrac{d}{k}\right)\left(\beta + \gamma - 1 - \tfrac{c}{k}\right) - \left(\tfrac{\gamma - 1}{\beta}\right)$$

$$\tfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}} = \tfrac{1}{\alpha\beta\gamma}\left(\gamma - \tfrac{d}{k}\right)\left(\beta + \gamma - 1 - \tfrac{c}{k}\right)\left(\alpha + \beta - 1 - \tfrac{b}{k}\right) - \tfrac{\gamma - 1}{\alpha\beta}\left(\alpha + \beta - 1 - \tfrac{b}{k}\right) - \tfrac{\beta - 1}{\alpha\gamma}\left(\gamma - \tfrac{d}{k}\right)$$

qui valores in prima aequatione ſubſtituti producent iſtam aequationem:

$$0 = -\tfrac{1}{\alpha\beta\gamma}\left(\alpha - \tfrac{a}{k}\right)\left(\alpha + \beta - 1 - \tfrac{b}{k}\right)\left(\beta + \gamma - 1 - \tfrac{c}{k}\right)\left(\gamma - \tfrac{d}{k}\right) + \tfrac{\gamma - 1}{\alpha\beta}\left(\alpha - \tfrac{a}{k}\right)\left(\alpha + \beta - 1 - \tfrac{b}{k}\right) + \tfrac{\beta - 1}{\alpha\gamma}\left(\alpha - \tfrac{a}{k}\right)\left(\gamma - \tfrac{d}{k}\right) + \tfrac{\alpha - 1}{\beta\gamma}\left(\beta + \gamma - 1 - \tfrac{c}{k}\right)\left(\gamma - \tfrac{d}{k} - \tfrac{(\alpha - 1)(\gamma - 1)}{\beta}\right.$$

quae aequatio manifeſto aſcendit ad quartum ordinem, ex qua incognitae $k$ quatuor valores inueſtigari oportet: hocque modo operatio inſtitui facile poterit, ſi ponduſculorum numerus fuerit maior.

Scho-

## Scholion.

§. 16. Quamuis autem haec ſolutio ſit maxime elegans, et problemati perfectiſſime ſatisfaciat, tamen maximae occurrunt difficultates, ſi eam ad caſum determinatum applicare voluerimus. Quod ſi enim pro ſtatu initiali vbi $t = 0$ ſingulis angulis $p, q, r, s$ datos valores tribuere velimus, ſimulque ſingulis ponduſculis datas celeritates angulares, ad octo aequationes perueniemus, quae ſimiles erunt duabus aequationibus ex angulo $p$ natis: ſi enim requiratur vt initio fuerit angulus $p = f$ eiusque celeritas angularis $= i$ hae duae obtinentur aequationes:

$$f = \mathfrak{A} \sin \vartheta + \mathfrak{A}' \sin. \vartheta' + \mathfrak{A}'' \sin. \vartheta'' + \mathfrak{A}''' \sin. \vartheta''' \text{ et}$$
$$i = \lambda \mathfrak{A} \cos. \vartheta + \lambda' \mathfrak{A}' \cos. \vartheta' + \lambda'' \mathfrak{A}'' \cos. \vartheta'' + \lambda''' \mathfrak{A}''' \cos. \vartheta'''$$

ſimilesque binae aequationes obtinebuntur pro reliquis ponduſculis. Nunc igitur requiritur vt ex his octo aequationibus octo illae conſtantes arbitrariae

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{A}''' \text{ et } \vartheta, \vartheta', \vartheta'', \vartheta'''$$

definiantur, quem ſane laborem vix quisquam exſequetur: ſi modo corpuſculorum numerus ternarium ſuperauerit; quamobrem iam dudum non dubitaui aſſeuerare, ſolutionem hanc quantumuis elegantem et perfectam plane eſſe ineptam, vt ad caſus determinatos, quibus penduli ſtatus initialis praeſcribitur adaptari poſſit. Ex quo manifeſto ſequitur, ſi problema ita proponatur, vt ſi pendulo datus ſtatus et motus initio imprimatur, motus deinceps ſecuturus definiri debeat, longe aliam ſolutionem requiri, quae proinde ab hac maxime diſcrepare debebit.

# EVOLVTIO CASVS

## quo omnia ponduſcula ſunt aequalia eorumque interualla etiam aequalia $= a$; ponatur autem breuitatis gratia $\frac{a}{k} = u$.

§. 17. Sit primo ponduſculorum numerus $= 2$ erit $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, vnde aequationes ex §. 13. erunt

$$0 = -\mathfrak{A}(2-u) + \mathfrak{B} \text{ et } \mathfrak{B}u = -2\mathfrak{A} + 2\mathfrak{B};$$

ex poſteriore ſequitur

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{B}(2-u)}{2}$$

qui valor in priore ſubſtitutus dat

$$0 = -\frac{\mathfrak{B}(2-u)^2}{2} + \mathfrak{B} \text{ ſiue } (2-u)^2 - 2 = 0$$

vnde ſtatim deducitur

$$2 - u = \pm \sqrt{2} \text{ ideoque } u = 2 \mp \sqrt{2} = \frac{a}{k},$$

tum vero $\mathfrak{A}$ per $\mathfrak{B}$ ita exprimitur vt ſit $\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{B}(2-u)}{2}$ vbi $\mathfrak{B}$ pro lubitu accipi poteſt. Quare ſi bini valores ipſius $k$ ſint $k$ et $k'$, hisque reſpondeant litterae $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{B}'$ ſolutio in his aequationibus continebitur poſito $\lambda = \sqrt{\frac{2g}{k}}$ et $\lambda' = \sqrt{\frac{2g}{k'}}$

$$p = \mathfrak{A}\,\text{ſin.}(\lambda t + \vartheta) + \mathfrak{A}'\,\text{ſin.}(\lambda' t + \vartheta') \text{ et}$$
$$q = \mathfrak{B}\,\text{ſin.}(\lambda t + \vartheta) + \mathfrak{B}'\,\text{ſin.}(\lambda' t + \vartheta').$$

§. 18. Sit ponduſculorum numerus $= 3$, eritque $\alpha = 3$, $\beta = 2$ et $\gamma = 1$, vnde aequationes noſtrae erunt

$$0 = -\mathfrak{A}(3-u) + 2\mathfrak{B} \text{ ſiue } 0 = \mathfrak{A}(3-u) - 2\mathfrak{B}$$
$$\mathfrak{B}u = -3\mathfrak{A} + 4\mathfrak{B} - \mathfrak{C}$$
$$\mathfrak{C}u = -2\mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}$$

ex

Ex hac fit $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{C}(2-u)}{2}$ tum vero experiore;

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{C}(2-u)(4-u)}{6} - \frac{\mathfrak{C}}{3} = \frac{\mathfrak{C}}{6}(6 - 6u + uu)$$

vnde aequatio prodit

$$\frac{(2-u)(3-u)(4-u)}{6} - \frac{(3-u)}{3} - (2-u) = 0 \text{ ſiue}$$

$$6 - 18u + 9uu - u^3 = 0$$

cuius ergo dabuntur tres radices, ideoque valores pro $k$, $k'$, $k''$, ex quibus tota ſolutio facile conficitur.

§. 19. Sit ponduſculorum numerus $= 4$, erit $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $\delta = 1$, vnde noſtrae aequationes erunt

$$o = \mathfrak{A}(4-u) - 3\mathfrak{B}$$
$$\mathfrak{B}u = -4\mathfrak{A} + 6\mathfrak{B} - 2\mathfrak{C}$$
$$\mathfrak{C}u = -3\mathfrak{B} + 4\mathfrak{C} - \mathfrak{D}$$
$$\mathfrak{D}u = -2\mathfrak{C} + 2\mathfrak{D}.$$

Ex vltima fit

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{D}(2-u)}{2}$$
$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{D}(2-u)(4-u)}{6} - \frac{\mathfrak{D}}{3} = \frac{\mathfrak{D}}{6}(6 - 6u + uu)$$
$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{D}}{24}(24 - 36u + 12uu - u^3)$$

qui valores ſubſtituti hanc praebent aequationem

$$u^4 - 16u^3 + 72uu - 96u + 24 = 0$$

cuius quatuor radices quaeri oportet.

§. 20. Sit numerus ponduſculorum $= 5$, erit $\alpha = 5$, $\beta = 4$, $\gamma = 3$, $\delta = 2$, $\varepsilon = 1$, et aequationes noſtrae erunt

 o =

$$0 = \mathfrak{A}(5-u) - 4\mathfrak{B}$$
$$\mathfrak{B}u = -5\mathfrak{A} + 8\mathfrak{B} - 3\mathfrak{C}$$
$$\mathfrak{C}u = -4\mathfrak{B} + 6\mathfrak{C} - 2\mathfrak{D}$$
$$\mathfrak{D}u = -3\mathfrak{C} + 4\mathfrak{D} - \mathfrak{E}$$
$$\mathfrak{E}u = -2\mathfrak{D} + 2\mathfrak{E}$$

hic ex tribus poſterioribus colligimus

$$\mathfrak{D} = \tfrac{\mathfrak{E}}{2}(2-u)$$
$$\mathfrak{C} = \tfrac{\mathfrak{E}}{6}(6-6u+uu)$$
$$\mathfrak{B} = \tfrac{\mathfrak{E}}{24}(24-36u+12uu-u^3)$$

tum vero inuenitur

$$\mathfrak{A} = \tfrac{\mathfrak{E}}{120}(120-240u+120uu-20u^3+u^4)$$

quibus valoribus ſubſtitutis aequatio ſequens reſultat

$$u^5 - 25u^4 + 200u^3 - 600uu + 600u - 120 = 0.$$

§. 21. Hinc generaliter ſi numerus ponduſculorum fuerit $= n$, aequatio ex qua $u$ definiri debet per legitimam inductionem colligitur fore

$$0 = 1 - \frac{nu}{1^2} + \frac{n(n-1)uu}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{n(n-1)(n-2)u^3}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)u^4}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} \text{ etc.}$$

deinde vero ſi coëfficientium $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ vltimus fuerit $\mathfrak{N}$ ſinguli ſequenti modo determinabuntur

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}} = 1 - \frac{n-1}{1^2 \cdot 2}u + \frac{(n-1)(n-2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3}u^2 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4}u^3 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \cdot 5}u^4 \text{ etc.}$$
$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{N}} = 1 - \frac{n-2}{1^2 \cdot 2}u + \frac{(n-2)(n-3)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3}uu - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4}u^3 + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5}u^4 \text{ etc.}$$
$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{N}} = 1 - \frac{n-3}{1^2 \cdot 2}u + \frac{(n-3)(n-4)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3}uu - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4}u^3 + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5}u^5 \text{ etc.}$$
$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{N}} = 1 - \frac{n-4}{1^2 \cdot 2}u + \frac{(n-4)(n-5)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3}uu - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4}u^3 + \frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5}u^5 \text{ etc.}$$

etc. etc. etc.

Tantum

Tantum igitur reſtat methodus, cuius ope illius aequationis $n$ radices elici queant, quippe quibus inuentis ſolutio completa huius caſus habebitur.

§. 22. Aequatio illa ordinis $n$, ex qua valores litterae $u$ definire oportet etiam hoc modo concinnius referri poteſt

$$0 = u^{n} - \frac{n^{2}}{1} u^{n-1} + \frac{n^{2}(n-\ )^{2}}{1.\ 2} u^{n-2} - \frac{n^{2}(n-1)^{2}(n-2)^{2}}{1.\ 2.\ 3} u^{n-3} + \frac{n^{2}(n-1)^{2}(n-2)^{2}(n-3)^{2}}{1.\ 2.\ 3.\ 4} u^{n-4} \text{ etc.}$$

hinc autem coëfficientes 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 etc. etiam hoc modo exhiberi poſſunt

$$\pm 1.\ 2.\ 3 \ldots n \frac{𝔄}{𝔑} = u^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1} u^{n-2} + \frac{n(n-1)^{2}(n-2)}{1.\ 2} u^{n-3} - \frac{n(n-1)^{2}(n-2)^{2}(n-\ )}{1.\ 2.\ 3} u^{n-4} \text{ etc.}$$

$$\mp 1.\ 2.\ 3 \ldots (n-1) \frac{𝔅}{𝔑} = u^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1} u^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)^{2}(n-3)}{1.\ 2} u^{n-4} - \frac{(n-1)(n-2)^{2}(n-3)^{2}(n-4)}{1.\ 2.\ 3} u^{n-5} \text{ etc.}$$

$$\pm 1.\ 2.\ 3 \ldots (n-2) \frac{ℭ}{𝔑} = u^{n-3} - \frac{(n-2)(n-3)}{1} u^{n-4} + \frac{(n-2)(n-3)^{2}(n-4)}{1.\ 2} u^{n-5} - \frac{(n-2)(n-3)^{2}(n-4)^{2}(n-5)}{1.\ 2.\ 3} u^{n-6} \text{ etc.}$$

$$\mp 1.\ 2.\ 3 \ldots (n-3) \frac{𝔇}{𝔑} = u^{n-4} - \frac{(n-3)(n-4)}{1} u^{n-5} + \frac{(n-3)(n-4)^{2}(n-5)}{1.\ 2} u^{n-6} - \frac{(n-2)(n-3)^{2}(n-4)^{2}(n-5)}{1.\ 2.\ 3} u^{n-7} \text{ etc.}$$

etc. etc.

vbi ſignorum ambiguorum ſuperiora ſunt accipienda ſi $n$ fuerit numerus impar, inferiora autem ſi par.

# DE MOTV OSCILLATORIO BINARVM LANCIVM EX LIBRA SVSPENSARVM.

Auctore

*L. EVLERO.*

§. 1.

Omnino ſingulare atque maxima attentione dignum videtur illud oſcillationum genus, cuius nuper mentionem fecit Illuſtriſſimus *Bernoullius*, his verbis:

*Cum aliquando in libra, maiori eaque ſubpigra, alteram lancem forte fortuna ad latus diducerem, moxque rurſus dimitterem, accidit vtique, vt protinus hinc inde oſcillaret, nec ab initio lanx oppoſita de loco moueretur: mox autem et haec quoque agitari ſenſimque maiores oſcillationes formare, dum e contrario lanx prior motum ſuum oſcillatorium gradatim perderet tandemque vere quieſceret; Hoc ipſo momento altera maximum motionis gradum, initiali lancis ſociae fere aequalem, attingebat; tunc ordine contrario, eaedem mutationes repetebantur, vsque, dum prima lanx motum ſuum primitiuum integrum reſumeret ſociaque quieti ad momentum redderetur: haec autem oſcillationum communicatio ac reciprocatio diu ſatis ſeſe manifeſtabat;*

Non

Non dubito quin determinatio motus iſtius oſcillatorii omnibus geometris maxime ardua videatur, neque enim video, quemadmodum ſubſidia quibus hactenus ad alia oſcillationum genera euoluenda feliciter vſi ſunt, ad genus hocce expediendum, cum ſucceſſu adhiberi queant; quamobrem ad prima motus principia confugiendum eſſe, cenſeo, vt omnia commemorata motus Phaenomena, quae vtique ſummopere admirabilia videntur rite explicari queant. Hanc igitur inueſtigationem hic ſuſcipere conſtitui, operam imprimis daturus, ne vllam circumſtantiam quae quicquam ad hunc motum conferre valeant ſim praetermiſſurus.

§. 2. Ac primo quidem libra ſeu bilanx, in qua illuſtris Auctor motus illos mirabiles obſeruavit, ſubpigra perhibetur; vnde perſpicuum eſt, centrum grauitatis iugi infra punctum ſuſpenſionis ſeu centrum motus ſitum fuiſſe. Deinde etiam facile intelligitur, motum ab vna lance cum altera communicari non potuiſſe, niſi iugum aliquam inclinationem fuerit paſſum, quam ob rem, vt in motus tam ipſius iugi quam binarum lancium rite inquiram, ad quodcunque tempus ab initio elapſum, quod ſit $= k$, et in minutus ſecundis exprimatur, conſiderabo ſitum tam iugi quam lancium.

§. 3. Sit igitur C punctum ſuſpenſionis, ſeu centrum motus, circa quod iugum in plano verticali eſt mobile, et per hoc punctum C ducatur recta horizontalis $p\,q$, itemque verticalis $C\,c$. Hoc autem Tab. III. Fig. 2.

autem inſtanti iugum reperiatur in ſitu inclinato A C B, ac ponatur angulus inclinationis A C $p$ $=$ B C $q = \omega$: ipſum vero iugum hic tanquam lineam rectam A C B repraeſento, ex cuius extremitatibus A et B lances ſint ſuſpenſae. Vocemus igitur longitudinem brachiorum C A $=$ C B $= a$ et maſſam ſeu pondus ipſius iugi cum trutina, examine, et omnibus partibus quae cum eo firmiter ſunt connexae $=$ M; eius autem centrum grauitatis cadat in punctum G infra C ſitum ad interuallum C G $= c$, quod ergo a verticali C $c$ declinabit angulo G C $c = \omega$. Praeterea vero ſit momentum inertiae totius iugi reſpectu centri grauitatis G $= Mkk$, quod ſcilicet reperitur, ſi ſingulae iugi particulae per quadrata diſtantiarum ſuarum a centro grauitatis G multiplicentur et in vnam ſummam colligantur; vnde momentum inertiae reſpectu centri motus C erit $= M(kk + cc)$.

§. 4. Nunc porro aſſumamus ambas lances ex ipſis iugi extremitatibus A et B eſſe ſuſpenſas, quare ducantur inde verticales A $a$ et B $b$, quem ſitum lances tenerent, ſi nullam haberent inclinationem; hic autem ambas lances, tanquam ſimplicia pondera, ope filorum grauitatis expertium ex punctis A et B ſuſpenſa, conſidero, et longitudinem vtriusque fili A P $=$ B Q vocemus $= b$, pondus autem lancis vtriusque $=$ L. Nunc autem porro lanx A P declinet a verticali A $a$ angulo P A $a = \eta$ et angulo Q B $b = \vartheta$.

§. 5. Nunc ex punctis P et Q ad axem noſtrum horizontalem per C ductum ducamus perpendicula $Pp$ et $Qq$, atque vt horum locorum P et Q rationem in calculum introducamus, vocemus pro vtroque quaſi coordinatas $Cp = x$ et $pP = y$; tum vero $Cq = x'$ et $qQ = y'$, quas autem per elementa iam ante introducta determinari opportet.

§. 6. Hunc infinem pro lance P in verticalem $Pp$ productam ex A ducamus normalem $Ar$, et quia $AP = b$ et angulus $APr = \eta$ erit Tab. III. Fig. 3.

$$Ar = b \text{ ſin. } \eta \quad \text{et} \quad Pr = b \text{ coſ. } \eta.$$

Deinde ex triangulo $AC\alpha$ vbi $CA = a$ et angulus

$$AC\alpha = \omega \text{ erit } A\alpha = a \text{ ſin. } \omega \text{ et } C\alpha = a \text{ coſ. } \omega,$$

vnde pro puncto P binae coordinatae erunt

$$Cp = x = C\alpha + Ar = a \text{ coſ. } \omega + b \text{ ſin. } \eta \text{ et}$$
$$Pp = y = Pr - A\alpha = b \text{ coſ. } \eta - a \text{ ſin. } \omega.$$

Eodem modo pro altera lance, ſi ex C agantur verticalis $B\beta$ et horizontalis $Bs$, erit $B\beta = a$ ſin. $\omega$ et $C\beta = a$ coſ. $\omega$, deinde $Bs = b$ ſin. $\vartheta$ et $Qs = b$ coſ. $\vartheta$ vnde colligimus Fig. 4.

$$Cq = x' = C\beta - \beta q = a \text{ coſ. } \omega - b \text{ ſin } \vartheta \text{ et}$$
$$Qq = y' = Qs + B\beta = b \text{ coſ. } \vartheta + a \text{ ſin. } \omega.$$

§ 7. Iam pro motu determinando conſiderentur vires quibus ambae lances ſollicitantur, quae quidem primo a grauitate deorſum vrgentur vi $= L$; praeterea vero ſuſtinent tenſionem filorum AP et BQ. Sit igitur pro lance P tenſio fili $AP = P$, quae reſoluta dat vim verticalem ſecundum $Pp = P$ coſ. $\eta$ et

et vim horizontalem ſecundum $p$ C $=$ P ſin. $\eta$; ita vt lanx P ſurſum vrgeatur ſecundum P$p$ vi $=$ P coſ. $\eta$ $-$ L, ex quibus viribus motus huius lancis per ſequentes duas aequationes differentio differentiales definitur:

$$\text{I. } \frac{ddx}{2g\,dt^2} = -\frac{P\,\text{ſin.}\,\eta}{L} \text{ et II. } \frac{ddy}{2g\,dt^2} = \frac{L - P\,\text{coſ.}\,\eta}{L}.$$

§. 8. Simili modo altera lanx ob tenſionem Q ſurſum vrgetur vi $=$ Q coſ. $\vartheta$, ſecundem directionem horizontalem vero C$q$ vi $=$ Q ſin. $\vartheta$; ſicque deorſum vrgebitur vi $=$ L $-$ Q coſ. $\vartheta$; vnde principia motus iterum duas aequationes nobis ſuppeditant

$$\text{III. } \frac{ddx'}{2g\,dt^2} = \frac{Q\,\text{ſin.}\,\theta}{L} \text{ et IV. } \frac{ddy'}{2g\,dt^2} = \frac{L - Q\,\text{coſ.}\,\theta}{L}$$

vbi $g$ denotat altitudinem, ex qua grauia vno minuto ſecundo delabuntur.

§. 9. Cum igitur motum vtriusque lancis expediuerimus, contemplemur nunc etiam motum ipſius iugi, qui cum ſit gyratorius, quaeramus vires acceleratrices, quae tendant ad angulum P C A $= \omega$ augendum; vbi primo occurrit proprium iugi pondus $=$ M, quod, quia in centro grauitatis G collectum eſt putandum, producet momentum ad angulum $\omega$ imminuendum, eritque propterea $= -$ M $c$ ſin. $\omega$. Deinde vero iugum vrgetur a tenſione vtriusque fili, et a tenſione A P oritur momentum ad angulum $\omega$ diminuendum tendens, pro quo inueniendo notetur eſſe angulum C A $a = 90° - \omega$; ergo quia P A $a = \eta$ erit totus angulus C A P $= 90° - \omega + \eta$, cuius ſinus eſt $=$ coſ. $(\omega - \eta)$, ex quo momentum hinc oriundum erit $-$ P $a$ coſ. $(\omega - \eta)$. Ab altera autem

parte,

parte, quia eſt angulus $CB\beta = 90^\circ + \omega$ et $QBb = \vartheta$ erit $CBQ = 90^\circ + \omega - \vartheta$, cuius ſinus $= \text{coſ.}(\vartheta - \omega)$. Momentum igitur hinc natum, quia tendit ad angulum $\omega$ augendum, erit $= + Qa\,\text{coſ.}(\vartheta - \omega)$; ſicque omnia momenta in iugum agentia iunctim erunt

$$-Mc\,\text{ſin.}\,\omega - Pa\,\text{coſ.}(\omega - \eta) + Qa\,\text{coſ.}(\vartheta - \omega)$$

quod momentum per momentum inertiae $= M(kk + cc)$ diuiſum praebet accelerationem angularem, quae ſecundum principia motus hanc aequationem ſuppeditat:

$$\text{V.} \quad \frac{dd\omega}{2g\,dt^2} = -\frac{Mc\,\text{ſin.}\,\omega - Pa\,\text{coſ.}(\omega - \eta) + Qa\,\text{coſ.}(\vartheta - \omega)}{M(kk + cc)}.$$

Quae quinque aequationes totam problematis ſolutionem complectuntur.

§. 10. Quo autem pateat, quasnam res ex quinque his aequationibus determinare opporteat, primum ſtatim apparet, ante omnia ambas tenſiones P et Q definiri debere; tum vero ex tribus aequationibus quae relinquentur tantum opus eſt vt noſtros angulos $\eta$, $\vartheta$ et $\omega$ eliciamus. His enim inventis, ad datum quoduis tempus $t$ verum ſitum tam iugi quam ambarum lancium poterimus aſſignare. Sicque tota iſta ſublimis quaeſtio perfecte erit ſoluta; ſaltem ſi quae obſtacula occurrant, id non mechanicae ſed ſoli analyſi erit tribuendum.

§. 11. Statim autem perſpicitur, omnem operam nequicquam impedi et inutiliter collocari, quamdiu tres noſtri anguli $\eta$, $\vartheta$, $\omega$ ad quantitates notabiles exſurgere poſſent; quam ob rem, vti in plerisque aliis oſcillationum generibus, hos angulos quaſi infinite paruos ſtatuere conueniet, vt eorum ſinus

 ipſis

ipſis angulis, coſinus vero vnitati aequales reputari queant; ſicque noſtra inueſtigatio tantum ad oſcillationes quam minimas reſtringetur. Tum vero coordinatae $x$ et $y$, item $x'$ et $y'$ ſequenti modo exprimentur:

$$x = a + b\eta \quad \text{et} \quad x' = a - b\vartheta$$
$$y = b - a\omega \qquad\quad y' = b + a\omega.$$

§. 12. His obſeruatis quinque noſtrae aequationes ſequentes induent formas:

$$\text{I.}\quad \frac{b\,dd\eta}{2g\,dt^2} = -\frac{P\eta}{L};\quad \text{II.}\; -\frac{a\,dd\omega}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{P}{L}$$
$$\text{III.}\; -\frac{b\,dd\vartheta}{2g\,dt^2} = +\frac{Q\vartheta}{L};\quad \text{IV.}\; +\frac{a\,dd\omega}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{Q}{L}$$
$$\text{V.}\quad \frac{dd\omega}{2g\,dt^2} = -\frac{Mc\omega - Pa + Qa}{M(kk+cc)};$$

ex quarum aequationum ſecunda et quarta ſtatim colligimus ambas tenſiones P et Q; erit enim

$$P = \frac{La\,dd\omega}{2g\,dt^2} + L \text{ et } Q = L - \frac{La\,dd\omega}{2g\,dt^2}.$$

§. 13. Subſtituamus igitur hos valores in tribus reliquis aequationibus, quae euadent

$$\text{I.}\; \frac{b\,dd\eta}{2g\,dt^2} = -\eta - \frac{a\eta\,dd\omega}{2g\,dt^2}\quad \text{III.}\; -\frac{b\,dd\vartheta}{2g\,dt^2} = \vartheta - \frac{a\vartheta\,dd\omega}{2g\,dt^2}$$
$$\text{V.}\; \frac{M(kk+cc)\,dd\omega + 2La\,a\,dd\omega}{2g\,dt^2} = -Mc\omega$$

ex quibus iam tres angulos $\eta$, $\vartheta$ et $\omega$ determinare oportet.

§. 14. Quia poſtrema aequatio ſolam variabilem $\omega$ cum tempore $t$ inuoluit, ab eius reſolutione inchoëmus. Hunc in finem ponamus breuitatis gratia $\frac{M(kk+cc)+2Laa}{Mc} = f$ vt fiat $\frac{f\,dd\omega}{2g\,dt^2} + \omega = 0$,

vnde

vnde patet oſcillationes iugi ſimiles fore pendulo ſimplici cuius longitudo $= f$, vnde iſta aequatio integrata dabit $\omega = \mathfrak{C}$ ſin. $(\gamma + t\sqrt{\frac{2g}{f}})$, vbi $\mathfrak{C}$ et $\gamma$ ſunt conſtantes per duplicem integrationem ingreſſae; quam ob rem tempus ſingularum oſciliationum quibus iugum agitabitur in minutis ſecundis expreſſum erit $= \pi\sqrt{\frac{f}{2g}}$. Cum igitur ſit $f = c + \frac{kk}{c} + \frac{2Laa}{Mc}$, patet, ſi libra non eſſet ſubpigra, ſeu ſi centrum grauitatis G in ipſo centro motus C eſſet ſitum, ob $c = 0$ fore $f = \infty$, ideoque iugum nullum motum oſcillatorium eſſe recepturum.

§. 15. Cum igitur ſit $\frac{dd\omega}{2g\,dt^2} = -\frac{\omega}{f}$ iſte valor duas reliquas aequationes ita transformabit

I. $\frac{b\,dd\eta}{2g\,dt^2} = -\eta + \frac{a\eta\omega}{f}$; III. $\frac{b\,dd\vartheta}{2g\,dt^2} = -\vartheta - \frac{a\vartheta\omega}{f}$.

Quia autem angulus $\omega$ eſt quaſi infinite paruus, poſtrema harum aequationum membra ſaltem in principio praetermittere licebit; vnde vtriusque lancis motus pariter congruet cum oſcillationibus penduli ſimplicis cuius longitudo $= b$. Hincque per quantitates finitas reperietur

I. $\eta = \mathfrak{A}$ ſin. $(\alpha + t\sqrt{\frac{2g}{b}})$ II. $\vartheta = \mathfrak{B}$ ſin. $(\mathfrak{S} + t\sqrt{\frac{2g}{b}})$

hi autem valores tantum vt vero proximi ſunt ſpectandi.

§. 16. Quo igitur hos binos motus accuratius definiamus, loco $\omega$ in ipſis aequationibus differentialibus ſuum valorem ſubſtituamus; quod quo facilius fieri poſſit, ſit breuitatis gratia

$\sqrt{\frac{2g}{f}} = \lambda$ vt fiat $\omega = \mathfrak{C}$ ſin. $(\gamma + \lambda t)$,

et habebimus has aequationes:

$$\frac{b\,dd\eta}{2g\,dt^2} = -\eta + \frac{a\eta\mathfrak{C}\,\text{ſin.}(\gamma+\lambda t)}{f}$$

$$\frac{b\,dd\vartheta}{2g\,dt^2} = -\vartheta - \frac{a\vartheta\mathfrak{C}\,\text{ſin.}(\gamma+\lambda t)}{f}$$

atque hic etiam faciamus $\sqrt{\frac{2g}{b}} = \mu$, vt prima membra harum aequationum fiant

$$\frac{dd\eta}{\mu\mu\,dt^2} \text{ et } \frac{dd\vartheta}{\mu\mu\,dt^2}.$$

§. 17. Iam pro priore aequatione ponamus revera eſſe

$\eta = \mathfrak{A}\,\text{ſin}(\alpha+\mu t)+p$, eritque $d\eta = \mathfrak{A}\mu dt\,\text{coſ.}(\alpha+\mu t)+dp$ et $dd\eta = -\mathfrak{A}\mu\mu dt^2\,\text{ſin.}(\alpha+\mu t)+ddp$,

quo valore ſubſtituto erit

$$\frac{ddp}{\mu\mu\,dt^2} = -p + \frac{a\mathfrak{A}\mathfrak{C}\,\text{ſin.}(\alpha+\mu t)\,\text{ſin.}(\gamma+\lambda t)}{f}.$$

Nunc autem notetur eſſe

$$\text{ſin.}(\alpha+\mu t)\,\text{ſin.}(\gamma+\lambda t)$$

$$= \tfrac{1}{2}\text{coſ}(\alpha-\gamma+t(\mu-\lambda)) - \tfrac{1}{2}\text{coſ.}(\alpha+\gamma+t(\mu+\lambda)).$$

Ponatur

$$p = \tfrac{1}{2}M\,\text{coſ.}(\alpha-\gamma+t(\mu-\lambda)) + \tfrac{1}{2}N\,\text{coſ.}(\alpha+\gamma+t(\mu+\lambda))$$

et facta ſubſtitutione prodibit ſequens aequatio

$$-\frac{M(\mu-\lambda)^2}{2\mu\mu}\text{coſ.}(\alpha-\gamma+t(\mu-\lambda)) - \frac{N(\mu+\lambda)^2}{2\mu\mu}\text{coſ.}(\alpha+\gamma+t(\mu+\lambda))$$

$$= -\tfrac{1}{2}M\,\text{coſ.}(\alpha-\gamma+t(\mu-\lambda)) - \tfrac{1}{2}N\,\text{coſ.}(\alpha+\gamma+t(\mu+\lambda))$$

$$+\frac{a\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2f}\text{coſ.}(\alpha-\gamma+t(\mu-\lambda)) - \frac{a\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2f}\text{coſ.}(\alpha+\gamma+t(\mu+\lambda))$$

Aequentur nunc ſeorſim tam coſinus differentiae quam coſinus ſummae, ac obtinebuntur hae aequalitates:

$$0 = \frac{M(\mu-\lambda)^2}{2\mu\mu} - \tfrac{1}{2}M + \frac{a\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2f} \text{ et}$$

$$0 = \frac{N(\mu+\lambda)^2}{2\mu\mu} - \tfrac{1}{2}N - \frac{a\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2f}$$

ex quibus reperietur

$$M = \frac{\mu\mu a \mathfrak{A}\mathfrak{C}}{\lambda(2\mu-\lambda)f} \quad \text{et} \quad N = \frac{\mu\mu a \mathfrak{A}\mathfrak{C}}{\lambda(2\mu+\lambda)f}$$

quocirca angulus $\eta$ ita accuratius exprimetur vt ſit,

$$\eta = \mathfrak{A}\,\text{ſin.}(\alpha+\mu t) + \frac{\mu\mu a \mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu-\lambda)f}\,\text{coſ.}\,(\alpha-\gamma+t(\mu-\lambda))$$
$$+ \frac{\mu\mu a \mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu+\lambda)f}\,\text{coſ.}(\alpha+\gamma+t(\mu+\lambda)).$$

§. 18. Eodem modo tractemus alteram aequationem, quae eſt

$$\frac{dd\vartheta}{\mu\mu\, dt^2} = -\vartheta - a\vartheta\mathfrak{C}\,\text{ſin.}\,(\gamma+\lambda t)$$

quae aequatio a praecedente non differt, niſi quod ibi erat $+a$ hic eſt $-a$, ita vt tantum loco $a$ nunc ſcribendum ſit $-a$. Deinde vero, quia hic agitur de angulo $\vartheta$, loco litterarum $\mathfrak{A}$ et $\alpha$ hic ſcribere debemus $\mathfrak{B}$ et $\beta$, vnde huius anguli valor correctus erit

$$\vartheta = \mathfrak{B}\,\text{ſin.}(\beta+\mu t) - \frac{\mu\mu a \mathfrak{B}\mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu-\lambda)f}\,\text{coſ.}\,(\beta-\gamma+t(\mu-\lambda))$$
$$- \frac{\mu\mu a \mathfrak{B}\mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu+\lambda)f}\,\text{coſ.}\,(\beta+\gamma)+t(\mu+\lambda)).$$

Erat vero $\omega = \mathfrak{C}\,\text{ſin.}\,(\gamma+\lambda t)$.

§. 19. In his formulis probe diſtingui conueniet quantitates cognitas et incognitas; cognitae autem ſunt, praeter diſtantias $a$, $b$ et $c$ vna cum ponderibus L et M quantitates inde formatae $f$ et numeri $\lambda$ et $\mu$: incognitae igitur erunt ſequentes ſex $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ et $\alpha, \beta, \gamma$; tot ſcilicet conſtantes arbitrariae ob duplicem integrationem trium aequationum differentio-differentialium introduci debebant, vt ſolutio generalis prodiret; quod etiam natura rei poſtulat. Nam ſi ſtatus initialis quomodocunque fuerit datus, is

non

non ſolum per tres angulos $\eta$, $\vartheta$ et $\omega$ determinatur, ſed etiam ad motum, qui ſiue iugo ſiue vtrique lanci imprimi potuit eſt attendendum, vnde ſex conditionibus pro quouis caſu erit ſatisfaciendum.

§. 20. Hunc infinem neceſſe eſt, vt etiam celeritates angulares, quae tribus noſtris angulis praeſenti tempore $t$ conueniunt exprimamus; quae ita ſe habebunt

$$\frac{d\eta}{dt} = \mu\mathfrak{A}\,\text{coſ.}(\alpha+\mu t) - \frac{\mu\mu(\mu-\lambda)a\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu-\lambda)f}\,\text{ſin.}(\alpha-\gamma+t(\mu-\lambda))$$
$$- \frac{\mu\mu(\mu+\lambda)a\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu-\lambda)f}\,\text{ſin.}(\alpha+\gamma+t(\mu+\lambda))$$
$$\frac{d\vartheta}{dt} = \mu\mathfrak{B}\,\text{coſ.}(\beta+\mu t) + \frac{\mu\mu(\mu-\lambda)a\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu-\lambda)f}\,\text{ſin.}(\beta-\gamma+t(\mu-\lambda))$$
$$+ \frac{\mu\mu(\mu+\lambda)a\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu+\lambda)f}\,\text{ſin.}(\beta+\gamma+t(\mu+\lambda))$$

ac denique

$$\frac{d\omega}{dt} = \lambda\mathfrak{C}\,\text{coſ.}(\gamma+\lambda t)$$

hocque modo tota ſolutio huius problematis difficillimi feliciter ad finem eſt perducta.

§. 21. Iam obſeruauimus, ſi centrum motus C in ipſo centro grauitatis exiſteret, tum fore $f=\infty$ hincque $\lambda = \sqrt{\frac{2g}{f}} = 0$, ſicque iugum nullum plane motum oſcillatorium recipere poſſe; quandoquidem in omni ſitu foret in aequilibrio. Vnde etiam ambae lances ita ſeorſim oſcillare poſſent, vt neutrius motus ab altera perturbetur, id quod etiam noſtrae formulae manifeſto declarant; quoniam partes poſteriores, quae ob motum iugi ſunt adiectae euaneſcerent; tum enim anguli $\eta$ et $\vartheta$ ſimpliciter per formulas $\mathfrak{A}\,\text{ſin.}(\alpha+\mu t)$ et $\mathfrak{B}\,\text{ſin.}(\beta+\mu t)$ exprimerentur,

rentur, ſicque vtriusque motus admodum penduli ſimplicis oſcillationes peragere poſſet, neque earum motus vllo modo in ſe inuicem influeret; hoc autem intelligendum eſt quamdiu iugum maneret in quiete, etſi in ſtatu inclinato. Vt primum autem motum acceperit, quia nullae vires adſunt eum reprimentes, angulus $\omega$ mox tantopere increſceret, vt non amplius pro minimo haberi poſſet; hoc igitur caſu ne formulae quidem quas inuenimus locum habere poſſent. At ſi centrum grauitatis G adeo ſupra centrum motus C eſſet poſitum, ita vt interuallum $GC = c$ foret negatiuum, etiam quantitas $z$ negatiua euaderet, numerus autem $\lambda$ imaginarius; quam ob cauſam omnis motus oſcillatorius penitus excluderetur, quandoquidem iugum a minima inclinatione prorſus prolaberetur.

§. 22. Vt igitur ea Phaenomena quae ab Illuſtri *Bernoulli* commemorantur ſe manifeſtare poſſent, omnino requiritur, vt centrum grauitatis G infra centrum motus C cadat, hoc eſt vt libra ſit *ſubpigra*. Interim tamen, quoniam interuallum $CG = c$ ſemper valde exiguum eſſe ſolet, euidens eſt, longitudinem $f$ ſemper fore praegrandem, hincque numerum $\lambda$ valde paruum; dum contra numerus $\mu = \sqrt{\frac{2g}{b}}$ plerumque eſt valde notabilis, niſi forte lances P et Q per breuiſſima fila ſuſpendantur quod autem nunquam fieri ſolet, hanc ob rem in genere hic aſſumere licet, numerum $\lambda$ ſemper multo minorem eſſe quam $\mu$.

§. 23. Vt iam in phaenomena motus accuratius inquiramus, primum obſeruo, qualiscumque ſitus et motus ambabus lancibus fuerit impreſſus; ſi ipſum iugum in quiete relinquitur, idque in ſitu ſuo horizontali, ita vt initio fuerit tam $\omega = 0$ quam $\frac{d\omega}{dt} = 0$, ob $t = 0$, fore tam $\mathfrak{C}$ ſin. $\gamma = 0$ quam $\lambda\mathfrak{C}$ coſ. $\gamma = 0$, id quod fieri nequit, niſi ſit $\mathfrak{C} = 0$; poſito autem $\mathfrak{C} = 0$, prodiret $\eta = \mathfrak{A}$ ſin. $(\alpha + \mu t)$ et $\vartheta = \mathfrak{B}$ ſin. $(\beta + \mu t)$, exiſtente $\omega = \mathfrak{C}$ ſin. $(\gamma + \lambda t)$ quae tres formulae nullo modo in ſe inuicem influunt. Hoc igitur caſu tam iugum quam vtraque lanx ſeorſim motu oſcillatorio regulari ferretur, neque vllius motus a reliquis perturbaretur; quod cum in phaenomenis memoratis non vſu venerit, id manifeſto eſt indicio, iugum primo motus initio vel non fuiſſe in quiete, vel quandam inclinationem accepiſſe, id quod etiam ab impulſu, quem altera lanx initio accepiſſe fertur neceſſario euenire debuit.

§. 24. Ponamus igitur primo initio iugum ita de ſitu ſuo naturali fuiſſe depulſum, vt tum fuerit angulus $\omega = m$, neque vero praeterea vllum motum accepiſſe; quo poſito primo initio vbi $t = 0$ erat $m = \mathfrak{C}$ ſin. $\gamma$, tum vero $\frac{d\omega}{dt} = \lambda\mathfrak{C}$ coſ. $\gamma = 0$, vnde colligimus $\gamma = 90° = \frac{\pi}{2}$ et $\mathfrak{C} = m$. Ipſum autem iugum deinceps oſcillationes peraget regulares et conformes pendulo ſimplici, cuius longitudo $f = c + \frac{kk}{c} + \frac{2\mathfrak{L}aa}{Mc}$, vnde fit $\lambda = \sqrt{\frac{2g}{f}}$, ita vt etiam fit $f = \frac{2g}{\lambda\lambda}$.

§. 25.

§. 25. Nunc igitur hos valores $\mathfrak{C} = m$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ et $f = \frac{2g}{\lambda\lambda}$ in formulis pro angulis $\eta$ et $\vartheta$ inuentis ſubſtituamus, eritque

$$\eta = \mathfrak{A} \sin.(\alpha + \mu t) + \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu - \lambda)} \cos.(\alpha - \tfrac{\pi}{2} + t(\mu - \lambda)) + \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu + \lambda)} \cos.(\alpha + \tfrac{\pi}{2} + t(\mu + \lambda))$$

et $$\vartheta = \mathfrak{B} \sin.(\beta + \mu t) - \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu - \lambda)} \cos.(\beta - \tfrac{\pi}{2} + t(\mu - \lambda)) - \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu + \lambda)} \cos.(\beta + \tfrac{\pi}{2} + t(\mu + \lambda))$$

Cum autem ſit

$$\cos.(\alpha + t(\mu - \lambda) - 90^\circ) = \sin.(\alpha + t(\mu - \lambda)) \text{ et}$$
$$\cos.(\alpha + t(\mu + \lambda) + 90^\circ) = -\sin.(\alpha + t(\mu + \lambda))$$

erit aliquanto concinnius

$$\eta = \mathfrak{A} \sin.(\alpha + \mu t) + \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu - \lambda)} \sin.(\alpha + t(\mu - \lambda)) - \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu + \lambda)} \sin.(\alpha + t(\mu + \lambda))$$

et $$\vartheta = \mathfrak{B} \sin.(\beta + \mu t) - \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu - \lambda)} \sin.(\beta + t(\mu - \lambda)) + \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu + \lambda)} \sin.(\beta + t(\mu + \lambda))$$

vnde porro pro vtroque motu angulari deducimus

$$\frac{d\eta}{dt} = \mu \mathfrak{A} \cos.(\alpha + \mu t) + \frac{\lambda(\mu - \lambda)\mu\mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu - \lambda)} \cos.(\alpha + t(\mu - \lambda)) - \frac{\lambda(\mu + \lambda)\mu\mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu + \lambda)} \cos.(\alpha + t(\mu + \lambda))$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \mu \mathfrak{B} \cos.(\beta + \mu t) - \frac{\lambda(\mu - \lambda)\mu\mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu - \lambda)} \cos.(\beta + t(\mu - \lambda)) + \frac{\lambda(\mu + \lambda)\mu\mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu - \lambda)} \cos.(\beta + t(\mu + \lambda)).$$

## EVOLVTIO CASVS

### quo primo initio ambae lances in ſitu verticali quieuerunt, dum iugum ad angulum ACP $= m$ fuit inclinatum.

§. 26. Cum igitur initio fuerit tam $\eta = 0$ et $\vartheta = 0$ quam $\frac{d\eta}{dt} = 0$ et $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, poſito $t = 0$ pro determinatione conſtantium habebimus has quatuor aequationes:

$$\text{I.}\quad 0 = \text{ſin.}\,\alpha + \frac{\lambda\mu\mu\alpha m}{4g(2\mu-\lambda)}\,\text{ſin.}\,\alpha - \frac{\lambda\mu\mu\alpha m}{4g(2\mu+\lambda)}\,\text{ſin.}\,\alpha$$

$$\text{II.}\quad 0 = \text{ſin.}\,\beta - \frac{\lambda\mu\mu\alpha m}{4g(2\mu-\lambda)}\,\text{ſin.}\,\beta + \frac{\lambda\mu\mu\alpha m}{4g(2\mu+\lambda)}\,\text{ſin.}\,\beta$$

$$\text{III.}\quad 0 = \text{coſ.}\,\alpha + \frac{\lambda(\mu-\lambda)\mu\alpha m}{4g(2\mu-\lambda)}\,\text{coſ.}\,\alpha - \frac{\lambda(\mu+\lambda)\mu\alpha m}{4g(2\mu+\lambda)}\,\text{coſ.}\,\alpha$$

$$\text{IV.}\quad 0 = \text{coſ.}\,\beta - \frac{\lambda(\mu-\lambda)\mu\alpha m}{4g(2\mu-\lambda)}\,\text{coſ.}\,\beta + \frac{\lambda(\mu+\lambda)\mu\alpha m}{4g(2\mu+\lambda)}\,\text{coſ}\,\beta$$

quae ad ſequentes formas ſimpliciores reducuntur

$$\text{I.}\quad 0 = \text{ſin.}\,\alpha + \frac{\lambda\lambda\mu\mu\alpha m}{2g(4\mu\mu-\lambda\lambda)}\,\text{ſin.}\,\alpha$$

$$\text{II.}\quad 0 = \text{ſin.}\,\beta - \frac{\lambda\lambda\mu\mu\alpha m}{2g(4\mu\mu-\lambda\lambda)}\,\text{ſin.}\,\beta$$

$$\text{III.}\quad 0 = \text{coſ.}\,\alpha - \frac{\lambda\lambda\mu\mu\alpha m}{2g(4\mu\mu-\lambda\lambda)}\,\text{coſ.}\,\alpha$$

$$\text{IV.}\quad 0 = \text{coſ.}\,\beta + \frac{\lambda\lambda\mu\mu\alpha m}{2g(4\mu\mu-\lambda\lambda)}\,\text{coſ.}\,\beta$$

quibus aequationibus pluribus modis ſatisfieri poſſe videtur: aliquos igitur percurramus.

§. 27. Sumamus $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, vt binis prioribus ſatisfiat; ac poſteriores erunt

$$\text{III.}\quad 0 = 1 - \frac{\lambda\lambda\mu\mu\alpha m}{2g(4\mu\mu-\lambda\lambda)}$$

$$\text{IV.}\quad 0 = 1 + \frac{\lambda\lambda\mu\mu\alpha m}{2g(4\mu\mu-\lambda\lambda)}$$

quibus nullo modo ſatisfieri poteſt, cum eorum ſumma

ſumma ſit $o = 2$. Idem euenit ſi ſumamus $\alpha = 90^\circ$ et $\beta = 90^\circ$, quo binis poſterioribus ſatisfiat; ac priores euadent

$$\text{I. } o = 1 + \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2 g (4 \mu\mu - \lambda\lambda)}$$

$$\text{II. } o = 1 - \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2 g (4 \mu\mu - \lambda\lambda)}$$

quarum ſumma iterum daret $2 = o$, id quod eſt abſurdum. Tale autem abſurdum etiam in genere occurrit, cum

$$\text{I fin. } \beta + \text{II fin. } \alpha = o = 2 \text{ fin. } \alpha \text{ fin. } \beta;$$

eodemque modo

$$\text{III cof. } \beta + \text{IV cof. } \alpha = o = 2 \text{ cof. } \alpha \text{ cof. } \beta$$

quod vtrumque ſimul fieri nequit.

§. 28. Verum, quoniam has aequationes ex principalibus vel per $\mathfrak{A}$ vel per $\mathfrak{B}$ diuidendo elicuimus, eos factores quibus totum negotium confici debet e medio ſuſtulimus. Nullo ſcilicet alio modo huic caſui ſatisfieri poteſt, niſi ſtatuendo tam $\mathfrak{A} = o$ quam $\mathfrak{B} = o$, vnde intelligimus, hoc caſu ambas lances perpetuo in quiete eſſe permanſuras, neque vllum motum eſſe recepturas, etiamſi interea iugum inclinationes ſuas perpertuo abſoluat.

## EVOLVTIO CASVS quo primo initio vna lanx P a ſitu verticali ad angulum $PAa = n$ diducitur, altera lance in quiete relicta, dum iugum ad angulum $ACP = m$ fuerit inclinatum.

§. 29 Hoc igitur caſu poſito $t = o$ eſſe oportet $\eta = n$, $\vartheta = o$, $\frac{d\eta}{dt} = o$ et $\frac{d\vartheta}{dt} = o$, vnde ſe-

quentes quatuor obtinemus aequationes iam ad formam ſimpliciſſimam perductas:

$$\text{I. } n = \mathfrak{A} \text{ ſin. } \alpha + \frac{\lambda\lambda\mu\mu a \mathfrak{A} m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)} \text{ ſin. } \alpha$$

$$\text{II. } 0 = \mathfrak{B} \text{ ſin. } \beta - \frac{\lambda\lambda\mu\mu a \mathfrak{B} m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)} \text{ ſin. } \beta$$

$$\text{III. } 0 = \text{coſ. } \alpha - \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)} \text{ coſ. } \alpha$$

$$\text{IV. } 0 = \text{coſ. } \beta - \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)} \text{ coſ. } \beta$$

vbi quidem tertia per $\mathfrak{A}$ quarta autem per $\mathfrak{B}$ multiplicanda eſt intelligenda; vnde patet, ſi fuerit $\mathfrak{B} = 0$, tam ſecundae quam quartae aequationi ſimul ſatisfieri; tum autem, quia ipſe angulus $\vartheta$ euaneſceret, vtcunque reliquis aequationibus ſatisfieret, et altera lanx Q nunquam ad motum eſſet peruentura, vnde concludimus, fieri poſſe, vt altera lanx perpetuo in quiete perſeueret. Pro motu autem lancis P aequationibus I et III ſatisfieri oportet.

§. 30. Tertiae autem aequationi, quoniam pars poſterior prae prima eſt quaſi infinite parua, ſatisfieri nequit, niſi ſit coſ. $\alpha = 0$, hoc eſt $\alpha = 90°$; tum autem pro prima erit

$$n = \mathfrak{A} + \frac{\lambda\lambda\mu\mu a \mathfrak{A} m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)}$$

vnde deducitur valor litterae $\mathfrak{A}$, qui proxime erit $= n$, ita vt pro motu primae lancis habeamus hanc aequationem:

$$\eta = n \text{ ſin. } (90° + \mu t) + \frac{\lambda\mu\mu a m n}{4g(2\mu - \lambda)} \text{ ſin. } (90° + t(\mu - \lambda))$$
$$- \frac{\lambda\mu\mu a m n}{4g(2\mu + \lambda)} \text{ ſin. } 90° + t(\mu + \lambda)$$

$\frac{d\eta}{dt}$

$$\frac{d\eta}{dt} = \mu n \operatorname{cof.}(90^\circ + \mu t) + \frac{\lambda(\mu - \lambda)\mu\mu a m n}{4g(2\mu - \lambda)} \operatorname{cof.}(90^\circ + t(\mu - \lambda)) - \frac{\lambda(\mu + \lambda)\mu\mu a m n}{4g(2\mu + \lambda)} \operatorname{cof.}(90^\circ + t(\mu + \lambda))$$

vbi notetur eſſe

$$\operatorname{ſin.}(90^\circ + \mu t) = \operatorname{cof.} \mu t \text{ et } \operatorname{ſin.} 90^\circ + t(\mu \pm \lambda) = \operatorname{cof.} t(\mu \pm \lambda);$$
$$\operatorname{cof.}(90^\circ + \mu t) = -\operatorname{ſin.} \mu t \text{ et } \operatorname{cof.}(90^\circ + t(\mu \pm \lambda)) = -\operatorname{ſin.} t(\mu \pm \lambda).$$

Vnde patet, motum huius lancis non amplius eſſe regularem, ſed eo magis a motu penduli ſimplicis eſſe receſſurum, quo maiores fuerint coëfficientes binorum poſtremorum terminorum. Quin etiam iſte motus perturbatus ita repraeſentari poterit, ſecundum principium Celeberrimi *Bernoulii*, vt ſit permiſtus ex triplici oſcillationum genere, quorum primi tempus vnius oſcillationis ſit $= \frac{\pi}{\mu}$, ſecundi vero $= \frac{\pi}{\mu - \lambda}$ et tertii $= \frac{\pi}{\mu + \lambda}$; haec ſcilicet permixtio oritur ex motu oſcillatorio iugi.

§. 31. Hinc igitur iterum diſcimus, quomodocunque tam ipſum iugum quam altera lanx initio ad motum fuerint concitati, nullum plane motum in altera lance generari poſſe, id quod memorato experimento aduerſari videtur. Verum probe notandum eſt, nos hic tantum de oſcillationibus minimis loqui, vnde neutiquam affeuerare poſſumus, talem communicationem in maioribus oſcillationibus locum habere non poſſe. Quoniam enim angulos $\eta$, $\vartheta$ et $\omega$ tam paruos aſſumſimus, vt loco eorum ſinuum ipſos angulos, loco coſinuum vero ipſam vnitatem ſcribere liceret, euidens eſt, ſi ipſos ſinus et coſinus in calculum introducere voluiſſemus, inde vtique ingens

gens diſcrimen oriturum fuiſſe, neque vero etiam hunc motum ex theoria definire licuiſſet. Videamus igitur etiam, quales motus ſint produituri, ſi etiam alteri lanci initio motus quicunque fuerit impreſſus.

## EVOLVTIO CASVS

### quo initio praeter inclinationem iugi ad angulum A C $p = m$ vtraque lanx ad quandum inclinationem diducitur, ſcilicet lanx P ad angulum P A $a = n$ et lanx Q ad angulum Q B $b = n'$.

§. 32. Hic ſcilicet aſſumimus, neutri lanci initio motum fuiſſe inpreſſum, ita vt fuerit tam $\frac{d\eta}{dt} = 0$ quam $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, ad quod vtique calculus accommodabitur, ſtatuendo tam $\alpha = 90°$ quam $\beta = 90°$. Tum vero ob inclinationes initiales erit vt ante vidimus $\mathfrak{A} = n$ et $\mathfrak{B} = n'$, vnde pro motu vtriusque lancis impetramus has aequationes:

$$\eta = n \operatorname{coſ.} \mu t + \frac{\lambda\mu\mu a m n}{4g(2\mu - \lambda)} \operatorname{coſ.} t(\mu - \lambda) - \frac{\lambda\mu\mu a m n}{4g(2\mu + \lambda)} \operatorname{coſ.} t(\mu + \lambda) \text{ et}$$

$$\vartheta = n' \operatorname{coſ.} \mu t - \frac{\lambda\mu\mu a m n'}{4g(2\mu - \lambda)} \operatorname{coſ.} t(\mu - \lambda) + \frac{\lambda\mu\mu a m n'}{4g(2\mu + \lambda)} \operatorname{coſ.} t(\mu + \lambda).$$

§. 33. Quo has formulas magis contrahamus, ponamus breuitatis gratia $\lambda\mu\mu\frac{a}{4g} = i$; tum igitur habebimus tam pro motu lancium quam iugi

$$\eta = n \operatorname{coſ.} \mu t + \frac{imn}{2\mu - \lambda} \operatorname{coſ.} t(\mu - \lambda) - \frac{imn}{2\mu + \lambda} \operatorname{coſ.} t(\mu + \lambda)$$

$$\vartheta = n' \operatorname{coſ.} \mu t - \frac{imn'}{2\mu - \lambda} \operatorname{coſ.} t(\mu - \lambda) + \frac{imn'}{2\mu + \lambda} \operatorname{coſ.} t(\mu + \lambda) \text{ et}$$

$$\omega = m \operatorname{coſ.} \lambda t$$

hinc-

hincque pro celeritatibus angularibus habebimus

$$\frac{d\eta}{dt} = -\mu n \,\text{ſin.}\, \mu t - \frac{(\mu - \lambda) i m n}{2\mu - \lambda} \,\text{ſin.}\, t(\mu - \lambda) + \frac{(\mu + \lambda) i m n}{2\mu + \lambda} \,\text{ſin.}\, t(\mu + \lambda)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\mu n' \,\text{ſin.}\, \mu t + \frac{(\mu - \lambda) i m n'}{2\mu - \lambda} \,\text{ſin.}\, t(\mu - \lambda) - \frac{(\mu + \lambda) i m n'}{2\mu + \lambda} \,\text{ſin.}\, t(\mu + \lambda)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\lambda m \lambda t.$$

§ 34. Hinc igitur patet, litteras $m$ $n$ et $n'$ deſignare maximas digreſſiones, ad quas tam iugum quam ambae lances a ſtatu aequilibrii diuagari posſunt, quod quidem de ipſo iugo omni rigore eſt verum. Pro lancibus autem vtique fieri poteſt, vt ob partes poſteriores maxima digreſſio fiat modo aliquanto maior modo minor quam $n$ et $n'$, quae irregularitas eo erit maior, quo maior fuerit motus iugi ſeu angulus $n$; tum vero etiam potiſſimum pendebit a numero $i$, qui eo erit maior, quo longius fuerit iugum, cuius ſemiſſis eſt $= a$; quam ob cauſam in minoribus bilancibus irregularitas talis minus percipi poterit.

§. 35. Quo indolem harum formularuum clarius illuſtremus, quoniam numerus $\mu = \sqrt{\frac{2g}{b}}$ plerumque multo maior eſt, quam $\lambda = \sqrt{\frac{2g}{f}}$, ſumamus exempli gratia $\lambda = 1$ et $\mu = 3$, vt tempus vnius oſcillationis iugi fiat $= \pi''$, lancium vero, quatenus motus eſt regularis $= \frac{\pi''}{3}$; tum igitur erit $i = \frac{9a}{4g}$, vbi $g$ eſt circiter 16 pedum anglicorum; vnde ſi eſſet $a = 2$ pedum, foret $i = \frac{9}{32}$. Sed vt calculus commodius reddatur, ſumamus $i = \frac{1}{4}$; tum vero angulos $m$, $n$ et $n'$ ponamus circiter 10 graduum,

ſeu in partibus radii $m = n = n' = \frac{1}{6}$, quibus valoribus ſubſtitutis noſtrae formulae erunt

$$\eta = \frac{1}{6}\,\text{coſ.}\,3\,t + \frac{1}{720}\,\text{coſ.}\,2\,t - \frac{1}{1008}\,\text{coſ.}\,4\,t$$

$$\vartheta = \frac{1}{6}\,\text{coſ.}\,3\,t - \frac{1}{720}\,\text{coſ.}\,2\,t + \frac{1}{1008}\,\text{coſ.}\,4\,t$$

$$\omega = \frac{1}{6}\,\text{coſ.}\,t$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,3\,t - \frac{1}{360}\,\text{ſin.}\,2\,t + \frac{1}{252}\,\text{ſin.}\,4\,t$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,3\,t + \frac{1}{360}\,\text{ſin.}\,2\,t - \frac{1}{252}\,\text{ſin.}\,4\,t$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{6}\,\text{ſin.}\,t.$$

§. 36. Quia tempus $t$ exprimitur in minutis ſecundis, hic autem vt angulus ſpectatur: patet, vnum minutum ſecundum aequiualere angulo 57° circiter. Vnde ſi ſtatum librae cum lancibus per interualla ſemi-minuti ſecundi examinare velimus, loco $t$ ſucceſſiue ſcribamus angulos 0°, 30°, 60°, 90°, 120 etc. et ad quoduis momentum ternos angulos $\omega$, $\eta$ et $\vartheta$ in ſequenti tabula referamus, vbi fractionem $\frac{1}{6}$ pro decem gradibus computemus, vnde fit $\frac{1}{720} = 5'$ et $\frac{1}{1008} = 3\frac{1}{2}''$

| $t$ | $\omega$ | $\eta$ | $\vartheta$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 10° 0′ | + 10° 1½′ | + 9° 58½′ |
| ½ | 8° 40′ | + 0° 4¼′ | − 0° 4¼′ |
| 1½ | 5° 0′ | − 10° ¾′ | − 9° 59¼′ |
| 2 | 0° 0′ | − 0° 8½′ | + 0° 8½′ |
| 2½ | − 5° 0′ | + 9° 59¾′ | + 10° ¾ |
| 3 | − 8° 40′ | + 0° 4¼′ | − 0° 4¼′ |
| 3½ | 10° 0′ | − 9° 58½′ | − 10° 1½′ |
| 4 | 8° 40′ | + 0° 4¼′ | − 0° 4¼′ |
| 4½ | 5° 0′ | + 9° 59¼′ | + 10° ¾′ |
| 5 | 0° 0′ | − 0° 8½′ | + 0° 8½ |
| 5½ | − 5° 0′ | − 10° ¾ | − 9° 59¼′ |
| 6 | − 8° 40′ | + 0° 4¼′ | − 0° 4¼′ |
| 6½ | 10° 0′ | + 10° 1½′ | + 9° 58½′. |

Ex hac autem tabula manifeſto apparet, irregularitatem motus lancium tam eſſe exiguam, vt in praxi vix percipi poſſe; neque enim vnquam numero $i$ maior valor tribui poſſe videtur.

§. 37. Cum igitur nullum plane veſtigium appareat, vnde tam mirabilia phaenomena in motu lancium oriri potuiſſent, dum ambae lances alternatim motum oſcillatorium concepiſſe, tum vero iterum conquieuiſſe perhibentur, fateri cogimur, a longe alia cauſa illud phaenomenon memoratum productum fuiſſe, ſiue ea in maioribus motibus ſit quaerenda, ſiue in eo, quod puncta A et B, vnde lances ſuſpenduntur, in eadem recta cum centro motus C ſita aſſumſimus. Neque tamen apparet, quomodo ex tantilla mutatione, quam in his punctis

 conci-

concipere licet, tam enorme diſcrimen oriri potuerit; praecipue cum methodus, qua hic ſumus vſi, nulli plane dubitationi locum relinquat.

§ 38. His omnibus accuratius perpenſis, haud difficulter perſpicere licet, a motu iugi ideo nullum motum oſcillatorium lancibus induci poſſe, quia eius extremitates A et B tantum verticaliter moventur, vnde etiam lancibus nullus motus obliquus imprimi poteſt. Vera ergo cauſa, cur calculus noſter a memoratis phaenomenis diſſideat, in eo eſt ſita, quod centrum motus C tanquam fixum ſpectauimus; ſtatim autem atque ipſum hoc punctum C aliquem motum horizontalem conciperet, etiam puncta A et B pari motu ferrentur, vnde vtique lances ad motum gyratorium concitari deberent. Haec autem circumſtantia manifeſto in libris locum habet, quippe quae non ex ipſo centro motus C, ſed ex puncto multo altiori, ſcilicet ex ſcapo ſeu trutina ſuſpendi ſolent; atque ex hoc iam perſpicuum eſt, a rudi illa impulſione, qua altera lanx concitata perhibetur toti librae circa iſtud punctum ſuſpenſionis motum fuiſſe impreſſum, ob quem vtique extremitates iugi A et B non tantum verticaliter, ſed etiam horizontaliter agitari debuerint, ita vt hoc motu poſteriori lances vtrique motum oſcillatorium accipere debuerint. Quin etiam hinc iam ratio perſpicitur, cur lances alternis vicibus modo quieuerint modo oſcillarint. Pleniorem autem caſus euolutionem alia occaſione accuratius pertractare conabor.

EXPLI-

# EXPLICATIO MOTVS OSCILLATORII MIRABILIS IN LIBRA MAIORE OBSERVATI.

Auctore

*L. EVLERO.*

§. 1.

Cum nuper in cauſam huius phaenomeni, quod illuſtris *Bernoullius* commemorat inquiſiſſem, et ſolum librae iugum circa ſuum centrum mobile aſſumſiſſem, luculenter demonſtraui, hinc motum iſtum mirabilem nullo modo oriri potuiſſe. Nullum igitur plane eſt dubium, quin cauſa iſtius phaenomeni in motu oſcillatorio totius librae ex ſcapo ſuſpenſae ſit quaerendum, quandoquidem talis motus a rudi illa concuſſione toti librae imprimi debuit. Quoniam igitur agitationes ſolius iugi vix quicquam in motu oſcillatorio lancium immutare valent, vti in ſuperiore diſſertatione oſtendi, hic iugum cum trutina firmiter connexum aſſumo, vt totum librae ſyſtema exceptis lancibus tanquam corpus rigidum ſpectari poſſit.

§. 2. Sit igitur O punctum ſuſpenſionis, circa quod tota libra eſt mobilis, per quod ducatur recta horizontalis $a O b$, tum vero etiam verticalis $O o$; Tab. III. Fig. 5.

 atque

atque elapſo poſt initium tempore $= t$, quod ſemper in minutis ſecundis exprimo, teneat corpus librae ſitum vtcunque inclinatum O A B, vbi A et B ſunt puncta ex quibus lances ſuſpenduntur; ita vt recta A B ſitu aequilibrii foret horizontalis, recta vero O C, ad eam perpendiculariter ducta, verticalis, in qua ergo dabitur centrum grauitatis totius librae G. Ductae concipiantur etiam rectae O A et O B, quae vocentur $OA = OB = a$, et anguli $OAB = OBA = \alpha$; ita vt ſit $OC = a$ ſin. $\alpha$ et $AC = BC = a$ coſ. $\alpha$: diſtantia autem centri grauitatis G a puncto ſuſpenſionis O ponatur $OG = c$. Praeterea ſit maſſa ſeu pondus totius librae, lancibus exceptis $= M$, eiusque momentum inertiae $Mkk$, ita vt $\frac{kk}{c}$ foret longitudo penduli ſimplicis iſochroni, ſi ſola libra circa punctum O oſcillaret. Ad commoditatem autem calculi vocemus inſuper $OC = e$ $= a$ ſin. $\alpha$ et $AC = BC = f = a$ coſ. $\alpha$. Denique lances vt pondera ſimplicia ex punctis A et B ſuſpenſa ſpectemus, quorum maſſa ſit $= L$; filorum autem longitudo $AP = BQ = b$.

§ 3. Praeſenti autem ſtatu ponatur declinatio librae ſeu angulus $GOo = \Phi$, eruntque anguli $AOa = \alpha - \Phi$ et $BOb = \alpha + \Phi$; vbi rectae $Aa$ et $Bb$ intelligendae ſunt verticales. Hinc igitur erit

$Aa = a$ ſin. $(\alpha - \Phi) = e$ coſ. $\Phi - f$ ſin. $\Phi$ et

$Oa = a$ coſ. $(\alpha - \Phi) = f$ coſ. $\Phi + e$ ſin. $\Phi$;

ex altera autem parte

$Bb = a$ ſin. $(\alpha + \Phi) = e$ coſ. $\Phi + f$ ſin. $\Phi$ et

$Ob = a$ coſ. $(\alpha + \Phi) = f$ coſ. $\Phi - e$ ſin. $\Phi$.

§. 4.

§. 4. Porro pro praeſenti ſtatu declinet altera lanx P a ſitu verticali angulo $PA\alpha = \eta$; altera vero lanx Q angulo $QB\beta = \vartheta$; vnde, ſi ex punctis P et Q verticales agantur $Pp$ et $Qq$, ob vtramque longitudinem $AP = BQ = b$ habebimus

$$ap = b\,\text{ſin.}\,\eta \text{ et } Pp = Aa + b\,\text{coſ}\,\eta = e\,\text{coſ.}\,\Phi - f\,\text{ſin.}\,\Phi + b\,\text{coſ.}\,\eta,$$

et ex altera parte

$$bq = b\,\text{ſin.}\,\vartheta \text{ et } Qq = Bb + b\,\text{coſ.}\,\vartheta = e\,\text{coſ.}\,\Phi + f\,\text{ſin.}\,\Phi + b\,\text{coſ.}\,\vartheta;$$

§. 5. Nunc pro motu determinando ſtatuantur pro binis punctis P et Q coordinatae orthogonales

$$Op = x = e\,\text{ſin.}\,\Phi + f\,\text{coſ.}\,\Phi + b\,\text{ſin.}\,\eta \text{ et}$$
$$Pp = y = e\,\text{coſ.}\,\Phi - f\,\text{ſin.}\,\Phi + b\,\text{coſ.}\,\eta;$$

et ex altera parte

$$Oq = x' = f\,\text{coſ.}\,\Phi - e\,\text{ſin.}\,\Phi - b\,\text{ſin.}\,\vartheta \text{ et}$$
$$Qq = y' = e\,\text{coſ.}\,\Phi + f\,\text{ſin.}\,\Phi + b\,\text{coſ.}\,\vartheta.$$

His poſitis ponatur tenſio fili $AP = P$ et fili $BQ = Q$; quibus lances P et Q propemodum ſurſum trahuntur, dum ob propriam grauitatem deorſum vrgentur vi $= L$. At tenſio P praebet vim directe ſurſum trahentem $= P\,\text{coſ.}\,\eta$, et vim horizontalem dextrorſum $= P\,\text{ſin.}\,\eta$: pro altera vero lance tenſio Q praebet vim verticalem ſurſum vrgentem $= Q\,\text{coſ.}\,\vartheta$ et horizontalem dextrorſum $= Q\,\text{ſin.}\,\vartheta$.

§. 6. Definitis iſtis viribus, quibus lances ſollicitantur, principia motus pro lance P ſuppeditant has duas aequationes:

$$\text{I. } \frac{ddx}{2g\,dt^2} = \frac{P\,\text{ſin.}\,\eta}{L} \text{ et II. } \frac{ddy}{2g\,dt^2} = \frac{L - P\,\text{coſ.}\,\eta}{L}$$

pro

pro altera autem lance Q habebimus has:

$$\text{III.}\ \frac{ddx'}{2g\,dt^2} = \frac{Q\,\text{ſin.}\,\vartheta}{L} \quad \text{et} \quad \text{IV.}\ \frac{ddy'}{2g\,dt^2} = \frac{L - Q\,\text{coſ.}\,\vartheta}{L}$$

atque ex his quatuor aequationibus motus vtriusque lancis determinari debet.

§. 7. Iam motum angularem ipſius librae aggrediamur; ac primo quidem momenta omnium virium quibus ſollicitatur reſpectu puncti ſuſpenſionis O colligi debent. Hic igitur primo occurrit proprium librae pondus M, quod in centro grauitatis G vnitum producit momentum $= M\,OG\,\text{ſin.}\,\Phi = Mc\,\text{ſin.}\,\Phi$. Deinde vero tenſio P momentum producit $= Pa\,\text{ſin.}\,OAP$. Eſt vero hic angulus $OAP = 90° + \alpha - \Phi + \eta$ cuius ſinus $= \text{coſ.}\,(\alpha - \Phi + \eta)$, ita vt hoc momentum ſit

$$Pa\,\text{coſ}\,(\alpha - \Phi + \eta) = P(f\,\text{coſ.}\,(\eta - \Phi) - e\,\text{ſin.}\,(\eta - \Phi)).$$

Quod momentum pariter ac primum tendit ad angulum $\Phi$ imminuendum. Ex altera parte tenſio Q momentum exerit $= Q.\,OB\,\text{ſin.}\,OBQ$: eſt vero angulus $OBQ = 90° + \alpha + \Phi - \vartheta$, cuius ſinus eſt $\text{coſ.}\,(\alpha + \Phi - \vartheta) = \text{coſ.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,(\Phi - \vartheta) - \text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,(\Phi - \vartheta)$ vnde iſtud momentum erit

$$Q.\,(f\,\text{coſ.}\,(\Phi - \vartheta) - e\,\text{ſin.}\,(\Phi - \vartheta)),$$

quod ad declinationem $\Phi$ augendam tendit. Hinc igitur per principia motus deducitur haec aequatio:

$$\text{V.}\ \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{Me\,\text{ſin.}\,\Phi - P(f\,\text{coſ.}\,(\eta - \Phi) - e\,\text{ſin.}\,(\eta - \Phi)) + Q(f\,\text{coſ.}\,(\Phi - \vartheta) - e\,\text{ſin.}\,(\Phi - \vartheta))}{Mkk}.$$

§. 8. Nunc igitur ternos noſtros angulos declinationis $\eta$, $\vartheta$ et $\Phi$ tanquam infinite paruos ſpectemus

ctemus, vt eorum coſinus vnitati, ſinus vero ipſis angulis aequales reputari queant; tum igitur erit

$$x = e\Phi + f + b\eta;\quad y = e - f\Phi + b$$
$$x' = f - e\Phi - b\vartheta;\quad y' = e + f\Phi + b$$

et nunc quinque noſtrae aequationes induent ſequentes formas:

I. $\frac{e\,dd\Phi + b\,dd\eta}{2g\,dt^2} = -\frac{P\eta}{L}$; II. $\frac{-f\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{P}{L}$

III. $\frac{-e\,dd\Phi - b\,dd\vartheta}{2g\,dt^2} = \frac{Q\vartheta}{L}$; IV. $\frac{+f\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{Q}{L}$

V. $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{Mc\Phi - P(f - e(\eta - \Phi)) + Q(f - e(\Phi - \vartheta))}{Mkk}$.

§. 9. Ex his aequationibus primo tenſiones P et Q definiri opportet, id quod commodiſſime fit ex aequatione ſecunda et quarta, vnde, quia membra priora $\frac{f\,dd\Phi}{2g\,dt^2}$ ſunt quaſi infinite parua erit $P = L$ et $Q = L$, qui valores proxime veri pro reliquis aequationibus ſufficiunt, ita vt nobis relinquantur tres ſequentes aequationes:

I. $\frac{e\,dd\Phi + b\,dd\eta}{2g\,dt^2} = -\eta$; III. $-\frac{e\,dd\Phi - b\,dd\vartheta}{2g\,dt^2} = \vartheta$ et

V. $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{Mc\Phi - 2Le\Phi + Le(\Phi + \vartheta)}{Mkk}$

hic ergo ternae noſtrae variabiles $\eta$, $\vartheta$ et $\Phi$ maxime inter ſe ſunt permixtae, ita vt non parum difficultatis in earum ſeparatione occurrat.

§. 10. Quoniam autem in his aequationibus ternae variabiles vbique vnicam dimenſionem habent, recurramus ad eam methodum, qua iam ſaepius optimo cum ſucceſſu ſum vſus, ſcilicet, conſtituatur

talis aequatio differentialis ſecundi gradus $\frac{ddz}{2gdt^2} = -\frac{z}{b}$, qua motus penduli ſimplicis longitudinis $= b$ exprimitur, ac ſtatuamus $\eta = Az$; $\vartheta = Bz$ et $\Phi = Cz$ fietque

$$\frac{dd\eta}{2gdt^2} = -\frac{Az}{b};\ \frac{dd\vartheta}{2gdt^2} = -\frac{Bz}{b} \text{ et } \frac{dd\Phi}{2gdt^2} = -\frac{Cz}{b},$$

quibus valoribus in noſtris aequationibus ſubſtitutis et littera $z$ per diuiſionem ſublata nanciſcimur ſequentes aequationes:

$$\text{I. } -\frac{Ce}{b} - \frac{Ab}{b} = -A;\ \text{III. } \frac{Ce}{b} + \frac{Bb}{b} = B$$

$$\text{V. } -\frac{C}{b} = -\frac{MCc - 2LCe + Le(A + B)}{Mkk}.$$

§. 11. Ex harum aequationum duabus prioribus ſtatim elicimus

$$A = \frac{-Ce}{b - b} \quad \text{et } B = \frac{-Ce}{b - b};$$

qui valores in quinta ſubſtituti praebent

$$-\frac{CMkk}{b} = -C(Mc + 2Le) - \frac{2CLee}{b - b}$$

quae reducitur ad hanc

$$+bb(Mc + 2Le) - b(Mbc + 2Lbe + 2Lee + Mkk) + Mbkk = 0$$

cuius binas radices ponamus breuitatis gratia eſſe vnam $b = p$ et alteram $b = q$, ita vt $p$ vel $q$ ſequenti forma ſit expreſſum.

$$\frac{\frac{1}{2}b(Mc + 2Le) + Lee + \frac{1}{2}Mkk}{Mc + 2Le}$$

$$\frac{\pm\sqrt{(\frac{1}{2}bb(Mc + 2Le)^2 + b(Mc + 2Le)Lee - \frac{1}{2}b(Mc + 2Le)Mkk + LLe^4 + LMeekk + \frac{1}{4}M^2k^4)}}{Mc + 2Le}.$$

§. 12. Cum igitur ſit $\frac{ddz}{2gdt^2} = -\frac{z}{b}$, erit vti conſtat

$$z = \text{ſin.}\left(\gamma + t\sqrt{\frac{2g}{b}}\right),$$ vnde

vnde quia prodit $A = B = \frac{Ce}{b - b}$ ſolutio ita ſe habebit:

$$\Phi = C\,\text{ſin.}\left(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}}\right) \text{ et } \eta = \vartheta = \frac{Ce}{b - b}\,\text{ſin.}\left(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}}\right).$$

Nunc autem ſi loco $b$ ſcribamus binos valores inventos $p$ et $q$, motus inde oriundos etiam coniungere licet, vt motus prodeat oſcillatorius ex binis ſimplicibus mixtus, qui vt fiat generalis, pro altero loco conſtantium C et $\gamma$ ſcribamus D et $\delta$; ſicque obtinebitur ſequens ſolutio generalior

$$\Phi = C\,\text{ſin.}\left(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{p}}\right) + D\,\text{ſin.}\left(\delta + t\sqrt{\tfrac{2g}{q}}\right) \text{ et}$$

$$\eta = \vartheta = \frac{Ce}{p - \gamma}\,\text{ſin.}\left(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{p}}\right) + \frac{De}{q - b}\,\text{ſin.}\left(\delta + t\sqrt{\tfrac{2g}{q}}\right).$$

§. 13. Quanquam autem ob quatuor conſtantes arbitrarios C, $\gamma$ et D, $\delta$ infinita varietas motuum, quos libra cum lancibus recipere poteſt, contineatur: tamen alia motuum genera non complectitur, niſi in quibus ambae lances aequali motu cientur. Haec igitur ſolutio neutiquam pro completa haberi poteſt; tamen vtique vſu venire poteſt vt ambae lances motu diuerſo agitentur, quemadmodum in phaenomeno obſeruato reuera accidit. Quin etiam ipſa analyſis declarat, hanc ſolutionem non eſſe generalem, ob id ipſum quod tantum quatuor conſtantes arbitrarias contineat. Quia enim tres habebamus aequationes differentiales ſecundi gradus, integratio completa adeo ſex quantitates arbitrarias inuoluere debet, ad quam eliciendam nouis artificiis erit opus; quod igitur negotium omni cura ſuſcipiamus.

 RESO-

## RESOLVTIO GENERALIS
### problematis propoſiti.

§. 14. Omni attentione igitur perpendamus tres aequationes differentiales ſecundi gradus, quibus ſolutio continetur

I. $\frac{e\,dd\Phi + b\,dd\eta}{2g\,a\,t^2} + \eta = 0$

III. $\frac{e\,dd\Phi + b\,dd\vartheta}{2g\,dt^2} + \vartheta = 0$

V. $\frac{Mkk\,dd\Phi}{2g\,dt^2} + (Mc + 2Le)\Phi - Le(\eta + \vartheta) = 0$

vbi, quia in duabus prioribus anguli $\eta$ et $\vartheta$ tantum permutantur, ſtatuamus $\eta = s + u$ et $\vartheta = s - u$, vt prodeat ſumma $\eta + \vartheta = 2s$ et $\eta - \vartheta = 2u$, vnde conficietur

I + III. $\frac{e\,dd\Phi + b\,dds}{2g\,dt^2} + s = 0$ et

I − III. $\frac{b\,ddu}{2g\,dt^2} + u = 0$

quae poſtrema aequatio, quia vnicam variabilem $u$ cum tempore $t$ inuoluit, ſtatim praebet integrale

$u = E\,\text{ſin.}\,(\varepsilon + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}})$;

quod in praecedente ſolutione erat praetermiſſum.

§. 15. Pro duabus reliquis aequationibus fiat vt ſupra $\Phi = Cz$ et $s = Az$ exiſtente

$\frac{ddz}{2g\,dt^2} = -\frac{z}{b}$ ideoque $z = \text{ſin.}\,(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}})$ eritque

$\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{Cz}{b}$ et $\frac{dds}{2g\,dt^2} = -\frac{Az}{b}$

quibus ſubſtitutis nanciſcemur ſequentes duas aequationes

$-\frac{Ce}{b} - \frac{Ab}{b} + A = 0$ et

$-\frac{CMkk}{b} + C(Mc + 2Le) - 2ALe = 0$

ex

ex quarum priore fit $A = \frac{Ce}{b - o}$. Sicque reſtabit haec vnica aequatio

$$-\frac{Mkk}{b} + Mc + 2Le - \frac{2Lee}{b - b} = 0.$$

§. 16. Quo hanc aequationem commodiorem reddamus, ponamus breuitatis gratia

$$\frac{Mkk}{Mc + 2Le} = m \text{ et } \frac{2Lee}{Mc + 2Le} = l$$

et noſtra aequatio hanc induet formam:

$$-\frac{m}{b} + 1 - \frac{l}{b - b} = 0$$

quae reducitur ad hanc formam quadraticam

$$bb - b(b + l + m) + bm = 0$$

cuius binae radices erunt

$$b = \tfrac{1}{2}(b + l + m) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(b + l + m)^2 - bm}$$

quae etiam ita exprimi poſſunt

$$b = \tfrac{1}{2}(b + l + m) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(l + m - b)^2 + bl}$$

vnde patet quantitatem poſt ſignum radicale poſitam ſemper eſſe poſitiuam, et quidem maiorem quam $\frac{1}{4}(l + m - b)^2$; quare ſi hanc radicem quadratam ponamus $= \frac{1}{2}(l + m - b) + \omega$, erunt bini valores ipſius $b$, quos iterum deſignemus literis $p$ et $q$ iſti

$$p = l + m + \omega \text{ et } q = b - \omega.$$

§. 17. Quod ſi iam iſtos valores inuentos retenta primo littera $b$ ſubſtituamus reperiemus hos valores

$$\Phi = C\,\text{ſin.}(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}}) \text{ et } s = \frac{Ce}{b - b}\,\text{ſin.}(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}}).$$

Erat vero $u = E\,\text{ſin.}(\varepsilon + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}})$ vnde porro colligimus

$$\eta = \frac{Ce}{b-b}\,\text{ſin.}(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}}) + E\,\text{ſin.}(\varepsilon + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}})$$

$$\vartheta = \frac{Ce}{b-b}\,\text{ſin.}(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}}) - E\,\text{ſin.}(\varepsilon + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}}).$$

§. 18. Hinc igitur ſolutionem completam obtinebimus, ſi loco $b$ ſucceſſiue ſcribamus tam $p$ quam $q$. et valores inde reſultantes in vnum ſummam colligamus. Dum autem pro $b$ ſcribimus $q$, loco conſtantium C et $\gamma$ ſcribamus D et $\delta$; quo facto ſolutio completa ita ſe habebit

$$\text{I.}\quad \Phi = C\,\text{ſin.}(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{p}}) + D\,\text{ſin.}(\delta + t\sqrt{\tfrac{2g}{q}})$$

$$\text{II.}\quad \eta = \frac{Ce}{p-b}\,\text{ſin.}(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{p}}) + \frac{De}{q-b}\,\text{ſin.}(\delta + t\sqrt{\tfrac{2g}{q}}) + E\,\text{ſin.}(\varepsilon + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}})$$

$$\text{III.}\quad \vartheta = \frac{Ce}{p-b}\,\text{ſin.}(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{p}}) + \frac{De}{q-b}\,\text{ſin.}(\delta + t\sqrt{\tfrac{2g}{q}}) - E\,\text{ſin.}(\varepsilon + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}})$$

quae formulae ſex conſtantes arbitrarias inuoluunt, ſcilicet C, $\gamma$; D, $\delta$; E, $\varepsilon$; in quo character veritatis conſpicitur.

§. 19. Ex his valoribus iam ſatis eſt perſpicuum, mirandum illud phaenomenon, quo ambae lances alternatim quieſcere et moueri ſunt obſeruatae, vtique euenire poſſe. Cum enim ambo anguli $\eta$ et $\vartheta$ talibus formulis definiantur $\eta = P + Q$ et $\vartheta = P - Q$, vbi literae P et Q cum tempore certo modo varientur, ſi eueniat vt quodam tempore fiat $Q = P$ angulus $\eta$ maximum obtineret valorem, $\vartheta$ vero ad nihilum redigeretur, vnde prior lanx notabilem habebit motum gyratorium, poſterior vero quaſi quieſcet. Deinceps vero veniet tempus quo erit $Q = -P$, ac tum prior lanx ad quietem redigetur, poſterior vero maximas peraget oſcillationes: quae viciſſitudo ſaepius occurret ſtatis temporibus, donec motus fuerit prorſus

ſus extinctus. Omnes autem circumſtantiae talis motus reciproci a conſtantibus arbitrariis pendebunt, ita vt etiam hic infinita varietas locum habere poſſit.

§. 20. Accuratius autem hanc ſolutionem perpendamus, ſimulque mutationem momentaneam ſingulorum angulorum $\phi$, $\eta$ et $\vartheta$ ſiue eorum celeritates angulares definiamus; quod, quo facilius fieri poſſit ponamus breuitatis gratia

$\sqrt{\frac{2g}{p}} = \mu$; $\sqrt{\frac{2g}{q}} = \nu$ et $\sqrt{\frac{2g}{b}} = \lambda$ vt habeamus

$$\phi = C \text{ ſin.} (\gamma + \mu t) + D \text{ ſin.} (\delta + \nu t)$$

$$\eta = \frac{Ce}{p-b} \text{ſin.} (\gamma + \mu t) + \frac{De}{q-b} \text{ſin.} (\delta + \nu t) + E \text{ſin.} (\varepsilon + \lambda t)$$

$$\vartheta = \frac{Ce}{p-b} \text{ſin.} (\gamma + \mu t) + \frac{De}{q-b} \text{ſin.} (\delta + \nu t) - E \text{ſin.} (\varepsilon + \lambda t)$$

vnde pro celeritatibus reperiemus

$$\frac{d\phi}{dt} = \mu C \text{coſ.} (\gamma + \mu t) + \nu D \text{coſ.} (\delta + \nu t)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\mu C e}{p-b} \text{coſ.} (\gamma + \mu t) + \frac{\nu D e}{q-b} \text{coſ.} (\delta + \nu t) + \lambda E \text{coſ.} (\varepsilon + \lambda t)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\mu C e}{p-b} \text{coſ.} (\gamma + \mu t) + \frac{\nu D e}{q-b} \text{coſ.} (\delta + \nu t) - \lambda E \text{coſ.} (\varepsilon + \lambda t).$$

§. 21. In talibus igitur librae agitationibus tres motus oſcillatorii ſimplices inter ſe permiſcentur, quorum primus reſpondet pendulo ſimplici longitudinis $= p$, quod ſingulas oſcillationes ſuas peraget tempore $= \frac{\pi}{\mu}$ min. ſec. Alter motus ſimplex reſpondet pendulo longitudinis $= q$, quod ſingulas oſcillationes peragit tempore $\frac{\pi}{\nu}$ ſec. tertius vero motus conuenit cum pendulo longitudinis $b$, quod ſingulas oſcillationes facit tempore $= \frac{\pi}{\lambda}$ ſec. Vbi quidem notandum, motum ipſius librae tantum ex duobus prioribus

ribus generibus componi, dum in lancibus omnes tres motus inter ſe permiſceri poſſunt, vnde ſine dubio maxima irregularitas in his motibus, atque adeo admirabilia phaenomena locum habere poſſunt.

§. 22. Quoniam ſex habemus conſtantes arbitrarias, ſolutionem noſtram ad omnes ſtatus initiales accommodare poterimus, quando ſcilicet pro tempore $t = 0$ tam ipſi anguli $\Phi$, $\eta$ et $\vartheta$ quam etiam eorum celeritates $\frac{d\Phi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ et $\frac{d\vartheta}{dt}$ vtcunque dantur; tum igitur jucundum erit ſingulos caſus per experimenta comprobare. Quia autem in hac ſolutione iugo librae peculiarem motum non tribuimus, ſi experimenta inſtituere voluerimus, ſcapum ſeu trutinam cum lingula ſeu examine firmiter connectere debemus. Tales igitur aliquos caſus pro ſtatu initiali dato euoluamus.

## EVOLVTIO CASVS

quo initio erat $\Phi = 0$; $\eta = \alpha$ et $\vartheta = 0$

$\frac{d\Phi}{dt} = 0$; $\frac{d\eta}{dt} = 0$ et $\frac{d\vartheta}{dt}$.

§. 23. Poſito igitur $t = 0$ ſequentibus ſex conditionibus erit ſatisfaciendum

I. $0 = C \text{ ſin. } \gamma + D \text{ ſin. } \delta$

II. $\alpha = \frac{Ce}{p-b} \text{ ſin. } \gamma + \frac{De}{q-b} \text{ ſin. } \delta + E \text{ ſin. } \varepsilon$

III. $0 = \frac{Ce}{p-b} \text{ ſin. } \gamma + \frac{De}{q-b} \text{ ſin. } \delta - E \text{ ſin. } \varepsilon$

IV. $0 = \mu C \text{ coſ. } \gamma + \nu D \text{ coſ. } \delta$

V. $0 = \frac{\mu Ce}{p-b} \text{ coſ } \gamma + \frac{\nu De}{q-b} \text{ coſ. } \delta + \lambda E \text{ coſ. } \varepsilon$

VI. $0 = \frac{\mu Ce}{p-b} \text{ coſ. } \gamma + \frac{\nu De}{q-b} \text{ coſ. } \delta - \lambda E \text{ coſ. } \varepsilon$.

§. 24

§. 24. Hic euidens eſt, tribus poſterioribus conditionibus ſatisfieri his tribus determinationibus:

$1^\circ.\ \gamma = 90;\ 2^\circ.\ \delta = 90;\ 3^\circ.\ \varepsilon = 90$

hincque tres priores aequationes euadent

I. $0 = C + D$

II. $\alpha = \frac{Ce}{p-b} + \frac{De}{q-b} + E$ et

III. $0 = \frac{Ce}{p-b} + \frac{De}{q-b} - E$

ex quarum prima fit $D = -C$. Deinde, quia II + III dat

$$\alpha = \frac{2Ce}{p-b} + \frac{2De}{q-b} = \frac{2Ce}{p-b} - \frac{2Ce}{q-b}$$

inde fit $\alpha(p-b)(q-b) = 2Ce(q-p)$
vnde colligitur

$$C = \frac{\alpha(p-b)(q-b)}{2e(q-p)} \text{ et } D = -\frac{\alpha(p-b)(q-b)}{2e(q-b)}$$

Denique ob II − III ſeu $\alpha = 2E$ erit $E = \frac{1}{2}\alpha$.

§. 25. Si igitur pro $\frac{\alpha(p-b)(q-b)}{2e(q-p)}$ ſcribamus C, pro motu ſecuturo habebimus ſex ſequentes determinationes:

I. $\Phi = C \operatorname{coſ.} \mu t - C \operatorname{coſ.} \nu t$

II. $\eta = \frac{Ce}{p-b} \operatorname{coſ.} \mu t - \frac{Ce}{q-b} \operatorname{coſ.} \nu t + \frac{1}{2}\alpha \operatorname{coſ.} \lambda t$

III. $\vartheta = \frac{Ce}{p-b} \operatorname{coſ.} \mu t - \frac{Ce}{q-b} \operatorname{coſ.} \nu t - \frac{1}{2} \operatorname{coſ.} \lambda t$

IV. $\frac{d\Phi}{dt} = -\mu C \operatorname{ſin.} \mu t + \nu C \operatorname{ſin.} \nu t$

V. $\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\mu Ce}{p-b} \operatorname{ſin.} \mu t + \frac{\nu Ce}{q-b} \operatorname{ſin.} \nu t - \frac{1}{2}\alpha\lambda \operatorname{ſin.} \lambda t$

VI. $\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\mu Ce}{p-b} \operatorname{ſin.} \mu t + \frac{\nu Ce}{q-b} \operatorname{ſin.} \nu t + \frac{1}{2}\alpha\lambda \operatorname{ſin.} \lambda t$

vnde ad quoduis tempus $t$ tam ſtatus librae cum

 lanci-

lancibus, quam ſinguli motus angulares definiri poterunt.

§. 26. Ponimus exempli gratia $b = 4$, $l = 3$ et $m = 1$, fietque $p = 6$ et $q = 2$; tum vero ſumamus $e = 2$, eritque

$$\mu = \sqrt{\tfrac{g}{3}};\ \nu = \sqrt{g};\ \lambda = \sqrt{\tfrac{g}{2}} \text{ et } C = \tfrac{\alpha}{4}.$$

Pro hoc ergo caſu determinationes noſtrae erunt

I. $\Phi = \frac{1}{4}\alpha \operatorname{coſ.} t\sqrt{\tfrac{g}{3}} - \frac{1}{4}\alpha \operatorname{coſ.} t\sqrt{g}$

II. $\eta = \frac{1}{4}\alpha \operatorname{coſ.} t\sqrt{\tfrac{g}{3}} + \frac{1}{4}\alpha \operatorname{coſ.} t\sqrt{g} + \frac{1}{2}\alpha \operatorname{coſ.} t\sqrt{\tfrac{g}{2}}$

III. $\vartheta = \frac{1}{4}\alpha \operatorname{coſ.} t\sqrt{\tfrac{g}{3}} + \frac{1}{4}\alpha \operatorname{coſ.} t\sqrt{g} - \frac{1}{2}\alpha \operatorname{coſ.} t\sqrt{\tfrac{g}{2}}$

IV. $\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{4}\alpha\sqrt{\tfrac{g}{3}} \operatorname{ſin.} t\sqrt{\tfrac{g}{3}} + \frac{1}{4}\alpha\sqrt{g} \operatorname{ſin.} t\sqrt{g}$

V. $\frac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{4}\alpha\sqrt{\tfrac{g}{3}} \operatorname{ſin.} t\sqrt{\tfrac{g}{3}} - \frac{1}{4}\alpha\sqrt{g} \operatorname{ſin} t\sqrt{g} - \frac{1}{2}\alpha\sqrt{\tfrac{g}{2}} \operatorname{ſin.} t\sqrt{\tfrac{g}{2}}$

VI. $\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{1}{4}\alpha\sqrt{\tfrac{g}{3}} \operatorname{ſin.} t\sqrt{\tfrac{g}{3}} - \frac{1}{4}\alpha\sqrt{g} \operatorname{ſin.} t\sqrt{g} + \frac{1}{2}\alpha\sqrt{\tfrac{g}{2}} \operatorname{ſin.} t\sqrt{\tfrac{g}{2}}$.

## EVOLVTIO CASVS quo initio erat

$$\Phi = \alpha;\ \eta = 0;\ \vartheta = 0$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0;\ \frac{d\eta}{dt} = 0;\ \frac{d\vartheta}{dt} = 0.$$

§. 27. Quia hic iterum tres celeritates ſunt nullae, habebimus vt ante $\gamma = \delta = \varepsilon = 90$, vnde tres priores conditiones dant

I. $\alpha = C + D$

II. $0 = \frac{Ce}{p-b} + \frac{De}{q-b} + E$

III. $0 = \frac{Ce}{p-b} + \frac{De}{q-b} - E$.

Quia nunc II - III dat $0 = 2E$ erit $E = 0$; tum vero

vero erit ex II$^{dae}$ $D = -\frac{C(q-b)}{p-b}$, qui valor in prima ſubſtitutus praebet

$$\alpha = C - \frac{C(q-b)}{p-b} = \frac{C(p-q)}{p-b}, \text{ ideoque } C = \frac{\alpha(p-b)}{p-q} \text{ et}$$

$$D = -\alpha\frac{q-b}{p-q},$$

ſicque formulae noſtrae fient

$$\text{I. } \Phi = \frac{\alpha(p-b)}{p-q}\,\text{coſ.}\,\mu\, t - \frac{\alpha(q-b)}{p-q}\,\text{coſ.}\,\nu\, t$$

$$\text{II. } \eta = \frac{\alpha e}{p-q}\,\text{coſ.}\,\mu\, t - \frac{\alpha e}{p-q}\,\text{coſ.}\,\nu\, t$$

$$\text{III. } \vartheta = \frac{\alpha e}{p-q}\,\text{coſ.}\,\mu\, t - \frac{\alpha e}{p-q}\,\text{coſ.}\,\nu\, t$$

ex quibus celeritates angulares facile deducuntur.

§. 28. Hoc igitur caſu quia $\eta = \vartheta$ ambae lances eundem motum oſcillatorium recipient, quemadmodum in noſtra prima ſolutione particulari vſu venit. Hoc igitur caſu tam motus librae ipſius quam vtriusque lancis ex duplici motu ſimplici erit compoſitus, qui hic neceſſario certo quodam modo coniunctus deprehenditur; ita vt iſte motus modo magis modo minus fiat irregularis: prouti tempora oſcillationum vtriusque generis plus vel minus a ſe inuicem diſcrepabunt. Superfluum autem foret plures huiusmodi caſus euoluere, cum iam ſatis ſuperque ſit demonſtratum, motus illos mirabiles, vtcunque primo aſpectui inextricabiles videantur, cum noſtra theoria ex primis mechanicae principiis deducta perfectiſſime conuenire.

# DE
# MOTV TVRBINATORIO CHORDARVM MVSICARVM;
## VBI SIMVL VNIVERSA THEORIA TAM AEQVILIBRII QVAM MOTVS CORPORVM FLEXIBILIVM SIMVLQVE ETIAM ELASTICORVM BREVITER EXPLICATVR.

Auctore

*L. EVLERO.*

§. 1.

Etſi Geometrae in chordis infinitam motus varietatem num quidem agnouerunt, atque adeo felici cum ſucceſſu determinauerunt: omnes tamen iſtos motus perpetuo in eodem plano fieri aſſumſerunt, ita vt non ſolum tota chorda quouis momento in eodem plano ſit ſita, ſed etiam ſingula eius puncta per lineas rectas in eodem plano motum ſuum peragant. Fieri autem vtique poteſt, vt chorda quouis momento non tota in eodem plano reperiatur, neque etiam ſingula eius puncta in directum moueantur, ſed per lineas curuas vtcunque circa axem reuoluantur, cuiusmodi motum adeo in chordis craſſioribus oculis percipere licet. Talem igitur motum hic *turbinatorium* vocabo, eiusque ſymptomata ex primis motus principiis determinabo; vbi quidem commo-

commode eueniet, vt omnes huius generis motus, quantumuis abſtruſi et complicati videantur, aeque facile definiri queant atque ii, qui in eodem plano abſoluuntur. Quin etiam veritas principii *Bernoulliani* hinc elucebit: dum etiam omnes iſti motus ex pluribus ſimplicibus compoſiti deprehenduntur, ita vt hoc principium adhuc multo latius pateat quam Illuſtriſſ. Inuentor illud extendit.

§. 2. Etiamſi autem prima motus principia ſtatim ad hos caſus euoluendos applicari queant, quatenus ſcilicet omnes iſtiusmodi motus tanquam infinite parui ſpectantur: tamen plurimum ad augmentum ſcientiae conferet, ſi quaeſtionem in latiori ſenſu accipiamus, atque in genere, primo quidem in ſtatum aequilibrii fili perfecte flexilis, quod a viribus quibuscunque in ſingulis elementis ſollicitetur inquiramus, hincque deinceps formulas pro eius motu quocunque eliciamus, quemadmodum haec inveſtigatio pro caſu quo totum filum perpetuo in eodem plano verſatur duplici modo a me iam dudum eſt praeſtitum. Hic autem iſtud problema multo latius ſum extenſurus, vt etiam ad fila non in eodem plano conſtituta, ſimulque ad vires quascunque non in eodem plano agentes, pateat; quod quidem a nemine adhuc, quantum mihi conſtat, eſt factum.

## Problema generale prius.

*Si filo perfecte flexili in ſingulis elementis vires quaecunque fuerint applicatae, determinare ſtatum aequilibrii, in quo iſtud filum conquieſcet.*

 Solutio.

## Solutio.

Tab. IV. Fig. 1. §. 3. Quoniam igitur neque filum neque vires ſollicitantes in eodem verſantur plano, conſtituamus ternos axes fixos O A, O B et O C inter ſe normales, quorum duo priores O A et O B in plano tabulae iaceant, tertius vero O C ad eos ſit perpendicularis. Sit iam Z punctum quodcunque fili E Z z F, vnde primo ad planum tabulae demittatur perpendiculum Z Y, tum vero ex Y ad axem O A agatur normalis, et vocentur pro iſto fili puncto Z ternae coordinatae $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$. Tum vero ſit elementum fili $Zz = ds$, eritque $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, atque omnes vires, quibus hoc elementum ſollicitatur, reſoluantur ſecundum directiones trium axium noſtrorum fixorum: ſitque vis ſecundum directionem Z P axi O A parallelam agens $= P\,ds$; deinde vis ſecundum directionem Z Q axi O B parallelam agens $= Q\,ds$; ac tertio vis ſecundum directionem Z R axi O C parallelam agens $= R\,ds$. Sicque erit ſumma omnium virium elementarium portioni fili E Z applicatarum $= \int P\,ds$; ſimilique modo ſumma omnium virium elementarium $Q\,ds = \int Q\,ds$, viriumque elementarium $R\,ds$ ſumma $= \int R\,ds$.

§. 4. Cum nunc totum filum ſit in aequilibrio, ſimulque perfecte flexile, neceſſe eſt vt omnia harum virium momenta, quae filum E Z circa punctum Z gyrari conarentur ſe mutuo deſtruant. Quare, cum filum in omnes plagas gyrari poſſit, notum

notum eſt, omnes iſtos motus gyratorios etiam ad ternos axes Z P, Z Q, Z R reduci poſſe, ac pro ſtatu aequilibrii ſufficere, vt ſingula momenta reſpectu cuiusque horum axium ſe deſtruant. Conſideremus ergo primo axem Z P; eiusque reſpectu tantum vires $Q\,ds$ et $R\,ds$ momenta producere valent; ad quae inuenienda, ſi ratiocinium eodem modo inſtituatur, vti in caſu pro eodem plano feci, totum momentum ex viribus $Q\,ds$ reſultans erit $\int dz \int Q\,ds$: momentum vero ex viribus $R\,ds$ reſultans erit $\int dy \int R\,ds$. Haec autem momenta, vti ſtatum figurae attente perpendenti facile patebit, in plagas contrarias ſunt directa, vnde pro ſtatu aequilibrii requiritur vt ſit $\int dz \int Q\,ds = \int dy \int R\,ds$. Eodem modo, vt momenta reſpectu axis Z Q ſe deſtruant, neceſſe eſt vt ſit $\int dz \int P\,ds = \int dx \int R\,ds$. Ac denique deſtructio momentorum reſpectu tertii axis Z R poſtulabit hanc aequationem: $\int dx \int Q\,ds = \int dy \int P\,ds$; quibus colligendis ſtatus aequilibrii tres ſequentes poſtulat conditiones:

I. $\int dz \int Q\,ds = \int dy \int R\,ds$; II. $\int dz \int P\,ds = \int dx \int R\,ds$
III. $\int dx \int Q\,ds = \int dy \int P\,ds$.

§. 5. Praeterea vero pro noſtro inſtituto imprimis etiam neceſſe eſt, vt tenſionem, qua filum noſtrum in puncto Z tenditur cognoſcamus. Quam quaeſtionem ſi eodem modo tractemus, quo pro caſu in eodem plano ſumus vſi, facile perſpiciemus, totam tenſionem per ſequentem formulam exprimi debere:

$$\frac{dx}{ds}\int P\,ds + \frac{dy}{ds}\int Q\,ds + \frac{dz}{ds}\int R\,ds$$

hic

Hic quidem noſtram figuram iam ſatis lineis et litteris onuſtam nolui pluribus lineis ducendis magis perplexam reddere: ſed potius conducet eam diſſertationem, qua conſenſum geminae methodi pro ſtatu aequilibrii corporum flexibilium adhibitae demonſtraui, debita attentione perlegere: hoc enim modo facile erit, omnia ratiocinia, quibus ibi ſum vſus ad praeſentem caſum accommodare. Quin etiam haud difficulter noſtra ſolutio ad fila vtcunque elaſtica extendi poterit, quod, etiamſi non ad praeſens inſtitutum noſtrum pertineat: tamen maxime dignum videtur, vt hic breuiter doceatur.

§. 6. Quando ſcilicet noſtro filo elaſticitas quaecunque tribuitur, non amplius illa momenta virium, quae pro ſingulis axibus ZP, ZQ et ZR inuenimus, nihilo aequalia ſunt ſtatuenda, ſed vi elaſticae, qua filum inflexioni circa quemque horum axium reſiſtit aequari debebit. Hunc in finem pro axe ZP conſideretur fili EZ proiectio in planum QZR facta, quod ſcilicet axi ZP erit normale; eiusque quaeratur curuatura in puncto Z, quippe cui elaſticitas proportionalis erit cenſenda. Quia igitur indoles huius proiectionis per binas coordinatas $y$ et $z$ exprimitur, erit radius oſculi in puncto Z,

$$= \frac{(dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\,ddz - dz\,ddy},$$

cui, cum curuatura ſit reciproce proportionalis, pro inflexione circa axem ZP habebimus huiusmodi aequationem:

$\int dz$

$$\int dz \int Q\,ds - \int dy \int R\,ds = \frac{D(dy\,ddz - dz\,ddy)}{(dy^2 - dz^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ſimilique modo pro binis reliquis axibus habebimus tales aequationes:

$$\int dz \int P\,ds - \int dx \int R\,ds = \frac{E(dx\,ddz - dz\,ddx)}{(dx^2 - dz^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ et}$$

$$\int dx \int Q\,ds - \int dy \int P\,ds = \frac{F(dy\,ddx - dx\,ddy)}{(dy^2 - dx^2)^{\frac{1}{2}}}$$

vbi litterae D, E, F exprimunt vires elaſticas abſolutas, quibus filum cuique inflexioni reluctatur; quae ergo litterae tam quantitates variabiles quam conſtantes denotare poſſunt, ſi quidem filum non vbique habeat eundem elaſticitatis gradum. Hoc igitur modo quaſi praeter opinionem iſtud argumentum de ſtatu aequilibrii filorum tam perfecte flexibilium quam elaſticorum ad ſummum perfectionis gradum perduximus.

## Problema generale alterum.

*Si filo perfecte flexili in ſingulis elementis vires quaecunquae fuerint applicatae, determinare motum, quem iſtud filum, vtcunque fuerit impulſum, deinceps proſequetur.*

## Solutio.

§. 7. Maneant omnia vti in praecedente problemate ſunt conſtituta, vbi $P\,ds$, $Q\,ds$ et $R\,ds$

referunt omnes vires elementares ſingulis fili elementis applicatas, et quomodocunque hoc filum initio fuerit ad motum concitatum, elapſo tempore $t$ habeat ſitum in figura repraeſentatum. Quo poſito ſi longitudo fili indefinita E Z ponatur $= s$, euidens eſt ternas coordinatas $x$, $y$ et $z$ puncto Z reſpondentes vt functiones ſpectari debere binarum variabilium $s$ et $t$. Porro quemcunque motum elementum $Zz$ habuerit, eum reſolui conueniet ſecundum ternas directiones Z P, Z Q et Z R: ac tum celeritas ſecundum Z P erit $= (\frac{dx}{dt})$, et celeritates pro duabus reliquis directionibus Z Q et Z R erunt ſimili modo

$(\frac{dy}{dt})$ et $(\frac{dz}{dt})$ vnde deducuntur accelerationes

$$(\frac{ddx}{dt^2}), \quad (\frac{ddy}{dt^2}) \quad \text{et} \quad (\frac{ddz}{dt^2}),$$

ad quas producendas requiruntur vires acceleratrices ſecundum easdem directiones Z P, Z Q et Z R quae, denotante $g$ altitudinem lapſus in vno minuto ſecundo, erunt

$$\frac{1}{2g}(\frac{ddx}{dt^2}); \quad \frac{1}{2g}(\frac{ddy}{dt^2}); \quad \frac{1}{2g}(\frac{ddz}{dt^2}).$$

§. 8 Quod ſi iam maſſula elementi $Zz = ds$ deſignetur $= S\,ds$, vbi S vel eſt quantitas conſtans, ſi ſcilicet filum fuerit vbique aeque craſſum, vel quantitas variabilis, et quidem functio quaepiam ipſius $s$ tantum, ſi craſſities fili fuerit variabilis, vires motrices quibus elementum $Zz$ ſecundum easdem directiones ſollicitari debet erunt

$$\frac{S\,ds}{2g}(\frac{ddx}{dt^2}), \quad \frac{S\,ds}{2g}(\frac{ddy}{dt^2}) \quad \text{et} \quad \frac{S\,ds}{2g}(\frac{ddz}{dt^2}),$$

quam

quam ob rem neceſſe eſt, vt iſtae vires motrices producuntur a viribus ſupra memoratis, quibus totum filum actu vrgeri ponimus, ita, vt ſumma omnium illarum virium aequiualens eſſe debeat ſummae iſtarum. Cum autem, ſi corpori cuicunque duplicis generis vires fuerint applicatae, quae ſibi aequiualeant, manifeſtum eſt, ſi vires vnius generis corpori modo contrario applicentur, tum corpus fore in aequilibrio. Hoc igitur principio vtentes noſtro filo in ſingulis elementis vires illas motrices ſecundum directiones contrarias applicemus, quod fiet ſi loco litterarum P, Q et R ſcribamus iſtas, P', Q' et R', exiſtentibus

$$P' = P - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right);\ Q' = Q - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right);\ R' = R - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

hocque modo totum filum in aequilibrio erit conſtitutum.

§. 9. His igitur notatis pro motu quaeſito noſtri fili habebimus ſequentes tres aequationes

I. $\int dz \int Q' ds = \int dy \int R' ds$

II. $\int dz \int P' ds = \int dx \int R' ds$

III. $\int dx \int Q' ds = \int dy \int P' ds.$

Praeterea vero ſi tenſio fili ponatur $= T$, erit etiam pro hoc caſu

$$T = \left(\frac{dx}{ds}\right)\int P' ds + \left(\frac{dy}{ds}\right)\int Q' ds + \left(\frac{dz}{ds}\right)\int R' ds$$

ſicque omnia quae ad motum filorum perfecte flexibilium pertinent ſuccincte hic ſunt comprehenſa.

§. 10. Quin etiam, ſi filum non fuerit perfecte flexile, ſed inflexioni circa ternos axes vtcun-

 que

que reluctetur, maneant vt ante elaſticitates abſolutae circa hos axes, litteris D, E, F expreſſae, ſiue eae ſint conſtantes ſiue vtcunque variabiles a ſola ſcilicet variabili $s$ pendentes, et formulae pro motu erunt

$$\int dz \int Q' ds - \int dy \int R' ds = \frac{D(dyddz - dzddy)}{(dy^2 - dz^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int dz \int P' ds - \int dx \int R' ds = \frac{E(dxddz - dzddx)}{(dx^2 - dz^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int dx \int Q' ds - \int dy \int P' ds = \frac{F(dyddx - dxddy)}{(dy^2 - dx^2)^{\frac{3}{2}}}$$

vbi quidem monendum eſt, cuique radio oſculi id ſignum $\pm$ tribui oportere, prout vires ſollicitantes poſtulant. Atque hoc modo vniuerſa theoria de aequilibrio et motu filorum tam perfecte flexibilium quum elaſticorum, quae quidem adhuc deſiderabatur, ad ſummum perfectionis gradum eſt euecta.

§. 11. Mirum hic merito videtur, quod iſtae ſolutiones tribus aequationibus contineantur, dum in eodem plano totum negotium vnica aequatione conficitur. Cum enim hic tres occurrunt coordinatae $x$, $y$, $z$, dum in eodem plano duae tantum adſunt, plus vna aequatione inſuper adiicienda non opus eſt ad ſolutionem determinandam. At ſi rem accuratius perpendamus, facile reperiemus, tres aequationes inventas ita a ſe inuicem pendere, vt quaelibet in duabus reliquis iam contineatur, ita vt reuera tota ſo-

lutio

lutio tantum duabus conſiſtat aequationibus: ad quod oſtendendum ternas aequationes inuentas differentiemus atque ſequente ordine diſponamus

I. $dy\int P\,ds - dx\int Q\,ds = 0$

II. $dz\int Q\,ds - dy\int R\,ds = 0$

III. $dx\int R\,ds - dz\int P\,ds = 0$

atque iam euidens eſt, ſi prima multiplicetur per $dz$, ſecunda per $dx$, ac tertia per $dy$, tum productorum iſtorum ſummam fore

$$\text{I}\,dz + \text{II}\,dx + \text{III}\,dy = 0$$

ſicque manifeſtum eſt, quamlibet harum aequationum iam in duabus reliquis contineri, ita vt tota ſolutio duabus tantum aequationibus abſoluatur, quemadmodum rei natura poſtulat.

§. 12. Quodſi autem hoc idem criterium ad ternas aequationes noſtras pro filis elaſticis datas accommodemus, id neutiquam locum habere reperiemus. Quare, cum iſtud criterium in ipſa rei natura ſit fundatum, recte concludimus, in illis vitium quoddam latere, neque effectum vis elaſticae ita ſecundum ternas noſtras directiones reſolui poſſe, vti fecimus, dum pro quolibet plano tantum curuaturam proiectionis verae curuae ſumus contemplati. Neque vero etiam theoria elaſticitatis in huiusmodi filis ita eſt explorata, vt hypotheſis qua ſumus vſi certis principiis inniti cenſeri queat; quin potius cogimur eam penitus reiicere atque in veram conſtitutionem ſuperiorum aequationum accuratius in-

 quirere;

quirere. Quae inueſtigatio, cum non parum ardua videatur, maximum ſubſidium nobis ſuppeditabit illud ipſum criterium, quod iam nouimus in illis aequationibus locum habere debere.

## Emendatio formularum tam pro aequilibrio quam motu filorum elaſticorum datarum.

Tab. IV. Fig. 2. §. 13. Hic igitur ante omnia ad veram curvaturam quae filo in M inducitur eſt reſpiciendum, vbi imprimis planum, in quo duo elementa proxima fili erunt ſita conſiderare debemus, quandoquidem duo elementa non in directum poſita certum planum determinant, in quo ſitus erit radius oſculi; tum autem diſpiciendum erit, ſubquonam angulo iſtud planum ad terna noſtra plana principalia A O B, A O C et B O C ſit inclinatum. Primum igitur attendamus ad verum radium oſculi, qui curuaturam fili in puncto M metitur, et qui per analyſin non parum taedioſam ſequenti formula expreſſus reperitur:

$$\frac{ds^3}{\sqrt{(dyddx-dxddy)^2+(dzddy-dyddz)^2+(dxddz-dzddx)^2}}$$

cuius formulae denominator ſi breuitatis gratia ponatur $=\omega$, coſinus angulorum, ſub quibus planum curuaturae ad terna plana principalia inclinatur erunt

Pro plano A O B coſinus $=\frac{dyddx-dxddy}{\omega}$

Pro plano B O C coſinus $=\frac{dzddy-dyddz}{\omega}$

Pro plano A O C coſinus $=\frac{dxddz-dzddx}{\omega}$

quo-

quorum coſinuum quadrata in vnam ſummam collecta faciunt vnitatem, vti natura rei poſtulat.

§. 14. Quod ſi iam fili, dum ad inuentam curuaturam cogitur, elaſticitas abſoluta deſignetur littera G, ita vt elaſticitas qua huic inflexioni reluctatur ſit G, denotante $r$ ipſum radium oſculi, tum ternae aequationes pro aequilibrio noſtri fili elaſtici erunt ſequentes, quas ergo in locum earum quae ſupra ſunt datae ſubſtitui oportebit

$$\text{I. } \int dy \int P\,ds - \int dx \int Q\,ds = \frac{G(dy\,ddx - dx\,ddy)}{ds^3},$$

$$\text{II. } \int dz \int Q\,ds - \int dy \int R\,ds = \frac{G(dz\,ddy - dy\,ddz)}{ds^3},$$

$$\text{III. } \int dx \int R\,ds - \int dz \int P\,ds = \frac{G(dx\,ddz - dz\,ddx)}{ds^3}.$$

Pro motu autem tantum opus eſt loco litterarum P, Q, R ſcribi P′, Q′, R′. Quod autem ad tenſionem fili attinet, ſi T denotet vim qua punctum M ſecundum tangentem verſus E tenditur, ea erit

$$T = -\left(\frac{dx}{ds}\right)\int P\,ds - \left(\frac{dy}{ds}\right)\int Q\,ds - \left(\frac{dz}{ds}\right)\int R\,ds$$

vbi iterum loco P, Q, R, ſcribendo P′, Q′, R′ tenſio in ſtatu motus obtinetur.

§. 15. Quo autem certiores fiamus, has formulas recte ſe habere, eas ſecundum criterium ſupra datum examinemus; hunc infinem eas differentiemus et obtinebimus ſequentes tres aequationes

$$\text{I. } dy \int P\,ds - dx \int Q\,ds = \frac{G(dy\,d^3x - dx\,d^3y)}{ds^3} - \frac{3G\,dds(dy\,ddx - dx\,ddy)}{ds^4}$$

$$\text{II. } dz \int Q\,ds - dy \int R\,ds = \frac{G(dz\,d^3y - dy\,d^3z)}{ds^3} - \frac{3G\,dds(dz\,ddy - dy\,ddz)}{ds^4}$$

$$\text{III. } dx \int R\,ds - dz \int P\,ds = \frac{G(dx\,d^3z - dz\,d^3x)}{ds^3} - \frac{3G\,dds(dx\,ddz - dz\,ddx)}{ds^4}.$$

Quod

Quod ſi iam prima ducatur in $dz$, ſecunda in $dx$ et tertia in $dy$, et producta in vnam ſummam colligantur, tam ex parte ſiniſtra quam dextra omnia membra ſe mutuo deſtruere deprehenduntur. Hoc igitur criterium, quoniam locum non eſſet habiturum, ſi vllae aliae formulae in loco dextro collocarentur, nobis firmiſſimum praebet documentum, formulas noſtras iam veritati prorſus eſſe conſentaneas, etiamſi fortaſſe difficile fuerit rationem harum formularum a priori perſpicere.

## Applicatio horum principiorum ad chordas motu turbinatorio agitatas.

§. 16. Sit igitur propoſita chorda E F in punctis E et F fixa, cuius longitudo ſit $EF = a$; chorda autem ipſa eius ſit generis, cuius ſi longitudo $= b$ pondus ſeu maſſa ſit B; ita vt noſtrae chordae maſſa ſit $\frac{Ba}{b}$. Tum vero corda haec tenſa ſit a vi $ET = T$, cui ergo tenſio chordae in puncto E erit aequalis. Iam quicunque motus chordae initio fuerit impreſſus, elapſo tempore $= t$ chorda figuram habeat E Z F, vtcunque extra planum tabulae exiſtens, cuius ſumta portione quacunque $EZ = s$, ex puncto Z in planum tabulae demittatur perpendiculum Z Y, hincque ad axem E F ducatur normalis Y X, et curua per omnia puncta Y ducta erit proiectio chordae in planum tabulae facta; at ex X erigatur perpendiculum $XV = YZ$, eritque punctum V in proiectione ad planum, quod per

per lineam E F plano tabulae perpendiculariter inſiſtit, facta; tum vero pro puncto Z vocentur ternae coordinatae $EX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, eritque etiam $XV = z$, ita vt $x$ et $y$ ſint coordinatae pro proiectione E Y F, atque $x$ et $z$ coordinatae pro proiectione E V F. Vbi notetur, quemadmodum ex ipſa chordae figura E Z F dantur binae proiectiones E Y F et E V F, ita viciſſim ex binis proiectionibus veram chordae figuram E Z F determinari, ſicque ad quoduis tempus ſufficiet vtramque proiectionem aſſignaſſe.

§. 17. Nunc quia calculum noſtrum expedire non licet, niſi pro oſcillationibus quam minimis, binae coordinatae $y$ et $z$ tanquam infinite paruae ſunt ſpectandae, vtut refragari videatur. Hinc ergo, quia etiam differentialia $dy$ et $dz$ prae $dx$ quaſi euaneſcunt, elementum chordae erit $ds = dx$, atque adeo abſciſſa $EX = x$ ipſi arcui $EZ = s$ aequalis eſt cenſenda. Quoniam hanc chordam vbique eiusdem craſſitiei aſſumimus erit elementi $ds$ maſſula $= \frac{B\,ds}{b}$, quae cum ſupra deſignata fuerit per $S\,ds$ erit hic $S = \frac{B}{b}$. Praeterea vero hic quoque, quia ab ipſa grauitate chordae mentem abſtrahere conuenit, ternae illae vires P, Q, R erunt nullae: interim tamen formula $\int P\,ds$, quoniam omnes vires ſecundum directionem E F ſollicitantes deſignat, tenſionem in ſe complectitur, quae, quia in partem contrariam vergit, erit $\int P\,ds = -T$; bina autem reliqua integralia $\int Q\,ds$ et $\int R\,ds$ reuera erunt ni-

hilo aequalia. Quod autem ad accelerationes attinet, quoniam durante motu punctum Z eandem perpetuo ſeruat diſtantiam a puncto E, pro eo abſciſſa $EX = x$ conſtans manebit, vnde erit $(\frac{ddx}{dt^2}) = 0$ tum vero etiam $(\frac{ddx}{ds^2}) = 0$, quod inde patet, quod ſit $dx = ds$, ideoque $\frac{dx}{ds} = 1$, conſequenter $(\frac{ddx}{ds^2}) = 0$. Sicque ſolae vires acceleratrices ſecundum binas reliquas directiones $y$ et $z$ relinquuntur, ex quibus pro motu noſtrae chordae colligimus

$$P' = 0;\ Q' = -\frac{B}{2bg}(\frac{ddy}{dt^2}) \text{ et } R' = -\frac{B}{2bg}(\frac{ddz}{dt^2})$$

quibus valoribus ſubſtitutis ſequentes impetrabimus aequationes ex §. 11. ſi modo loco P, Q, R intelligantur P', Q', R'

$$\text{I. } -T\,dy + \frac{B}{2bg}ds\int ds(\frac{ddy}{dt^2}) = 0$$

$$\text{II. } -\frac{B}{2bg}dz\int ds(\frac{ddy}{dt^2}) + \frac{B}{2bg}dy\int ds(\frac{ddz}{dt^2}) = 0$$

$$\text{III. } -\frac{B}{2bg}ds\int ds(\frac{ddz}{dt^2}) + T\,dz = 0$$

quarum ſufficit ſumſiſſe primam ac tertiam, ſiquidem ſecunda in his iam continetur; atque hinc ob $dx = ds$ binas ſequentes nanciſcimur aequationes:

$$\frac{2Tbg}{B}\frac{dy}{ds} = \int ds(\frac{ddy}{dt^2}) \text{ et}$$

$$\frac{2Tbg}{B}\frac{dz}{ds} = \int ds(\frac{ddz}{dt^2}).$$

§. 18. Ponamus nunc breuitatis gratia coëfficientem conſtantem $\frac{2Tbg}{B} = cc$, vt habeamus iſtas aequationes:

$$\frac{ccdy}{ds} = \int ds(\frac{ddy}{dt^2}) \text{ et } \frac{ccdz}{ds} = \int ds(\frac{ddz}{dt^2})$$

quae

quae denuo differentiatae per $ds$ diuidendo largiuntur nobis has aequationes

$$cc\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) \text{ et } cc\left(\frac{ddz}{ds^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

in quibus determinatio omnium plane motuum quos chorda recipere valet continetur. Vtraque autem earum eandem reſolutionem admittit, quam pro motu chordae in eodem plano dedimus. Atque hic manifeſtum eſt determinationem binarum variabilium $y$ et $z$ a ſe inuicem neutiquam pendere, ita vt vtraque ſeorſim ſine vllo reſpectu ad alterum habito definiri queat; quae circumſtantia ſine dubio maximi eſt momenti, dum omnes motus turbinatorios aeque facile definire licebit, atque eos qui in eodem plano abſoluuntur.

§. 19. Antequam autem ſolutionem generalem tradamus, haud incongruum erit, omnes motus regulares et ſimplices euoluere, qui in noſtram chordam cadere poſſunt, et quoniam reſolutio pro vtraque plane eſt eadem, ſufficiet calculum pro altera inſtituiſſe. Sit igitur $f$ longitudo penduli ſimplicis, cuius motui variationes ipſius $y$ reſpondent, eritque vti conſtat $\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{y}{f}$, quae bis integrata praebet $y = E \text{ ſin.} (\alpha + t\sqrt{\frac{2g}{f}})$, vbi, quia arcus $s$ pro conſtante eſt habitus, is quomodocunque in conſtante E contineri poterit. Cum autem ſit $\frac{ddy}{dt^2} = -\frac{2gy}{f}$ erit etiam

$$cc\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) = -\frac{2gy}{f}; \text{ erat autem}$$

$$cc = \frac{2Tbg}{B}, \text{ vnde fit } \frac{ddy}{ds^2} = -\frac{By}{Tbf}.$$

 Poſito

Poſito igitur

$$\frac{Tbf}{B} = ee, \text{ vt habeamus } \frac{ddy}{ds^2} = -\frac{y}{ee}$$

eritque integrale completum

$$y = F \text{ ſin.} (\beta + \tfrac{s}{e}),$$

vbi littera F ob tempus $t$ hic conſtans ſumtum tanquam functio ipſius $t$ ſpectari poteſt. Quare vt ambae expreſſiones ad identitatem reuocentur ſumamus

$$E = C \text{ ſin.} (\beta + \tfrac{s}{e}) \text{ et } F = C \text{ ſin.} (\alpha + t\sqrt{\tfrac{2g}{f}})$$

eritque ex binis valoribus coniunctis

$$y = C \text{ ſin.} (\alpha + t\sqrt{\tfrac{2g}{f}}) \text{ ſin.} (\beta + \tfrac{s}{e}).$$

§. 20. Hac aequatione integrali inuenta eam ad caſum noſtrae chordae accommodemus; ac primo quidem neceſſe eſt, vt poſito $s = 0$, hoc eſt in termino E fiat pro omni tempore $y = 0$, cui ergo aequationi vt ſatisfiat ſtatui opportet $\beta = 0$. Porro vero etiam in altero termino F vbi $s = a$ ſemper eſſe opportet $y = 0$, vnde fieri neceſſe eſt ſin. $\frac{a}{e} = 0$, id quod infinitis modis euenire poteſt, ſcilicet ſi $\frac{e}{a} = i\pi$, denotante $i$ numerum integrum quemcunque, vnde colligimus $e = \frac{a}{i\pi}$. Erat vero $e = \sqrt{\frac{Tbf}{B}}$ quocirca hinc colligitur longitudo penduli ſimplicis $f = \frac{Baa}{ii\pi\pi Tb}$, hinc erit $\sqrt{\frac{2g}{f}} = \frac{i\pi}{a}\sqrt{\frac{2Tbg}{B}} = \frac{i\pi c}{a}$, quibus valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra erit

$$y = C \text{ ſin.} (\alpha + \tfrac{i\pi c}{a} t) \text{ ſin.} \tfrac{i\pi s}{a}.$$

§. 20. Primo initio ergo vbi erat $t = 0$ habebimus $y = C$ ſin. $\alpha$ ſin. $\frac{i\pi s}{a}$, quare ſi hinc elabatur

tantum

tantum tempus $t$, vt ſit $\frac{i\pi ct}{a} = 2\pi$ ideoque $t = \frac{2a}{ic}$, tum chorda in priſtinum ſtatum reſtituitur, hocque tempore chorda binas vibrationes peregiſſe cenſetur, vnde ſequitur tempus vnius $= \frac{a}{ic}$ in minutis ſecundis expreſſum; vnde patet, eandem chordam innumerabiles motus regulares recipere poſſe, dum ſcilicet loco $i$ omnes numeri integri ſubſtituuntur. Numerus autem vibrationum, quas chorda ſingulis minutis ſecundis edet erit $= \frac{ic}{a}$, qui ergo numerus ſonum muſicum deſignat. Sicque eadem chorda innumerabiles ſonos edere valet, inter quos maxime eminet fundamentalis, caſui $i = 1$ reſpondens, qui ergo erit $= \frac{c}{a}$: reliqui vero ſoni his numeris exprimentur $\frac{2c}{a}$, $\frac{3c}{a}$, $\frac{4c}{a}$, $\frac{5a}{a}$, quemadmodum quidem iam inuulgus conſtat.

§. 22. Pari prorſus modo pro eodem tempore $t$ eademque abſciſſae $x$ reperitur, altera ordinata

$$z = C' \text{ſin.} \left(\alpha' + \frac{i'\pi ct}{a}\right) \text{ſin.} \frac{i'\pi s}{a}$$

pro qua tempus vnius vibrationis erit $\frac{a}{i'c}$, et ſonus inde oriundus $= \frac{i'c}{a}$; ſicque vtraque ordinata $y$ et $z$ ſeorſim motu regulari cietur. Ex ambabus autem coniunctis naſcetur duplex ſonus, ſiquidem numeri $i$ et $i'$ fuerint inaequales, quorum alter altero praeualebit, prouti coëfficientes C et C' plus vel minus a ſe inuicem diſcrepant. At ſi ambo numeri $i$ et $i'$ fuerint aequales ſonus tantum ſimplex audietur, qui erit $= \frac{ic}{a}$, ex quo hic motus chordae etiam merito pro ſimplici haberi poteſt, circa quem ſequentia

 notaſſe

notaſſe iuuabit. 1°. Si praeter $i' = i$ etiam fuerit $\alpha' = \alpha$ erit $y : z = C : C'$, hoc eſt vbique in eadem ratione; vnde patet ſingula chordae puncta $z$ per lineas rectas moueri, totumque chordae motum in eodem plano ad tabulam ſub certo angulo inclinato fieri, eumque idcirco non eſſe turbinatorium 2°. At ſi praeter $i' = i$ fuerit $C' = C$, ſed anguli $\alpha$ et $\alpha'$ differant angulo recto, ita vt ſit

$$\text{ſin.}\,(\alpha' + \tfrac{i'\pi c}{a}t) = \text{coſ.}\,(\alpha + \tfrac{i\pi c}{a}t)$$

tum erit $yy + zz$ quantitas conſtans. Vnde patet, hoc caſu omnia chordae puncta in circulis circa axem E F reuolui, ac tempus vnius reuolutionis fore $= \frac{2ic}{a}$. 3°. Sin autem tam coëfficientes C et C' quam anguli $\alpha$ et $\alpha'$ fuerint inaequales, manente $i' = i$, tum ſingula chordae puncta in ellipſibus circa axem E F reuoluentur. His igitur duobus poſterioribus caſibus motus reuera erit turbinatorius, et quia ſonus inde tantum ſimplex oritur recte inter motus ſimplices refertur 4°. Verum ſi etiam numeri $i$ et $i'$ fuerint inaequales, ita vt ſimul duo ſoni generentur, tum ſingula chordae puncta in aliis lineis curuis circa axem A M reuoluentur, quae pro inaequalitate horum numerorum magis minusue erunt complicatae, et ad altiores gradus linearum pertinebunt.

§. 23. Tribuamus nunc numeris $i$ et $i'$ ſucceſſiue omnes valores 1, 2, 3, 4, 5 quos recipere poſſunt, et quia omnes formulae inde oriundae quomodocunque inter ſe coniungi poſſunt obtinebimus pro

pro vtraque ordinata $y$ et $z$ ſequentes valores generales

$$y = A\,\text{ſin.}\left(\alpha + \tfrac{\pi c}{a}t\right)\text{ſin.}\tfrac{\pi s}{a} + B\,\text{ſin.}\left(\beta + \tfrac{2\pi c}{a}t\right)\text{ſin.}\tfrac{2\pi s}{a}$$
$$+ C\,\text{ſin.}\left(\gamma + \tfrac{3\pi c}{a}t\right)\text{ſin.}\tfrac{3\pi s}{a} + D\,\text{ſin.}\left(\delta + \tfrac{4\pi c}{a}t\right)\text{ſin.}\tfrac{4\pi s}{a}\ \text{etc.}$$

et

$$z = A'\,\text{ſin.}\left(\alpha' + \tfrac{\pi c}{a}t\right)\text{ſin.}\tfrac{\pi s}{a} + B'\,\text{ſin.}\left(\beta' + \tfrac{2\pi c}{a}t\right)\text{ſin.}\tfrac{2\pi s}{a}$$
$$+ C'\,\text{ſin.}\left(\gamma' + \tfrac{3\pi c}{a}t\right)\text{ſin.}\tfrac{3\pi s}{a} + D'\,\text{ſin.}\left(\delta' + \tfrac{4\pi c}{a}t\right)\text{ſin.}\tfrac{4\pi s}{a}\ \text{etc.}$$

Cum igitur hic duplo plures occurrant conſtantes arbitrariae, quam ſi motus fieret in eodem plano, etiam multo maior multiplicitas motus locum habere poteſt, quam in eodem plano; inde autem perpetuo orientur ſoni ex pluribus ſimplicibus mixti, prorſus vt Celeberr. *Bernoullius* in motibus qui in eodem plano peraguntur obſeruauit; hinc igitur eius theoria maxime ingenioſa infinities ampliorem extenſionem adipiſcitur, dum ſimul etiam ad omnes plane motus turbinatorios accommodari poteſt.

## Conſtructio generalis quibus chordae concitari poſſunt.

§. 24. Quanquam formulae pro binis ordinatis $y$ et $z$ ſupra datae, ſi quidem in infinitum continuentur, omnes plane motus poſſibiles in ſe complecti cenſeri queant: tamen inde neutiquam eos caſus reſoluere licet, quibus chordae initio tam figura quam motus quicunque fuerit impreſſus. Pro his igitur caſibus omnino neceſſe eſt, vt integralia completa

pleta binarum illarum aequationum differentio-diffe-rentialium ſcilicet

$$\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = c\,c\left(\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right) \text{ et } \left(\frac{d\,d\,z}{d\,t^2}\right) = c\,c\left(\frac{d\,d\,z}{d\,s^2}\right).$$

exhibeantur, id quod per functiones arbitrarias perinde praeſtari poteſt, ac pro motibus in eodem plano eſt factum. Denotent igitur characteres $\Gamma$ et $\Delta$ functiones quascunque quantitatum ipſis ſubiunctarum atque habebimus ſequentes determinationes

$$y = \Gamma:(c\,t+s) - \Gamma:(c\,t-s) \text{ et } z = \Delta:(c\,t+s) - \Delta:(c\,t-s)$$

vbi iſtae functiones per lineas curuas quascunque ſiue continuas ſiue vtcunque pro arbitrio ductas repraeſentari poſſunt, dummodo per continuam replicationem ſuper axe ita continuentur, vt omnibus abſciſſis interuallo $= 2\,a$ a ſe inuicem diſcrepantibus vbique aequales reſpondeant applicatae. Hoc modo pro vtraque functione liberum nobis relinquitur, ſuper axe cuius longitudo $= 2\,a$ lineam quamcunque deſcribere, dummodo applicatae in vtroque termino fuerint inter ſe aequales; quae conditio ideo eſt neceſſaria, vt, ſi ſuper eodem axe continuato eaedem curuae replicentur, eae inter ſe cohaereant. Praeterea vero etiam in deſcriptione harum curuarum cauendum eſt, ne vsquam earum tangentes ad axem fiant normales, vel adeo in antecedentia vergant.

§. 25. His circa iſtas functiones praenotatis manifeſtum eſt, ſi tempus $t$ augeatur portione $\frac{2\,a}{c}$, ita vt loco $c\,t$ ſcribendum ſit $c\,t + 2\,a$, tum vtramque quantitatem $y$ et $z$ priſtinum valorem eſſe recupe-

cuperaturam, ita vt perpetuo poſt tempus $= \frac{2a}{c}$ tota chorda in eundem ſtatum reuertatur. Quia igitur interea duas vibrationes peregiſſe eſt cenſenda, patet, cuiusque vibrationis tempus ſore $= \frac{a}{c}$, vti ſupra iam inuenimus. Fieri quidem poteſt, vt hoc tempus euadat vel duplo vel triplo vel vtcunque aliquoties minus, quando ſcilicet ambae functiones ita fuerint comparatae, vt non ſolum pro abſciſſis interuallo $= 2a$ diſtantibus easdem ordinatas referant, ſed eaedem iam reuertantur poſt interualla minora $\frac{2a}{2}$, $\frac{2a}{3}$, $\frac{2a}{4}$, $\frac{2a}{5}$ etc. Hocque modo intelligitur, quemadmodum eadem chorda ad plures ſonos diuerſos edendos concitari poſſit, qui autem ſemper ſecundum numeros 1, 2, 3, 4, 5 etc. progrediuntur, omnino vti praecedens euolutio declarauit.

§. 26. Imprimis autem hic operae pretium erit, eam chordae figuram, quam poſt tempus $\frac{a}{c}$ accipiet inueſtigare, quem in finem loco $ct$ ſcribamus $ct + a$; tum autem ponamus ordinatas noſtras euadere $y'$ et $z'$ eritque

$$y' = \Gamma:(ct + a + s) - \Gamma:(ct + a - s) \text{ et}$$
$$z' = \Delta:(ct + a + s) - \Delta:(ct + a - s).$$

Quia autem per conditionem generalem eſt

$$\Gamma:(ct + a + s) = \Gamma:(ct - a + s) = \Gamma:(ct - (a - s))$$

ſimilique modo

$$\Delta:(ct + a + s) = \Delta:(ct - (a - s)) \text{ fiet}$$
$$y' = \Gamma:(ct - (a - s) - \Gamma:(ct + (a - s)) \text{ et}$$
$$z' = \Delta:(ct - (a - s)) - \Delta:(ct + (a - s))$$

 Quod

Quod ſi autem hi valores negatiue capiantur, perfecte conuenient cum iis, quae caſu priore abſciſſae $a - s$ reſpondebant. Vnde intelligimus, perpetuo elapſo tempore $= \frac{a}{c}$ chordam recepturam eſſe figuram priori aequalem, ſed contrario modo deſcriptam. Tab. IV. Fig. 3. Ita ſi nunc figura chordae fuerit E M N F, elapſo tempore $= \frac{a}{c}$, quo vna vibratio contigiſſe cenſetur, eius figura erit F $m\,n\,e$ priori ſcilicet aequalis, ſed duplici modo inuerſa: non ſolum enim ad alteram axis partem cadit, ſed etiam, quae figura termino E reſpondebat nunc termino F reſpondebit. Hanc igitur ob cauſam pro toto chordae motu determinando ſufficiet, omnes figuras aſſignaſſe, quas ab initio vsque ad tempus $t = \frac{a}{c}$ recipiet, quoniam poſt hoc tempus priſtinae figurae ſiue ſitu inuerſo ſiue directo recurrent.

Tab. IV. Fig. 4. §. 27. Ad hanc igitur conſtructionem faciliſſime expediendam in quopiam axe capiantur portiones D E, E F, F G, G H etc. longitudini chordae $= a$ aequales, et ſuper binis D E F conſtituatur pro lubitu curua quaecunque $d\,q\,t\,f$, cuius applicatae extremae D $d$, F $f$ ſint inter ſe aequales. Tum vero eadem figura ſuper ſequente axis portione F, G, H repetatur; ob rationes autem modo expoſitas vna repetitio ſufficere poteſt. Tum enim pro tempore quocunque elapſo $= t$ (quod ſemper minus eſſe poteſt quam $\frac{2a}{c}$) a puncto E abſcindatur ſpatium E F $= ct$, et a puncto T vtrinque reſcindantur interualla T P

et

et $TQ = x$, atque in punctis P et Q ducantur applicatae $Pp$ et $Qq$, quarum differentia $Pp - Qq$ dabit alterutram ordinatam $y$ vel $z$: pro vtraque enim duplex huiusmodi ſcala pro lubitu conſtitui poteſt. Nihil quoque refert, quantumuis amplae hae ſcalae conſtituantur; ſi enim differentiae inter binas applicatas $Pp$ et $Qq$ nimis fiant magnae, eas per numerum ſatis grandem diuidi conueniet, quo ordinatae $y$ et $z$ intra iuſtos terminos contineantur: vt ſcilicet excurſiones chordae pro minimis haberi queant.

§. 28. Talibus igitur binis ſcalis pro lubitu delineatis, ex vna proiectio chordae in planum tabulae facta E Y F (fig. 1.) ex altera vero proiectio in plano perpendiculari facta E V F (fig. 2.) conſtruetur; ex quibus coniunctis vera chordae figura ad tempus propoſitum innoteſcet. Hinc igitur ſimul figura chordae initialis deriuari poteſt; vbi quidem haud difficulter perſpicitur, eandem figuram initialem innumeris modis ex binis ſcalis reſultare poſſe: quaecunque enim forma vni ſemiſſi $ef$ tribuatur, ſemper altera ſemiſſis $ed$ ita deſcribi poteſt, vt inde data figura initialis conficiatur. Vnde patet, ſemper has geminas ſcalas ita formari poſſe, vt inde non ſolum data figura chordae initialis, ſed etiam motus qui ſingulis eius punctis imprimi potuerit obtineatur, prorſus vti circa motus chordae in eodem plano factos fuſius oſtendi. Quemadmodum enim omnes chordae figurae in binas proiectiones

 reſolui

reſolui poſſunt, ita etiam eius motus per reſolutionem in binas iſtas proiectiones transferri poteſt.

## SVPPLEMENTVM

### continens analyſin, pro incuruatione fili in ſingulis punctis inuenienda.

Tab. IV. Fig. 5. §. 29. Conſideretur fili elementum quodcunque $Zz$, pro cuius terminis $Z$ et $z$ ſint vt ſupra ternae coordinatae

$$OX = x,\ XY = y \text{ et } YZ = z;\ Ox = x + dx,$$
$$xy = y + dy \text{ et } yz = z + dz.$$

In plano autem tabulae ſit elementum

$$Yy = du = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

cuius in plano tabulae ducantur tangentes proximae $YT$ et $yt$, quibus ipſius fili tangentes $ZT$ et $zt$ occurrant in punctis $T$ et $t$. Quo facto binae iſtae tangentes $ZT$ et $zt$ definient planum, in quo bina fili elementa proxima incuruantur; vnde elementum $tT$ productum deſignabit interſectionem plani iſtius cum plano tabulae. Quare ſi ex $Y$ in hanc rectam demittatur perpendiculum $YS$, iungaturque recta $ZS$, angulus $ZSY$ metietur inclinationem vtriusque plani; tum vero bina fili elementa proxima a ſe inuicem declinabunt angulo $TZt$, qui ſi vocetur $= d\omega$, erit radius oſculi in puncto $Z = \frac{ds}{d\omega}$.

§. 30. Nunc primo ad poſitionem tangentium $YT$ et $yt$ in plano tabulae inueniendam ſit angulus

XYT

$XYT = \Phi$, ita vt ſit tang $\Phi = \frac{dx}{dy}$, eiusque differentiale $d.\Phi$ exprimet angl. $TYt$ Porro quia recta $ZT$ tangit filum in puncto $Z$, erit $YT$ ſubtangens $= \frac{zdu}{dz}$; ipſa vero tangens $ZT = \frac{zds}{dz}$. Hinc igitur pro ſitu proximo erit

$$yt = \frac{zdu}{dz} + d.\frac{zdu}{dz} = \frac{zdu}{dz} + du + zd.\frac{du}{dz},$$

vnde fit

$$Yt = \frac{zdu}{dz} + zd.\frac{du}{dz};$$

Eodem modo erit tangens proxima

$$zt = \frac{zds}{dz} + d.\frac{zds}{dz} = \frac{zds}{dz} + ds + zd.\frac{ds}{dz},$$

vnde fit

$$Zt = \frac{zds}{dz} + zd.\frac{ds}{dz}.$$

Quare ſi in plano tabulae ex $T$ in $Yt$ agatur normalis $Tu$, erit

$$tu = zd.\frac{du}{dz};$$

ſimilique modo ſi ex $T$ in tangentem $Zt$ agatur normalis $Tv$, erit

$$vt = zd.\frac{ds}{dz}.$$

At vero ad hanc normalem $Tv$ ducendum, cum iam ducta ſit $Tu$ in $Yt$, ex hoc puncto $u$ demitti debet in $Zt$ perpendiculum $uv$, vt habeatur triangulum $Tuv$ ad $u$ rectangulum, ex quo colligetur

$$Tv^2 = Tu^2 + uv^2.$$

§. 31. Vt haec elementa facilius inueniri queant, ſtatuamus

$dx = p\,dz$ et $dy = q\,dz$, eritque

$du = dz\sqrt{pp+qq}$ et $ds = dz\sqrt{1+pp+qq}$.

His poſitis in plano tabulae habebimus

$$YT = z\sqrt{pp+qq},$$

et cum ſit tang. $\Phi = \frac{p}{q}$, erit angulus elementaris

$$TYt = d\Phi = \frac{q\,dp - p\,dq}{pp+qq},$$

vnde fit lineola

$$Tu = \frac{z(q\,dp - p\,dq)}{\sqrt{pp+qq}};$$

Tum vero erit

$$tu = \frac{z(p\,dp + q\,dq)}{\sqrt{pp+qq}};$$

hincque colligitur ſpatiolum

$$Tt = z\sqrt{dp^2 + dq^2}.$$

Nunc quia triangulum $Ttu$ ſimile eſt triangulo YTS ob

$$YT = z\sqrt{pp+qq}$$

reperietur perpendiculum

$$YS = \frac{z(q\,dp - p\,dq)}{\sqrt{dp^2+dq^2}}.$$

§. 32. Nunc ad elementa extra planum tabulae geminas flectamus acies: et quia eſt

$$ZT = z\sqrt{1+pp+qq},$$

eius-

eiusque incrementum

$$v t = \frac{z(p\,dp + q\,dq)}{\sqrt{1 + pp + qq}};$$

Quoniam iam inuenimus

$$T t = z \sqrt{dp^2 + dq^2},$$

ex triangulo rectangulo $T v t$ erit

$$T v = z \sqrt{\frac{dp^2 + dq^2 + (q\,dp - p\,dq)^2}{1 + pp + qq}}.$$

Hinc igitur cum radius oſculi noſtri fili pro elemento $Z z$, quem vocemus $= r$ ſit $r = \frac{ds}{d\omega}$, hic vero ſit $d\omega = \frac{Tv}{ZT}$, erit $r = \frac{ZT.ds}{Tv}$; vnde valoribus ſubſtitutis colligimus

$$r = \frac{dz(1 + pp + qq)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + (q\,dp - p\,dq)^2}}.$$

§. 33. Vt autem ipſum planum in quo ſit iſta fili incuruatio, quod ſimpliciter planum curuaturae vocemus, accuratius cognoſcamus, iam nouimus, eius interſectionem cum plano tabulae eſſe rectam $t T S$, ad quam ſi ex $S$ perpendicularis ducatur $Z S$, triangula $t T v$ et $T Z S$ manifeſto ſunt ſimilia, vnde fiet $T t : T v = T Z : Z S$, hincque

$$Z S = \frac{Tv.TZ}{Tt} = \frac{z\sqrt{dp^2 + dq^2 + (q\,dp - p\,dq)^2}}{\sqrt{dp^2 + dq^2}};$$

Ante autem iam inuenimus rectam

$$Y S = \frac{z(q\,dp - p\,dq)}{\sqrt{dp^2 + dq^2}};$$

quare ſi $\vartheta$ denotet inclinationem plani curuaturae

ad

ad planum tabulae, quia vt vidimus eſt $\vartheta = ZSY$, erit

$$\cos. \vartheta = \frac{YS}{ZS} = \frac{q\,dp - p\,dq}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + (q\,dp - p\,dq)^2}}.$$

§. 34. Nunc igitur tantum ſupereſt, vt loco litterarum $p$ et $q$ aſſumtos valores

$$p = \frac{dx}{dz} \quad \text{et} \quad q = \frac{dy}{dz}$$

reſtituamus: atque ſi nullum horum differentialium pro conſtante aſſumamus habebimus

$$1^\circ.\ dp = \frac{dz\,ddx - dx\,ddz}{dz^2} \quad 2^\circ.\ dq = \frac{dz\,ddy - dy\,ddz}{dz^2}.$$

Tum vero quia eſt $\frac{p}{q} = \frac{dx}{dy}$

erit differentiando

$$\frac{q\,dp - p\,dq}{qq} = \frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dy^2},$$

hincque

$$q\,dp - p\,dq = \frac{(dy\,ddx - dx\,ddy)}{dz^2};$$

quibus valoribus ſubſtitutis obtinebimus

$$\sqrt{\frac{dz^2}{1 + pp + qq}} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dz}} = \frac{ds}{dz}$$

atque

$$\sqrt{dp^2 + dq^2 + (q\,dp - p\,dq)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{(dz\,ddx - dx\,ddz)^2 + (dz\,ddy - dy\,ddz)^2 + (dy\,ddx - dx\,ddy)^2}}{dz^2}$$

ex quibus conficitur radius oſculi

$$r = \frac{ds^3}{\sqrt{(dz\,ddx - dx\,ddz)^2 + (dz\,ddy - dy\,ddz)^2 + (dy\,ddx - dx\,ddy)^2}}$$

quae expreſſio prorſus congruit cum ea, quae ſupra fuit allata. Vbi adhuc notandum eſt, iſtam formulam

Iam pro radio oſculi ope cuiusdam artificii alibi explicandi ad hanc ſimpliciorem reduci poſſe:

$$r = \frac{d\,s^2}{\sqrt{(d\,d\,x^2 + d\,d\,y^2 + d\,d\,z^2 - d\,d\,s^2)}}$$

At vero pro inclinatione plani curuaturae ad planum tabulae, quod ſupra ſecundum axes principales O A, O B, O C per angulum A O B deſignauimus, eius coſinus hinc colligitur

$$= \frac{d\,y\,d\,d\,x - d\,x\,d\,d\,y}{\sqrt{((d\,z\,d\,d\,x - d\,x\,d\,d\,z)^2 + (d\,z\,d\,d\,y - d\,y\,d\,d\,z)^2 + (d\,y\,d\,d\,x - d\,x\,d\,d\,y)^2)}}$$

hincque per analogiam eiusdem plani curuaturae inclinationis ad planum B O C coſinus erit

$$= \frac{d\,z\,d\,d\,y - d\,y\,d\,d\,z}{\sqrt{((d\,z\,d\,d\,x - d\,x\,d\,d\,z)^2 + (d\,z\,d\,d\,y - d\,y\,d\,d\,z)^2 + (d\,y\,d\,d\,x - d\,x\,d\,d\,y)^2)}}$$

ac denique inclinationis ad planum C O A coſinus erit

$$\frac{d\,x\,d\,d\,z - d\,z\,d\,d\,x}{\sqrt{((d\,z\,d\,d\,x - d\,x\,d\,d\,z)^2 + (d\,z\,d\,d\,y - d\,y\,d\,d\,z)^2 + (d\,y\,d\,d\,x - d\,x\,d\,d\,y)^2)}}$$

qui coſinus etiam conueniunt cum ſupra allegatis.

§. 35. Caeterum hic nefas eſſet praetermittere inſigne ſubſidium, quo etiam vis elaſtica ſimili modo ſecundum alias directiones reſolui poteſt, et quo tam vires ſimplices quam motus reſoluere conſueuimus. Cum enim ad curuaturam inuentam noſtro filo inducendam requiratur certum virium momentum, quod in ipſo plano curuaturae agat, et quod per radium oſculi $r$ huiusmodi formula $\frac{G}{r}$ exprimi poſſe conſtat: vbi littera G elaſticitatem abſolutam denotat, qua filum incuruationi ſecundum iſtam plagam reſiſtit, ſiue ea ſit conſtans ſiue variabilis,

 nunc

nunc ex ipſa tractatione huius argumenti didicimus; quomodo hoc ipſum momentum virium ſecundum terna plana A O B, B O C, C O A reſolui queat, ſcilicet haec vis elaſtica $\frac{G}{r}$ per primum coſinum multiplicata dabit vim inde reſultantem

Pro plano A O B $= \frac{G(dyddx - dxddy)}{ds^3}$.

Simili modo pro plano B O C $= \frac{G(dzddy - dyddz)}{ds^3}$

et pro plano A O C $= \frac{G(dxddz - dzddx)}{ds^3}$

prorſus vti ſupra obſeruauimus. Nunc igitur multo facilius erit iſtam reſolutionem hactenus plane incognitam per rationes ſolidas et certas confirmare, vnde ipſi ſcientiae ac theoriae elaſticitatis haud contemnendum augmentum accedit.

PHYSI-

# PHYSICA.

# FVNGVS SINENSIVM MO-KV-SIN DESCRIPTVS.

*a Rev. P. CIBOT apud Sinas Miſſionar. Academ. Socio.*

Extra me poſitum eſt euoluere libros, quibus in Europa Fungorum hiſtoria hodie illuſtrata eſt, vt certior eſſe poſſim illam ſpeciem, de qua ſum acturus, vere incognitam eſſe Botanicis. Itaque, ſi forte praeuenerint alii, quae hic referam ad illuſtranda vel ſaltem confirmanda ea ſeruient, quae iam ſunt propoſita. Ex autopſia enim haec ſcribo.

Fungus quem *Mo - ku - ſin*, ſeu vulgato magis nomine *Kuei - pi - ki - tſu* chinenſes appellant, locis vmbroſis, depreſſis, humidis, calida praeſertim poſt pluuias tempeſtate naſcitur. Incrementum intra duodecim fere horarum ſpatium abſoluit, perfectusque ſtatim flacceſcere incipit, curuatur, in ſe recumbit et putredinem ſentit; attamen hoc illi rarius accidit, quandoquidem Inſecta varia eiusdem ſubſtantiae auidiſſima vix terra emergentem fungum plerumque obſident et ante perfectum vegetationis ſtadium fere totum abſumunt.

In Fungo, quem deſcripturus ſum, tres diſtinctae partes obſeruandae veniunt, *volua* ſcilicet

ſeu receptaculum quo ſuſtinetur, *ſtipes* ſeu corpus fungi, eiusque *cacumen* ſiue mucro valuatus.

Tab. V. *Receptaculum* (A A.) vna cum radiculis (B B.) quibus ſupra putridas Mori radices (C C.) firmatur, ſubſtantia conſtat molli, tenella, alba, compactae ſatis texturae. *Stipes* fungi pentagonus, baſi receptaculo quaſi vaginatus, illud angulis tantum priſmatis exilique apice contingit, ideoque dum maturefcit aeque facile defluit ac fructus maturi pedunculus ab arboris ramo.

Forma ſtipitis, qui et corpus fungi conſtituit (E E.) vbique pentaëdro - priſmatica eſt; longitudo tres quatuorue pollices, diameter quinque vel ſex lineas menſurae chinenſis aequare ſolet. Per totam longitudinem cauus eſt (*f f.*); color a baſi eleganter carneus vel exalbido - rubens, mucronem verſus ſenſim ſaturatior; ſubſtantia tenerrima, leuis, fungoſa, cauernoſaque, vt in ſegmentis apparet.

*Mucro* vel cacumen (G G.) quinis conniuet laciniis, quae angulis ſtipitis reſpondent, ſuntque teretiuſculae, acuminatae (I.), coloris ſaturate rubri. Hic vero rubor initio palleſcit, propter ſuccum glutinoſum, vireſcentem, qui exſudans interualla canaliculorum replet, et demum in ſpeciem vernicis ſiccatur.

Chinenſium Libri fungum, *Mo - ku - ſin* dictum, inteſtina vel excrementa gallinarum eſſe perhibent, iisue comparant. Eaque comparatio quoad foetorem fungi aptiſſima mihi viſa eſt, inque omnes mihi

mihi oblatos quadrat, niſi quod perfecto incremento adhuc foetidiores magisque nauſeoſos deprehenderim.

Eadem Chinenſium volumina admodum diuerſa tradunt quoad fungi noſtri qualitates. Patet inde variis in regionibus Imperii Sinici eundem prouenire, multoque alibi maiorem dari illis, quos Pekini vidimus, quin et colore formaque variabilem. Ex antiquiorum recentiorumque ſcriptis collatis elucet: fungum *Mo - ku - ſin* multis in locis ad cibum tuto poſſe adhiberi, alibi nociua qualitate infamem ſe reddere, imo interdum praeſentiſſimi veneni vim exſerere, idque iisdem vulgo in regionibus, vbi eſculentus naſcitur. Sequitur hinc, a natura ſoli, conſtitutione tempeſtatum, animalculisque forſan venenatis, quae fungum noſtrum ſectantur et obſident pendere vel innoxiam eius vel deleteriam virtutem. Eandem forte ob rationem varia eſt natura noxae, quam dicitur inferre, remediorumque contra venenum eiusdem laudatorum. Idem fere in Occidentaribus mundi plagis (Europa) obſeruari ſolet: vno enim loco ſine noxa comeduntur fungi, qui alibi veneno atrociores ſe geſſerunt; fungorumque ſpecies bene multae in tranſalpinis regionibus ſalubres ad menſas adhibentur, quae in Gallia paſſim nocent. Affirmant Chinenſes: certiſſimum eſſe experimentum, quo fungi nociui a ſalubribus diſtingui poſſint, ſi medulla ſiccata ſcirpi paluſtris minoris aquae, quibus fungi bulliunt, incoquatur; quae ſi nigro colore inquinabitur, certiſſimum erit venenoſi fungi indicium; ſin vero pura perſiſtat, vel octurae ſaltem

tem colorem induat, absque omni periculo ferculum fore promittit.

Libri porro fungum *Mo-ku-ſin* tanquam praeſtans in vlceribus cancroſis remedium laudant; aduſti fungi cineres vlceri toties inſpergere iubent, donec expurgata fuerit malignitas omnis. Medici Chinenſes internis quoque remediis admiſcent, quorum expoſitio cognitionem Theoriae medicae Sinenſium posceret, in Europa adhucdum ignoratae.

Collectaneorum opus ampliſſimum, cui titulus *Ku-kin-tu-ſchu*, docet iis in locis, vbi fungus *Mo-ku-ſin* cibum praebet innoxium, abundantem eius meſſem quotannis obtineri poſſe, ſi antiquas putridasque Mori radices locis humidis, auſtro oppoſitis, ſpiſſaque vmbra arborum opacatis defodi cures. Fauet incremento eorum, copioſioremque proventum reddit, ſi terra fimo pinguis ſit, vel radices defoſſae foliis mori putridis obruantur, diligentiusque aqua perfundatur locus. Concedamus iam huic artificiali fungorum productioni aëris conditionem, caloremque auſtralium Chinae regionum, vbi a multis inde ſaeculis hac methodo vtuntur, fauere, vix tamen dubito induſtriam Europaeorum faciles modos inuenturam, quibus vtile iſtud artificium ſibi proprium reddere poſſint.

Non ſolis Phyſiophilis hanc Sinenſium antiquitus exercitam artem propono, ſed omnibus, qui fungos eſculentos, in culinae quoque vſum, ſimili aliqua methodo excitare cupient. Explorari primo deberet,

deberet, cuiusnam arboris vel fruticis radicibus haec vel illa fungi ſpecies praeſertim gaudeat; quorum ope tunc eadem ratione cultura fungorum exerceri poſſet, qua Chinenſes in radicibus Mori operantur ad producendum fungum noſtrum. Botanici huius gentis affirmant cuiuslibet arboris radices nunquam niſi certae ſpeciei fungos generare, cuiuis autem arbori ſuam eſſe fungi ſpeciem propriam; in quo me non illibenter conſentientem habent. Memini enim quondam in auſtralioribus Galliae vidiſſe fungos forma et colore ſingulares, putridis innatos radicibus, quorumque apud auctores nullum inueni veſtigium. Memini fungos varios ſub certis ſemper arboribus occurrere. Sed per vitae genus vrbanum, quo hic Pekini ſumus adſtricti, perque negotia quibus obruimur, non vacat, vt ipſe hanc Chinenſium opinionem propriamque ſimul hypotheſin experimentis confirmare poſſim; itaque Phyſiophilos Europae his ſaltem excitare volui, vt in eam inquirant. Quo, licet alium non praeſtiterint vſum, quam vt noua producant magnificentiae et liberalitatis ſummi Numinis argumenta, operae ſane dignum feciſſe videbuntur. Attamen generi humano forſan et hoc inde naſcetur emolumenti, vt facilis diſcatur methodus, fungos certae ſpeciei, in cibo ſalubriores producendi. Et quamuis in hoc praeſertim ſeruiretur ruſticis, tamen et hi laboribus aſſiduis ſuis mereri videntur, vt eorum commodis eruditi prodeſſe velint, doceantque qua methodo leues iſtas domeſticae vitae delicias procurare ſibi poſſint. Forſan plantarum quo-

que variarum facultas in his non minor erit, quam arborum, quod curioſorum experimentis relinquo; hoc ſolum moniturus: eosdem fungos, qui in equino ſtercore creſcere amant, etiam in pratis prouenire; ſententiaque Chinenſium ramos quoque arborum putridos, ſi terra obruantur, iisdem, quibus radices, fungis ortum praebere.

Coronidem imponat obſeruatio alia non leuis, nec incurioſa. Fungus noſter *Mo-ku-ſin*, priusquam e terra pullulat, minutus latet intra receptaculum ſeu voluam ſuam (L.) figura tunc oualem, radicula petiolatam. Diſſecta haec volua (M.) aliquoties exhibuit mihi paruulum fungi primordium, in mucoſo liquore natans, qui creſcente fungo abſumitur, perfectoque eius incremento plane deficit, relicta tantum quaſi vernicis tinctura intra capſulam. Videtur haec obſeruatio, de qua certiſſimus ſum, probare, per inuentum Cel. MICHELII antiquam opinionem, qua fungi pro meris excreſcentiis declarantur, penitus refutari; neque minus nos admonet, quo plus in ſcrutanda rerum natura occupabimur, eo plus in Creatoris admirationem efferri debere, quo non poterit non augeri debitus in corde mortalium erga perfectiſſimum Numen amor.

---

DE

# DE STRVCTVRA VESICVLAE FELLEAE LEONIS.

Auctore

*C. F. WOLFF.*

Singulares illae plicae, quae intra veſiculam felleam leonis inueniuntur, anatomicorum oculos nullo modo fugerunt, quin facile vſum earum in acuenda bile perſpexerint, easque inter caeteras partes peculiari attentione dignas iudicauerint. Quare praeter cor leonis et muſculos, praecipuis actionibus inſeruientes, (quae in tomis Commentarior. praecedentibus deſcripſi,) etiam hanc veſiculam felleam, maxime vero plicas, quibus interna eius ſuperficies inſtructa eſt, inter eas partes retuli, quas, occaſione data, paulo diligentius in hoc animali inquirerem et delinearem.

In ſitu veſiculae felleae, in eius figura externa et in modo, quo ex tunicis ſuis componitur, pauca reperi, quae ſingularia eſſent, et diuerſa a veſicula hominis et aliorum animalium. Attamen non eminet fundo ſuo ante marginem anteriorem hepatis, pauloque, quam in aliis animalibus proportione minor eſſe videtur, et praeterquam, quod ſolito modo tota ſua ſuperficie ſuperiori hepatis ſuperficiei inferiori adhaereat, duobus quoque ligamen- Veſiculae habitus externus.

tis transuerſalibus, de media veſicula, eiusque facie inferiori exeuntibus, eidem hepatis faciei adnectitur. Denique in ſua ſubſtantia firmior et craſſior eſt, ſaltim in plurimis locis, quod quidem non tam tunicis ipſis, quam potius craſſiori denſiorique cellulosae ſubſtantiae debetur, quae tunicis in iis locis intereſt, easque a ſe inuicem diſtendit. Et in his locis veſicula fellea inflexa eſſe ſolet. Ob craſſitiem ſubſtantiae, ob molem totius veſiculae minorem, ob multitudinem et magnitudinem plicarum cauitas interna minor eſt, quam in homine et in aliis animalibus. Atque haec fere omnia ſunt, praeter plicas, quae ſingularia in hac cyſtide leonina deprehendi.

Interna veſiculae ſtructura generatim.

Aperta veſicula, ſectione longitudinali a ductu choledocho per ſuperficiem veſiculae inferiorem vsque in eius fundum ducta, plicae apparent, imprimis parieti ſuperiori, qui hepati applicatus eſt, et lateribus inſidentes adeo, vt extremitatibus ſuis in ſuperficie inferiori concurrant. Collum veſiculae (Tab. VI. *k. l.*) et corporis pars poſterior anguſtior (*l m.*) maxime illis abundant, anterior amplior (*m. n.*) et fundus (*n. n*) nonniſi rugis gaudent; plicisque eminentioribus et acutis omnino carent. Duplex harum plicarum genus obſeruatur. Aliae ſimplices ſunt, veluti (*x.* C. Q. V.) et cum valuulis venarum et cordis ſemilunaribus maxime conueniunt, dum altero ſuo margine craſſiori, magis vel minus conuexo, parietibus veſiculae inſident, altero acuto eminent, et in extremitatibus ſuis arctiores ſunt

quam

quam in parte media. Aliae vero magis compoſitae et quaſi conglomeratae ſunt ex ſimplicibus, veluti (*y. y. z.*). Denique tota interna ſuperficies veſiculae, plicaeque ipſae, tum ſimplices tum compoſitae in ſuis ſuperficiebus plane obſitae ſunt rugulis, vel etiam plicis minimis, ſerpentinis alibi, alibi retiformibus; et ſaepe in his ipſis aliae minores obſeruantur, vt tota veſica egregie intus criſpa et plicata appareat. Dumque hae plicae, vario ſitu et directione inter ſe poſitae ſunt, loculamenta inter eas formantur variae figurae et capacitatis, veluti (S et W.) ex quibus praecipue ea notabilia ſunt, quae inter plicas compoſitas continentur (I et L.) quaeque tanquam propria receptacula conſiderari posſunt; ſiquidem circumquaque fere clauſa ſunt, et nonniſi duobus orificiis gaudent, altero, quo bilis, quae ex fundo veſiculae aduenit, in illud intrare, altero, quo porro exire poſſit. Quae inter plicas ſimplices continentur (*z.* B. *M.*) cellae ſunt tantummodo, plerumque tamen ſatis profundae. Praeter haec plura alia in ſtructura interna veſiculae occurrunt, non minus notabilia, veluti ſingulare hoc ſtructurae genus, vbi tunicae veſiculae interiores ab exterioribus recedunt, eoque cauitatem illius anguſtiorem efficiunt, ipſasque plicas, quas dixi, conglomeratas producunt. Haec in ſpeciali ſingularum partium deſcriptione explicabo.

Solent veſiculam felleam humanam praeter ductum cyſticum in collum, corpus et fundum diuidere. Haec leonina praeter cyſticum ductum (*k. k.*) et

Peculiaris leoninae veſiculae diuiſio.

et fundum (*n. n.*) in collum (*k. l*) in partem corporis poſteriorem (*l. m.*) plicatam anguſtioremque, et anteriorem (*m. n.*) ampliorem conuenienter diuidi poteſt. Illa enim copioſiſſimis non modo, quibus repleta eſt, et multiformibus conglomeratisque plicis et loculamentis, inde formatis, toto coelo ab anteriori, quae amplior et plicis priuata, eoque maiori cauitate donata eſt, differt, ſed etiam inſigni plica orbiculari (*z.*) ab eadem diſtinguitur. Vt quaevis ſingularia et notatu digna in ſtructura veſiculae eo facilius notentur, diuerſas has partes ſecundum ordinem pertractabo.

Ductus cyſtici ſtructura.

Ductus cyſticus (*k. k.*), aliter atque in homine et in fele, laeui intus et aequali ſuperficie gaudet, nec niſi ſtriis paſſim longitudinalibus (*q. q.*) praeditus eſt. In homine veſicula fellea ipſa plicis omnino caret; obſoletiſſimis rugulis retiformibus et villis villoſae tunicae gaudet. In ſupremo eius collo plicae duae vel tres reperiri ſolent ſimplices transuerſales. Inde ductus cyſticus totus eiusmodi lamellis transuerſalibus et ſeptis, trabeculisque, vti vocari ſolent, repletus eſt, inter quas cellulae irregulares continentur. Contrarium igitur in leone obtinet, vbi cyſtis ipſa plicis inſignibus ſtipata, ductus iisdem priuatus eſt. Orificium tamen, quo ductus hepaticus in cyſticum et choledochum aperitur (*o.*) peculiari tenui valuula munitur (*p.*) adeo poſita, vt margo conuexus ductus verſus hepaticum (*i.*) et cyſticum, concauus choledochum (*b.*) reſpiciat. Huic valuulae in pariete ductus oppoſito tubercu-

berculum reſpondet, quod concauitatem valuulae adeo replet, vt fluidum ex ductu hepatico vel cyſtico in choledochum facillime tranſire, minus facile ex hepatico vel choledocho in cyſticum et difficillime ex cyſtico vel choledocho in hepaticum venire poſſit.

Structura colli veſiculae.

Veſiculae collum (*k. l.*) rugis potius quam plicis exornatum eſt (*r. s. t.*) ſed ſatis eminentibus, egregie criſpis, ſerpentinis, maximam partem transverſalibus. Cauitas autem huius partis veſiculae externo ambitui haud reſpondet, ſed multo, quam ob craſſitiem tunicarum eſſe deberet, anguſtior eſt. In latere dextro enim (*b.*) tunicae interiores (*a.*) ab exterioribus recedunt, ſpatiumque inter eas denſa tela celluloſa repletur. Eo efficitur, vt cauitas colli veſiculae non amplior ſit quam ductus cyſticus, quamuis illud externo ambitu hunc multo ſuperet.

Tunicae interiores ab exteriobus peculiari ſtructura recedentes, pliscusque conglomeratas efficientes.

Recedunt vero etiam in aliis locis tunicae interiores ab exterioribus et imprimis duo, praeter iam deſcriptum, notabilia exempla occurrunt in parte corporis poſteriori, quorum quod prius (*v.*) ſequitur, in latere veſiculae ſiniſtro (D.), quod hoc porro excipit iterum in dextro latere eſt (E et F.). Ex ſitu horum locorum alterno vſus qui inde reſultat, facile intelligitur. Non ſolum enim anguſtiorem haec loca reddunt cauitatem veſiculae et viam, quam bilem tranſire oportet, ſed ſerpentinam quoque eandem et longiorem efficiunt, quo fit, vt diutius haec in ſuo itinere commorata craſ-

ſior

ſior euadat atque acrior. Sed praeterea alius huius ſtructurae vſus eſt peculiaris. Firmantur et nituntur his locis plicae compoſitae, quas conglomeratas dixi, veluti inter (D) et (*v.* E.) ſeries plicarum conglomeratarum (*x. y. y.* A. C.) quaſi ſuſpenſa eſt. His nempe ea fabrica eſt, vt ſimili receſſione tunicarum interiorum, vaſculoſae nempe vna cum nervea et villoſa ab exterioribus, muſculoſa et extima ad aliquod ſpatium, magis vel minus longum et latum formentur. Sed in his ipſis locis nervea cum villoſa a ſubiecta vaſculoſa iterum recedendo plicas ſimplices producit, quae igitur omnes vaſculoſae ſoli, ab externis diſtanti, tanquam baſi communi inſident, eiusque ope tanquam in vnam molem conglomerantur. Haec nunc eadem vaſculoſae tunicae pars, quae connexas plicas ſimplices tenet, in extremitatibus ſuis, fundum veſiculae et ductum choledochum reſpicientibus plica acuta terminatur, veluti plica (*x.*) poſterius, anterius plica (C.); lateribus ſuis autem illis locis adhaeret, vbi ſimpliciter tunicae interiores ab exterioribus recedunt, veluti (*v.* D. E. R.), iisque igitur a muſculoſa et extima ſeparata tenetur.

Quae in parte corporis veſiculae poſteriori occurrunt. 1) Series plicarum conglomeratarum.

Eiusmodi ſeries plicarum, in vnam molem conglomeratarum ſingularis (*x.* C.) proxime poſt collum in prima parte corporis veſiculae occurrit, qua ipſa collum a corpore diſtinguitur. Ea in extremitate ſua, collum reſpiciente plica inſigni ſemilunari (*x.*) in altera, quae verſus fundum reſpicit, ſimili plica (C.) terminatur. Inter illam et parietes

tes colli cauitas continetur in quam bilem intrantem commorari oportet. Tota plicarum ſeries ob receſſionem vaſculoſae tunicae, cui plicae inſident, ab exterioribus adeo cauitatem veſiculae in hac regione occupat, vt reliqua huius capacitas vix pennae anſerinae craſſitiem aequet. Plicae ipſae (*y. y.* etc.) marginibus ſuis acutis verſus fundum veſiculae ſpectant, adeo vt exitum bilis remorentur, excepta prima earum (*x.*) quae verſus ductum reſpicit. Extremitatibus ſuis autem ſingulae hae plicae eiusmodi locis (*v.* E) et (D) innituntur, vbi ob receſſionem tunicarum interiorum ab exterioribus ſubſtantia veſiculae craſſior eſt; vti etiam baſis, cui ſingulae plicae inſident, tunica vaſculoſa ab exterioribus diſtat, interpoſita celluloſa, adeoque ſubſtantiam ſimiliter in eo loco craſſiorem reddit.

Poſt hanc anguſtiorem veſiculae partem inſignis folliculus ſequitur (I.) a parietibus veſiculae ipſis factus, poſterius plica (C.) anterius autem partibus veſiculae, vbi tunicae interiores ab exterioribus recedunt, (G et F.) iisque interpoſita parua plica (H.) terminatus. Hic circumquaque fere clauſus eſt et verſus ductum choledochum orificio, quod dicta plica terminalis (C.) efficit in canalem aperitur, a ſerie illa plicarum (*v.* C.) formatum, verſus fundum veſiculae autem nonniſi anguſtiſſimo orificio apertus eſt, vix acum admittente, a minima illa plica (H.) formato et prope parietem veſiculae inferiorem ſito. Ope huius orificii minimi (H) folliculus ille (I.) vnaque cum hoc tota poſterior cauitatis

2. Duo folliculi inſignes.

3. Exiguo foramine inter ſe communi-

cantes, quo ſimul tota veſicula in duas cauitates diuiditur.

tatis veſiculae pars ad ductum cyſticum vsque, cum parte cauitatis veſiculae anteriori (H. *n. n.*) communicat. Neque alia praeter hoc foraminulum communicatio inter partem veſiculae anteriorem et poſteriorem datur; adeo vt tota cauitas veſiculae in duos quaſi ſaccos, ſolo illo anguſto foraminulo inter ſe communicantes, diuiſa ſit. Paries internus huius folliculi plicis ſimplicibus longitudinaliter poſitis (K.) quaeque ipſae in ſuis ſuperficiebus rugas transverſas habent, exornatus eſt. Deſcriptum folliculum alius excipit (L) omnibus notis illi ſimilis. Hic poſterius eodem minimo oſtiolo (H), quo prior, terminatur, eodemque cum priori communicat, anterius autem plica ſemilunari (N.) clauditur. Plicae, quibus parietes huius folliculi inſtructi ſunt, (M.) diſtinctiores prioribus magisque regulares et pulchriores ſunt.

4. Canalis anguſtior.

Deinde pars ſequitur, vbi iterum, vti in ſerie illa plicarum (*x. y. y.* A. C.) tunicae interiores ab exterioribus recedentes, cauitatem veſicuiae anguſtiorem reddunt, canalemque efficiunt breuiorem quidem ſed etiam ſatis anguſtum, qui in icone apertus et extenſus repraeſentatur (*o.*) Paries tamen internus in hac veſiculae parte (*o.*) non adeo eminentibus plicis ſed rugulis potius acutis (P.) ad ductum canalis transuerſalibus ornatus eſt. Poſterius anteriusque ille canalis plicis inſignibus (N et Q.) terminatur. Earum poſterior (N.) verſus ductum cyſticum, anterior verſus fundum ſuo margine acuto reſpicit.

Huic

Huic anteriori alia (V.) reſpondet, quae vna cum illa receptaculum (S.) includit rugulis transverſalibus (T.) inſtructum. Denique magna plica ſimplex (Z.) quae totam veſiculae cauitatem ambit, partem folliculoſam veſiculae terminat, eamque a parte anteriori et fundo diſtinguit. Inter hanc et plicam (V.) vltimum diuerticulum particulare (W.) continetur, rugulis egregiis (X.) reticulatis et transverſalibus intus ornatum.

5. Receptaculum.

Finis partis folliculoſae, plica terminatae.

In fundo veſiculae et in tota parte corporis anteriori nullae tunicarum interiorum ab exterioribus receſſiones occurrunt, plicaeque nullae formantur; neque vlla peculiaris parietum craſſities obſervatur. Proinde cauitas huius partis anterioris multo maior eſt et quaſi diuerſum a parte poſteriori, quae alia etiam ſtructura gaudet, et folliculoſa eſt, ſaccum efficit. In hoc ſacco tantummodo rugae craſſiores obtuſioresque obſeruantur, vario modo diſpoſitae. Alibi retiformes exiſtunt (η.); alibi fere circulares (θ). In aliis locis transuerſales magis (λ. λ.), vel etiam longitudinales (ξ.) reperiuntur.

Pars corporis veſiculae anterior et fundus.

Si quae forte ſunt, quae in hac deſcriptione aut difficilius intelliguntur, aut omiſſa vel neglecta ſunt, haec in ſequenti indicatione eorum, quae in icone continentur, minutius explicabuntur.

## Indicatio eorum, quae in icone continentur.

Icon Tabula VI. expreſſa veſiculam felleam repraeſentat, in parte ab hepate auerſa longitudinaliter

liter diſſectam et explicitam, vt interna ſtructura appareat. In ea ſunt:

*a. a. a. a.* Diſſectae veſiculae margo, qui in ſitu naturali dexter eſt.

*b. b. b.* Partes ſuperficiei veſiculae externae.

*c. c. c.* Margo veſiculae diſſectae, in ſitu etiam naturali, ſiniſter.

*d.* Pars ſuperficiei externae, membrana externa obductae.

*e.* Ligamentum veſiculae laterale dextrum.

*f.* Ligamentum ſimile ſiniſtrum, cum veſiculae membranis reflexum. Haec ligamenta duplicatura tunicae externae veſiculae inuoluta ex huius ſuperficie inferiori oriuntur, indeque lateraliter ſecedunt, et hepatis ſuperficiei inferiori applicantur.

*g.* Duplicatura tunicae externae veſiculae, qua ligamentum inuoluitur.

*h.* Ductus choledochi pars aperta, laeuis intus.

*i.* Pars ductus hepatici integri.

*k. k.* Ductus cyſticus apertus.

*k. l.* Collum veſiculae felleae apertum.

*l. m.* Corporis veſiculae pars poſterior, follicuſoſa; anguſtior, quae prae caeteris partibus copioſiſſimis, iisque multiformibus, et paſſim conglomeratis plicis et cellulis loculamentisque inſtructa eſt.

*m. n.*

*m. n.* Pars corporis veſiculae anterior, longe praecedenti amplior, merisque tantum rugis ornata.

*o.* Orificium ductus hepatici in cyſticum aperti.

*p.* Plica tenuis, quae reditui bilis in veſiculam felleam aliquo modo obſtare videtur, certius autem vetat, quo minus bilis, ex cyſtide in ductum choledochum itura, in hepaticum ductum refluat.

*q. q.* Plicae et ſtriae longitudinales, quibus ductus cyſticus intus inſtructus eſt.

*r. s. t.* Cauitus tota colli veſiculae, rugulis transverſis copioſiſſimis ornata. *r* rugae transuerſae ſerpentinae. *s* aliae breuiores, magis rectae. *t.* aliae directionibus variis.

*v.* Pars tunicae, ſeu ſubſtantiae, qua veſicula fellea conſtat. Ea in hoc loco admodum craſſa eſt et plus quam dimidiam partem totius latitudinis colli veſiculae occupat. Reliqua anguſtior colli pars intus caua eſt, totamque hanc colli cauitatem indicant litterae *r. s. t.*

*w.* Inflexio veſiculae felleae, et quaſi terminus inter collum et corpus, in externa ſuperficie apparens.

*x. C.* Corporis veſiculae felleae pars prima, plicis acutis eminentibus transuerſis inſtructa. Hoc ſpatium *x. C.* ſimiliter totam cauitatem huius partis veſiculae refert. Partes latera-

 les

les veſiculae in hac regione D et E ſubſtantia ſolida celluloſa et tunicata occupantur. Simili craſſitie paries quoque gaudet hepati applicatus, adeo vt pars plicata *x*. C. eleuata exiſtat, et cauitas in hac regione nonniſi anguſtus canalis ſit, praecipue in parte media.

*x*. Prima plicarum, terminalis, quae margine ſuo verſus ductum choledochum ſpectat et colli cauitatem a cauitate corporis diſtinguit.

*y*. *y*. Secunda et reliquae plicae, marginibus ſuis acutis verſus fundum veſicae reſpicientes.

*z*. Rugulae, plicis inſidentes.

A. Plica notabilior.

B. Rugae eminentes, quibus illa exornata eſt.

C. Plica magna, qua haec pars plicata eleuatior a folliculo I. diſtinguitur, rugulis variis ornata.

D et E. Partes laterales veſiculae quae ſolida ſubſtantia in hac regione repletae ſunt ſolamque partem mediam exiguam, propiorem ſuperficiei inferiori, cauam relinquunt. Inter has partes ſolidas plicae *x*. *y*. *y*. A. C. quaſi expanſae tenentur.

F et G. Eadem ſubſtantia ſolida vtrinque magis intra cauitatem in hoc loco producta, adeo vt cauitas veſiculae relicta vix acum permiſerit.

H. Similis ſubſtantia ſolida, a pariete veſiculae, hepati applicato, verſus oppoſitum inferiorem

rem producta, adeo tamen, vt inter hanc productionem et parietem inferiorem ſpatium ſimilineae circiter relinquatur. Haec productio H. igitur vna cum lateralibus illis productionibus F et G. et pariete veſiculae inferiori canaliculum efficit, breuem quidem, ſed anguſtiſſimum quoque, vix acum admittente, quo folliculus I. cum folliculo L., in ſimulque tota cauitatis veſiculae pars poſterior H. *b.* cum anteriori H. *n.* communicat, et qui, niſi a productione H. relictus eſſet, tota veſiculae cauitas in duas partes, perfecte ſeparatas, diuiſa eſſet.

I. Profunda cauitas, ſeu folliculus, vbi tum paries ſuperior, tum inferior veſiculae a meris eius tunicis efficiuntur. Iſteque folliculus poſterius plica terminali C. anterius anguſto illo orificio terminatur quod inter partes F. G. H. relinquitur.

K. Plicae longae eminentes ramificatae fundo folliculi, ſeu parieti ſuperiori veſiculae, inſidentes.

L. Alter eiusmodi folliculus, orificio anguſto H. a priori diſtinctus, anterius plica N. et lateraliter ſubſtantia veſiculae ſolida terminatus.

M. Plicae longae. imbricatim fundo folliculi inſidentes, rugulisque in ſuis ſuperficiebus ornatae.

N. Plica inſignis, altera, qua conſtat, lamina parietem folliculi L. efficiens, altera paralle-

la

la ſuperficiei veſiculae in partem eleuatam O. continuata.

O. Pars interior eleuata, parieti ſuperiori inſidens. Spatium inter ſuperficiem O. et parietem ſuperiorem veſiculae ſubſtantia ſolida celluloſa repletum eſt.

P. Rugae et ſtriae, quibus haec eleuatior pars O. notata eſt.

Q. Plica ſimilis illi N. cuius altera lamina in ſuperficiem O. altera in cauitatem *S* continuantur.

R. Pars ſolida, ſimilis illis D et E, quae dimidiam cauitatem veſiculae in hoc loco occupat, et a pariete inferiori vſque in ſuperiorem producitur. Inter hanc et parietem D. membrana O. et plicae N et Q. expanſae tenentur.

S. Cauitas inter plicam Q et V. comprehenſa, minus tamen profunda, quam folliculi I et L. cum tunicae interiores ab exterioribus in hoc loco aliquantum remotae et per craſſiorem telam celluloſam ſeparatae exiſtant.

T. Rugae in hac cauitate.

V. Plica magna ſimplex, qua cauitas S. a profundiori cauitate W. diſtinguitur.

W. Cauitas profundior, in quo loco ſcilicet tunicae veſiculae contiguae ſibi incumbunt, cauitatemque adeo veſiculae maiorem efficiunt.

X.

X. Rugulae, quibus haec veſiculae pars ornata eſt, hinc inde reticulares.

Z. Magna plica circularis, qua tota veſiculae cavitas in partem anguſtiorem plicatam, folliculoſamque et latiorem, ad fundum quaſi pertinentem, plicis eminentioribus priuatam diſtinguitur.

α. Lamina altera, qua haec plica efficitur, quae nempe tunica veſiculae interna villoſa eſt.

β. Altera plicae huius lamina, eiusdem tunicae continuatio.

γ. Tunicae nerueae pars, ſimiliter plicam ingredientis.

δ. Membranae externae veſiculae pars, ſuper plicatam internarum tunicarum partem recta expanſa.

ξ. Rugae in parte veſiculae anteriori ampliori, variis directionibus ductae.

η. Retiformes.

θ. Fere circulares.

λ. λ. Transuerſales.

# EQVVS HEMIONVS,

## MONGOLIS DSHIKKETAEI DICTVS,

DESCRIBENTE

*P. S. PALLAS.*

Equorum tres hucusque ſpecies Zoologi norunt, Caballum videlicet, cum Aſino, per Aſiam temperatam et Africam feros et vbique domeſticos; tertiamque Zebram, pulcherrimum atque peculiare monſtriferae Africae productum. Quartam addo, nomine barbaro iam dudum celebrem, ſed reapſe Zoologis hactenus fere penitus ignotum et obſcurum Animal, quod hominis auram fugiens in deſertiſſimas Aſiae mediae ſolitudines receſſit, neque forte vllibi nunc datur, niſi in vaſtiſſimis Magnae Tatariae ſubmontanis campis, inter Indos, Seres atque Sibiriam late patentibus. Nomen illi conuenire poſſe credo *Hemioni*, quod Graeci antiquiores non ſolum Mulis hybridis, ſed et huic animali, iam iſtis, ni fallor, temporibus vtcunque cognito, indiderunt. Sic enim ARISTOTELES haud dubie de illo erit intelligendus vbi (*Hiſt. animal. Lib. VI. cap.* 36.) narrat: "eſſe in Syria quos Mulos, vel Semaſinos ,,('ἡμίονυσ) appellant, genus diuerſum ab illo, quod ,,coïtu equi et Aſinae generatur, ſed ſimili facie, ,,prout Aſini ſylueſtres ſimilitudine quadam nomen

„vrbanorum accepere. Et quidem, pergit, vt Aſi-
„ni illi feri (ὄνοι ἄγριοι), ſic muli iſti praeſtant
„celeritate. Procreant eiusmodi mulae ſuo in ge-
„nere, cuius rei argumento ſunt illae, quae tem-
„pore Pharnacae, patris Pharnabazis in terram Phry-
„giam venerunt et adhuc exſtant; tres tamen ex
„nouenis, quot numero olim fuiſſe aiunt, ſeruan-
„tur hoc tempore.„ Et alio item loco Stagirita
(*ibid. cap.* 24.): “In terra Syria, ait, ſupra Phoe-
„nicen mulae et coëunt et pariunt omnes; ſed id
„genus diuerſum eſt, quanquam ſimile.„ Itemque
PLINIVS (*hiſt. natur. Lib. VIII. cap.* 44.) tradit a
THEOPHRASTO proditum, vulgo parere Mulos in
Cappadocia, ſed eſſe animal ibi ſui generis. Deni-
que AELIANI (*de Animal. Lib. XVI. cap.* 9) huc
videtur referri poſſe locus, vbi ſcribit: “In India
„Equorum ferorum et Aſinorum ſimiliter greges
„ſunt, et Aſinos Equae facillime admittunt et ru-
„bros Mulos (ἡμιόνους πυρσοὺς) pariunt ad curren-
„dum praeſtantiſſimos, ſed contrectationis impatien-
„tes, quos compedibus captos ad Praſiorum regem
„adducunt. Ex iis, qui bimi comprehenduntur,
„domari poſſunt: contra vetuli ab immanibus et
„carniuoris feris nihil differunt„.

Noua haec Equini nominis progenies primum
innotuit per *Diligentiſſimum* MESSERSCHMIDIVM,
qui tertia huius ſaeculi decade per Sibiriam iuſſu
PETRI *Magni* peregrinabatur; praeterque iſtum et
GMELINVM, viginti poſt annis illius veſtigia le-

 gentem,

gentem, nemo Phyſiophilus vnquam animal hocce rariſſimum contemplatus eſt.

Primus itaque MESSERSCHMIDIVS hanc ſpeciem differte ab Aſino et Caballo diſtinxerat, atque nomine *Muli dauurici, foecundi Ariſtotelis*, *Cappadocici Ereſii* in *Xenio Iſidis ſibiricae*, quod MStum extat, ſalutauit; et hoc idem in *Catalogum Muſei Petropolitani* (*) tranſiit, a BVFFONIO perperam pro ſynonymo Aſini feri habitum (*Hiſt. natur. Edit.* 8 *vol.* 24. *p.* 6. *not.*). Deſcriptio autem animalis, quam ad tria cadauera exarauerat MESSERSCHMIDIVS, periit, praeter Anatomica quaedam, et integram praeſertim, verboſiſſimam Oſteologiam in *Hodegetico* eiusdem *MSto* conſignatam. GMELINVS, quum in Dauuria peregrinaretur, Hemionos noſtros inſtitutis venationibus fruſtra petierat (†); quam vero poſtea, procuratis per *Celeberrimum Collegam* eius MÜLLERVM hyemali tempore Hemionis, Ircutiae concinnauerat deſcriptio inter ineditas eius chartas adhuc- [illegible] dum

(*) *Xen. Iſid. Sibir. Mſtum* ſic habet: „Mulus dauuricus „foecundus Ariſtotelis, Cappadocicus Ereſii. *Czigithai* „Mongolorum in Dauuria; *Kſching* Tangutis; *Kitſchæ-* „*ræh* vel *Dſhængli-Kitſchæræh* Indis cis Gangem; „an Ebraeorum *Pæræd* 2. Sam. 18. 1. Reg. 1. Arabi- „bibus *Hæmar-iwáſchi*; *Char-Kuræh* Perſis; Tataris „Muhammedanis *Kolan*, forſan et *Chatſcher*? perpe- „ram *Stepnoi kon* ſeu Equus campeſtris Ruſſorum; Iuba „breuiſſima et ductu ſpinae mediano in muſtelina pelle „nigris, auribus et cauda aſininis„. Haec MESSERSCH.

(†) *Reiſe durch Sibirien II. Theil p.* 107. Vbi breuiſſima deſcriptio, ſed fida, e relatione Mongolorum traditur.

dum latet, neque ſi prodeat, Zoologis ſatisfacere poſſet, quippe breuis et imperfecta, vti pleraeque Optimi Viri, de Botanica praeclare meriti, in Zoologicis vero incurioſi, animalium adumbrationes eſſe ſolebant. Adeoque res ad me peruenit integra, quum in Sibiriam profectus ſum. *Miſſionarii* enim e Societate Ieſu, qui Mongoliae deſerta variis occaſionibus peragrarunt et videndi Hemionos opportunitate vſi ſunt, vix vllam, praeter nomen, eorundem notitiam reliquerunt (*).

Per totum igitur quadriennium, quo auſtrales Roſſiae atque Sibiriae fines Tatariae magnae deſertis conterminos relegi, nullum non moueram lapidem, nullisque ſumtibus peperceram, vt praemiis pariter ac fauore excitarem venatores gentiles ad procurandum, e deſertis extra fines Imperii Roſſici poſitis, ſpecimen et Hemioni, et Onagri. Aſt omnia incaſſum fuere, donec vere Anni 1772. extremae Dauuriae campos, ab Onone et Arguno fluuiis verſus Mongoliam deſertam patentes peragrarem In eadem illa raris mortalibus habitata regione, vbi antea Hemionus MESSERSCHMIDIO oblatus, et vnde pro GMELINO miſſus fuerat, mihi quoque rariſſimum hocce animal eminus videre atque deſcribere contigit. Solaque fere Argunenſia deſerta nunc ſunt,

 vbi

(*) Mulos feros, Chinenſibus *Te - lo - tſe* eodem ſignificatu dictos, memoratos inuenias in Opere DV HALDII *Vol. IV. p. 34.* Conferantur et *Allgemeine Samlung der Reiſen Vol. VII. p. 75. et 592.*

vbi hodie intra limites Sibiriae adhuc obſeruari ſoleant Hemioni, dum aucta orientalis huius regionis populoſitate diffugere et in auſtraliore Mongolorum eremo ſecuritatem quaeſiuere, vnde nunc rarius in Dauuriam Roſſicam euagantur. Praeſertim illos obſeruatum eſt amare planitiem aridam et herboſam circa Lacum ſalſuginoſum exſiccatum, quem *Tareinôor* appellant, in ipſis Mongoliae Chinenſis finibus poſitum, patentesque inde vsque ad *Abagaitu* collem intermontanos campos, qui famoſo illo deſerto Gobëenſi vsque ad Indiam extenſo, Hemionisque imprimis abundanti continuantur. Reliquus enim tractus Dauuriae Roſſicae vel rupibus excelſis nimis horridus, iugisque niualibus munitus, vel ſyluis impeditus eſt; qualia loca Hemioni non adeunt neque amant.

In Argunenſibus itaque campis fere quotannis adhuc, non quidem, vti prius, gregatim, niſi annona in arido vel ignibus ambuſto deſerto premente, ſed tamen ſparſim et a gregibus quaſi aberrantes apparent Hemioni. In apricis Mongoliae vero, praeſertim vaſtiſſima illa planitie glareoſa, quam *Gobi* appellant, magnis incedere gregibus autoptae mihi retulerunt itineratores. Itaque Mongolis, eorumque linguam callentibus Dauuriae Tunguſis notiſſimum ſunt animal, cui nomen *Dſhikketæi*, quod Auritum ſignificat, indiderunt. Eodem nomine transfugis e Songaria Calmaccis notum eſſe didici, quorum in priſtina patria inquilinum itidem Animal et a feris Aſinis (*Chulàn*), ferisque Caballis (*Takija*) diſtinctiſſi-

mum

mum habetur. Haud vero certo dixerim, an Tatariae vaſtitiem magis ad Occidentem ſitam frequentet; certe Kirgiſis Nomadibus, ſaltem Occidentalibus, quantum reſcire potui, nulla eſt appellatio, qua diſtinctum deſignent. Neque determinate ſatis de Onagris Perſiae Syriaeue locuti ſunt peregrinatores, vt liqueat annon Hemioni quoque in his dentur regionibus.

Amant noſtri praeſertim paſcua aprica, ſicca, ſed herbis laeta ſolidis, montanis, quibus Dauuria Mongoliaque tota, tanquam alpina regio, abundat. Ad aquas raro accedere dicuntur, patientiſſimique ſitis eſſe, quae in deſerto, quod colunt, ſaepe per centena ſtadia aquis, praeſertim dulcibus, deſtituto, ſumme neceſſaria erat facultas.

Onagrum et Equiferum in ſeruitutem redegit hominum audax induſtria, et in mitiſſima atque vtiliſſima iumenta conuertere calluit. Hemionum vero noſtrum, pariter atque Zebram Africae, nullus vnquam mortalium domare potuit, licet equitationis amantiſſimi Nomades Aſiae experimentum educandi pullos plus ſimplici vice tentarint. Non tamen deſperandum eſſe puto, tenerrima aetate captis atque concluſo loco aptius, quam inter Nomadum mappalia, educatis et adſuefactis pullis, aliquando fieri poſſe domeſticam, fraenique patientem hanc ſpeciem; quae tunc celeritate curſus certe Equos cuiuscunque gentis, celerrimosque Syriae vel Arabiae Mulos vincet. Suadet hoc eadem in Onagris,

gris, quorum millenarii greges per Aſiae temperatioris Eremum oberrant, paſtoralibus Tataris experta feritas, quam tamen antiqui ita facile domare norant, vt etiam, ad generandos Mulos praeſtantiſſimos, Onagros manſuefactos praeſertim adhibitos fuiſſe VARRONIS, COLVMELLAE, PLINIIque teſtimoniis conſtet; imo VARRO ſcriptum reliquerit (*de re ruſt. Lib. II. cap. 6.*), "ad (Mulorum) ſeminationem maxime idoneum eſſe Onagrum, quod e fero fiat „manſuetus facile, et e manſueto ferus nunquam„.

A Mongolica gente, Tunguſisque ſola potiſſimum venatione felicibus propter aeſtumatiſſimas inter hos barbaros, Equiferisque praelatas carnes et corium aptum ocreis, crebro occiduntur Hemioni. Eſt autem difficillima eorum venatio; non ſolum enim viſu eximio pollent, ſed etiam ſecunda aura hominis non viſi effluuia per plura ſtadia ſentiunt, prouidiſſimique ad fugam ſe componunt. Celeritas autem eorum tanta, tamque fere incredibilis dicitur eſſe, vt alipedes equos facili opera longiſſime poſt ſe relinquant, imo Antilopibus, propter pernicitatem celebratis, velocius currant. Hanc admirandam ob celeritatem indomitamque feritatem adeo celebres apud Aſiae populos facti ſunt, vt etiam in prouerbium ceſſerint, et Tibetani Deum igneum, quem *Chammo* appellant, Hemiono effixerint inequitantem. Propter eandem venationibus, quas Mongoli magna equitum manu inſtituere ſolent, raro includuntur; ſed potiſſimum ex inſidiis, a latente poſt tumulum vel in foſſa qualicunque venatore tunc, quum aquatum

tum ad riuos vel lacunas accurrunt, vel loca ſalſuginoſa adeunt Natri vorandi cauſa, ſclopis caeduntur. Narrant tamen venatores, tempeſtate pluuia atque turbulenta Hemionos quaſi ſtupere, vel hebeſcere ſenſibus, ita vt venatorem minus perſentiſcant. Mares adulti, qui gregibus Equarum plus minus numeroſis duces ſunt, praeſertim cautos atque vxoriae cohortis prouidos cuſtodes ſe praebent, non ſolum zelotypia ſumma equas ab alienis gregibus arcentes, junioresque mares, quum adoleuerunt, e turma depellentes, ſed etiam pericula quaeuis explorantes. Conſpecto venatore, qui forte ſub aduerſo vento humi ſtratus adrepere gregi parat, dux gregis tanquam rem inſolitam miratus, ſolus magno circuitu facto ſemel iterumque, imo quandoque ad tertiam vsque vicem propius dicitur accurrere, inſpecturus quid rei ſit; quo optima ſaepe venatoribus potiundae praedae offertur occaſio. Sed perſpecto periculo ſumma tandem celeritate reuertitur, expectantemque gregem equarum in fugam pellit.

Capite ſemper ceruinum fere in morem elato, ſurrectisque auribus incedunt Hemioni; fugientes adhuc magis in altum proiiciunt caput, eriguntque caudam. Hinnitus grauior, magisque ſonorus obſeruatur, quam equorum. Greges conſtant, praeter admiſſarium ducem, equabus ſaepe pullisque vigenis, vel vltra. Plerumque tamen multo parciores eſſe ſolent, ita vt Hemionos multos quinae, imo pauciores ſaepe ſequantur vxores. Mares iuniores, cum adoleuere, a patribus grege tandem abacti, e lon-

ginquo ſequuntur vel ſolitarii errant, donec equas itidem iuniores ſui generis a grege alienare, vel aberrantes ſibi adiungere queant. *Oeſtri* tempore etiam feminei pulli, quae veneris nondum patientes ſunt, ab admiſſario duce grege dicuntur expelli ſolere. Fama eſt Hemionos domeſticas quoque aliquando Equas abducere, iisque ad Venerem abuti; quod tamen non ſatis fidis teſtimoniis mihi confirmatum eſt, licet vero ſimillima res videatur in tanta totius fabricae affinitate et magnitudinis fere paritate, quae Hemionum adhuc aptiorem copulae cum Equabus noſtris reddit, quam eſt Aſinus, cuius tamen proles ex Equa, vti Equi ex Aſina, vulgatiſſimis Equiſonum experimentis confirmata eſt.

Coëunt Hemioni medio et ſub finem Auguſti; illo enim tempore in diſſecta femella MESSERSCHMIDIVS foetum magnitudine Muris in altero vteri cornu reperit. Dicuntur autem vere parere, ſolitarios plerumque pullos. Et hi tertio anno exacto parentibus fere aequales puberesque fiunt, obſeruantibus iſtarum regionum Nomadibus.

Pugnant inter ſe praeſertim morſu Hemioni; quod et Equis ſpontaneis ſolemne eſt. Attamen vngula pariter ferire callent, quod in Hemioni pullo obſeruatum fuit, quem Ruſſus aliquis in Davuriae finibus militiam faciens in tenera aetate ceperat, quique ob immanem feritatem vix per menſem viuus ſeruari potuit. Hybernum vellus pallidius aeſtiuo gerunt, gryſeo-exalbidum, ſubhirtum,

tum; pilis ſeſquipollicaribus, in dorſo criſpulis vel vndatis conſtans. Hoc primo ſtatim vere, maturius paulo quam in Caballis domeſticis, defluit ſenſim, ſuccedente ſub exitum Maii aeſtiuo pilo breui, ſtrictiſſimo, eleganter laeuigato, qualis in Equis bene curatis eſſe ſolet.

Habui pro deſcriptione, quam hic ſiſto, praeter pelles complures, Hemioni foemellam integram, circiter triennem, quae d. 26 Maii 1772. ad Lacum Tarei Dauuriae occiſa fuerat. Ab aeſtu vernali ſummo tum regnante iam initium corruptionis ſenſerat, vt Deſcriptio et Anatome, praeſertim in loco omnibus vitae commodis deſtituto, ſub tentorio, in nuda terra, non ſine taedio, nauſea et labore confici potuerit. Impedimento in poſteriore adhuc fuere vulnera animali inflicta. Attamen quantum potui omnia accuratiſſime luſtraui; id vnum dolens, quod in deſerta regione, ſolus, ſine auxilio tum conſtitutus, non ſuffecerim lanienae Equi ſimul pro accuratiſſima partium comparatione inſtituendae; quem in finem itaque accuratiſſima Ill. BVFFONII deſcriptione Equi tunc ſum vſus. *Icon*, ad integrum cadauer parata (Tabula VII.), animal accuratiſſime exprimit, illo corporis ſitu, quem Tunguſi autoptae viuo animali maxime naturalem eſſe adſeuerabant. Sequitur DESCRIPTIO. Tab. VII.

Hemiono *Magnitudo* et *facies* Muli vulgaris, ſed omnibus momentis pulchrior. *Caput* equino maius, altiusque ſeu magis compreſſum; *frons* plana,

 facie

ſacie anguſtata in roſtrum deſcendente; latera capitis planiuſcula, praeſertim inter oculos et parotides, vbi diameter verticalis maxima; interuallum ramorum mandibulae excauatum.

*Oris labia* laxa, maxime ſuperius, tenuiſſime piloſa, margine fuſceſcente, extus veſtito pilis rigidis, cano albis, inflexis. Commiſſura oris, etiam intus, ſubtiliſſime piloſa; buccae interius fuſcae, papillis punctatae. — *Dentes* in vniuerſum triginta octo, adeoque binis pauciores quam in Caballo: *Primores* vtrinque ſex, *medii* (in noſtro ſpecimine congeniti) quatuor ceſtriformes, lati, acie detriti, lacunaque notati, ſubparalleli; *laterales* (nouati) minores, oblique truncati, obtuſi, valde conuergentes, ſitu omnes vt in Equo, ſuperiores erecti, inferiores pronati. *Canini* in vtroque ſexu nulli; apparuit tamen in cranio femineo alueoli veſtigium, in maxillae ſuperioris medio, inter molares et primores, interuallo. *Molares* corona equinis ſimillimi, in vtraque maxilla vtrobique tantum tres perfecti, pone quos propullulabat quartus, quintique alueolus adapertus in cranio depurgato apparebat; quorum MESSERSCHMIDIVS in maſculi cranio veſtigium nullum commemorat. — *Dens acceſſorius* ante molares ſuperiores vtrinque minutus, conoideo-obtuſus, vix 4'''. altitudine, de quibus apud eundem obſeruatorem mentio nulla. — *Palati* rugae 17. anticae latae, magisque deletae, poſticae prominentiores et latiores.

*Nares*

*Nares* intus et margine fuſceſcentes, equinarum ſimiles, patulae; cartilago vtrinque ſub naribus verrucae obtuſae, magnae inſtar protuberat. *Pili* nigricantes, longi, ſparſi circa os et nares, quorum longiſſimi (ad 2″.) in labio inferiore, mento et externo margine narium.

*Oculi* mediocres, diametro longitudinali obliqua. *Palpebrarum* margines, areaque triangularis ante canthum priorem nuda, fuſca. *Cilia* tantum in ſuperiore palpebra, ab ipſo margine paululum remota, neque ad canthos perducta, nigra, confertiſſima, longitudine 7‴. — *Pili* aliquot nigri, in quibus duo longiſſimi (2″. 3‴) proſtrati, infra canthum anticum oculi per zygoma ſparſi. — *Periophthalmium* album, opacum, latitudine 7‴. vsque ad pupillam fere extenſile, lunula in medio marginali, nigricante notatum. *Albugo* circa corneam fuſconigreſcit; *Irides* obſcure cinereae, rugis radiatae; *Pupillae* oblongae, directione diametri oculi obliquae, vel canthis reſpondentes.

*Aures* equinis multo maiores, pulchre arrectae, acutae, extus corpori concolores, margine verſus apicem, ipſoque apice interius fuſcae, intus villo per ambitum largo, ſubcriſpo et exalbido conniuentes, in cauitate nuda ſcamnatae porcis diſtiche villoſis, duobus ſecundum exteriorem marginem parallelis, vno interiori vicino.

*Collum* gracile et teretius equino, compreſſum. *Iuba* ab occipite ad ſcapulas aequabilis, erecta, equi-

na multo mollior et qualis in equino pullo ſolet eſſe, fuſca, ſummitatibus pilorum (ad $3''$. $6'''$. aequantium) gryſeis. *Vertex* inter oculos et aures totus villo molli, breui, iubae concolore, loco *capronae*, cuius altitudo ſumma $1''$. $3'''$.

*Truncus* longiuſculus, compreſſus, pectore maxime carinato-gibbo, dorſo rectiuſculo, leuiter *arcuato*, caeterum angulato, fere vt in Aſino.

*Artus* neruoſi, pulcri, longi atque graciles, femoraque macilenta, vt in Mulis. *Calli* loco *area* in latere brachii interno repanda, ovalis, ſuperius acuta, nigra, nuda, epidermide duriuſcula tecta (dum forte callus vna cum pilo defluxerat). Huius longitudo $2''$. $7'''$. latitudo $1''$. $6\frac{1}{2}'''$ aequat. In poſticis pedibus calli veſtigium omnino nullum. — *Bulbus* pedis ſupra vngulam laeuis, inermis, poſtice pilis longioribus, in penicillum confluentibus ſubbarbatus. In anticis ad penicillum interius macula nigra, exterius litura fuſca remotior; in poſticis ſupra penicilli baſin liturae duae obſoletae. — *Vngulae* nigrae, duriſſimae, laeues, oblongae, fere dimidiato-conicae, dorſo conuexo-ſubangulatae, ſubtus cauae; *chelidon* dura, hiulca, didyma; margo vngularum pluries inciſus.

*Cauda* vaccinae ſimilis, *tenore* tenui, tereti, ab ano ad medium ſubtus longitudinaliter nudo; veſtita *ſetis* a baſi ad medium breuioribus, ſtrictis, corpori concoloribus, ſubtus fuſcis; hinc in extremitatem floccoſam ſetis longioribus (ad $9''$.), nigris.

*Villus*

*Villus* hybernus, quem in pellibus vidi, bipollicaris, ſubhirtus et in tergore vndulatus, camelini fere inſtar mollis, inferne cinereo-fuſceſcens, extus gryſeus. *Aeſtiuus pilus* (vix $3\frac{1}{2}'''$.) breuis, elegantiſſime laeuigatus, paſſim pulcre vorticoſus, nullibi (vt eſt in Zebra) contrarius. — *Sutura* pilis adſcendenti-diuergentibus diſcors, per frontem longitudinalis; *Alia* a medio ſupercilio antrorſum vergens, pilis longioribus. — *Vortices*: vtrinque obſoletus ad iubam pone occiput; ſub initio colli ſutura breuis, deſcendens, dextrorſum intorta in vortices duos approximatos; duo vortices ſub baſi colli, non exacte oppoſiti, confluentes in ſuturam a medio fere collo per ſternum longitudinalem; dein magnus vtrinque ante commiſſuram ſcapulae; porro alius vtrinque inſignis diuergens in latere thoracis, ad armos; ſupra quem diſcordia pilorum cruciformis. Alius item vortex ante flexuram armorum; vorticulus in ipſo angulo cubiti, ſutura ad medium brachium deſcendens; vortex vtrinque ante vbera; alius ante femora in hypochondriis, aliusque inſignis ante trochanterem, a quo diſcordia pilorum per foſſam antefemoralem deſcendens, inter quam et vorticem antefemoralem occurſu pilorum ſutura transuerſa hypochondrii oritur.

*Color* extremo roſtro nudiuſculo albidus, hinc ad capronam fulueſcens, in ceruice gryſeo-albidus, in trunco ſuperius toto dilutiſſime gryſeo-fulueſcens (quod Galli vocant *Iſabel griſâtre*), verſus latera dilutior, dilutiſſimus per artus anteriores anterius, et poſticos

poſticos exterius; albidus in clunibus, artubus intus et trunco ſubtus. *Lorum* ſeu linea ſpinalis teſtaceo-nigra a iuba vsque in caudam longitudinaliter decurrens, ſupra lumbos lateſcens et ſublanceolata, verſus caudam adtenuata, et vsque in floccum caudae producta. *Pili* ſetoſi, vngularum coronam cingentes nigricant.

*Vber* nudum, nigreſcens, *papillis* binis, brevibus, craſſis, obtuſis. *Plica* transuerſa cutis inter femora, pone vber, remotiuscula. *Vulua* (ſub ano haemiſphaerico) oblonga, bilabiata, labiis tumidulis, extus fuſcis, ſubpiloſis, longitudine 3″. 6‴. a quarum commiſſura rhaphe nuda nigra inter femora decurrit. Intra commiſſuram labiorum inferam *ſinus* laxus, rugoſus, nigricans, in quo *caruncula* compreſſa, inter *duas* maiores, rugoſo-hiulcas.

*Menſurae* proportionum, ſi vnquam in Zoologia, certe iis in generibus neceſſariae, in quibus ſpecies adeo inter ſe ſimiles a Natura ſunt redditae, vt quaſi ad vnum omnes ectypum efformatae videri poſſint. Itaque minutioſus in tradendis iis eſſe debeo, omnesque ita exegi, vt cum *Buffonianis* Caballi menſuris comparari queant. — *Pondus* partitim ſtatera ſuſpenſi animalis quingentas ſexagenas Libras medicas aequauit.

| | |
|---|---|
| Longitudo ab interuallo aurium ad vsque anum - - - - | 5′. 1″. 3‴. |
| —— capitis ſigillatim - - - | 1. 8. 6. |
| —— a ſummo labio ad anum - - | 6. 7. 10. |

Altitu-

| | | | |
|---|---|---|---|
| Altitudo animalis anterior a ſpina inter-ſcapulari ad calcem menſurata - | 3′. | 9″. | 9‴. |
| Eadem poſtice a lumbari ſpina ad calcem | 4. | 3. | 6. |
| Interuallum inter antica brachia ad pectus, multo minor quam in equo - | 0. | 4. | 0. |
| Circumferentia roſtri pone nares - | 1. | 1. | 6. |
| —— oris ab angulo ad angulum per labium ſuperius - - - - - | 0. | 8. | 8. |
| Latitudo labii ſuperioris ſub naribus - | 0. | 3. | 11. |
| Diſtantia inter angulos maxillae inferioris | 0. | 2. | 4. |
| —— narium inter ſe antico ſinu - | 0. | 2. | 1. |
| —— —— poſtico ſinu - - - | 0. | 2. | 6½. |
| —— ab apice labii ad canthum oculorum | 1. | 0. | 7. |
| —— a cantho poſtico ad aurem - | 0. | 4. | 5. |
| Diameter frontis inter ſupercilia - - | 0. | 6. | 8. |
| —— oculi a cantho ad canthum - - | 0. | 1. | 6. |
| Apertura oculi - - - - | 0. | 0. | 9. |
| Diſtantia canthorum oculi filo per frontem planam ducto - - - | 0. | 6. | 10. |
| —— —— recta axi - - - | 0. | 5. | 6. |
| Circumferentia capitis ante oculos - | 2. | 0. | 5. |
| —— capitis ad initium gulae et ante aures - - - - - | 2. | 1. | 9. |
| —— —— paulo pone oculos maxima - | 2. | 3. | 6. |
| Longitudo narium - - - - | 0. | 1. | 8. |
| —— aurium ad occiput - - | 0. | 7. | 2. |
| —— externae aperturae - - - | 0. | 6. | 8. |
| Circumferentia aurium baſi - - | 0. | 5. | 4. |
| —— in medio a margine ad marginem | 0. | 3. | 10. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Diſtantia aurium filo per gulam ab aperturis circumducto - - - | 1'. | 6''. | 3'''. |
| —— aurium per verticem - - | 0. | 4. | 3. |
| Altitudo capitis a ſumma orbita ad angulos maxillae inferioris - - | 0. | 9. | 0. |
| —— roſtri, medio inter oculos et nares | 0. | 7. | 2. |
| Longitudo colli - - - - - | 1. | 5. | 0. |
| Circumferentia colli ad caput - - | 1. | 10. | 9. |
| —— —— ad humeros - - | 2. | 3. | 2. |
| Latitudo colli in medio a iuba ad tracheam transuerſa - - - - - | 0. | 8. | 6. |
| Circumferentia thoracis ad armos - | 3. | 8. | 6. |
| —— trunci in medio - - - | 4. | 2. | 0. |
| —— —— ad femora (*) - - - | 4. | 0. | 0. |
| Longitudo tenoris caudae - - | 1. | 4. | 1. |
| ——flocci caudam exſuperantis - - | 0. | 8. | 2. |
| Circumferentia tenoris baſi - - | 0. | 5. | 3. |
| Longitudo humeri - - - | 0. | 9. | 5. |
| ———— brachii - - - - | 1. | 2. | 2. |
| Diſtantia callorum brachii ſupra flexuram | 0. | 5. | 1. |
| A cubiti flexura ad calcem - - | 2. | 4. | 6. |
| Longitudo cruris ſ. gambae - - | 0. | 9. | 4. |
| A flexura gambae ad veſtigium - | 1. | 3. | 1. |
| Ab articulo bulbi pedis ad vngulae marginem - - - - - | 0. | 7. | 10. |
| Longitudo pedunculi vngulae - - | 0. | 4. | 0. |

Lon-

(*) Notandum ad has menſuras, animal ab interna putredire iam inflatum fuiſſe, nec tumorem omnem, licet inciſione paruula facta, ſubſediſſe.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Longitudo vngulae ſeu veſtigii - - | 0. | 4. | 3. |
| Eiusdem latitudo - - - - | 0. | 3. | 0. |
| —— altitudo anterius - - - | 0. | 3. | 0. |
| Circumferentia vngulae ad coronam - | 0. | 8. | 10½. |
| ——— per ambitum - - - | 0. | 11. | 8. |
| ——— pedunculi vngulae - - | 0. | 4. | 9. |
| ——— bulbi pedis - - - | 0. | 7. | 3. |
| ——— gambae anticae - - - | 0. | 5. | 0. |
| ——— articuli eiusdem - - | 0. | 8. | 8. |
| ——— brachii ad eandem flexuram - | 0. | 7. | 2. |
| ——— brachii ſuperius - - | 1. | 1. | 3. |
| Longitudo femoris - - - | 1. | 3. | 0. |
| Latitudo eiusdem ſumma - - - | 1. | 0. | 0. |
| —— tibiae - - - - - | 0. | 6. | 7. |
| Longitudo tibiae - - - - | 1. | 0. | 10. |
| —— gambae ſeu cruris poſtici - - | 1. | 2. | 5. |
| A flexura tibiae ad veſtigium - - | 2. | 3. | 0. |
| A calcanei flexura ad calcem - - | 1. | 3. | 0. |
| Longitudo pedunculi vngulae - - | 0. | 4. | 2. |
| Ab articulo phalangis ad vngulae marginem - - - - - | 0. | 7. | 11. |
| Vngulae poſticae altitudo - - - | 0. | 3. | 6. |
| —— longitudo per veſtigium - - | 0. | 4. | 3. |
| —— latitudo ſumma - - - | 0. | 3. | 0. |
| —— circumferentia per ambitum - | 0. | 11. | 10. |
| Circumferentia vngulae ad coronam - | 0. | 8. | 5. |
| —— pedunculi vngulae - - - | 0. | 5 | 1. |
| —— bulbi pedis - - - - | 0. | 7. | 7. |
| —— gambae ſiue cruris - - | 0. | 5. | 7. |
| —— tibiae ad flexuram - - - | 1. | 3. | 0. |

Fff 2 Circum-

Circumferentia femoris ad corpus - - $1^{\prime}. 9^{\prime\prime}. 5^{\prime\prime\prime}$.
Diſtantia vberum a vulua - - - - 1. 0. 0.

Partium internarum ſcrutinium ſequentia notatu digniora exhibuit: *Hepar* trilobum, lobo dextro maximo, intermedio minore tripartito (cuius dexterior portio bicrenata), lobuloque inſuper acceſſorio papillari ex interiori facie prominente. *Cyſtis* bilaria plane nulla. *Lien* magnus, oblongo ſubtriangularis, planus, ventriculo per ſuſpenſorium latum adnexus. *Pancreas* diffuſum.

*Situs coli* atque *coeci*, ſine vlla notabili differentia, vt in Equo ſe habuit. *Ventriculi* figura magis oblonga, quam in Equo, arcu maiore ex adverſo oeſophagi obſolete impreſſo, hinc verſus pylorum magis ventricoſo. *Oeſphagus* diametro pollicis. *Inteſtinum tenue* longitudine $22\frac{1}{2}$ vlnarum ruthenicarum ſeu quinquaginta circiter pedum pariſinorum, lumine inaequali, a circumferentia $4^{\prime\prime}$. ad $6^{\prime\prime}. 10^{\prime\prime\prime}$ variante. *Coecum* ingens, celluloſum, equino ſimillimum, longitudine ſesquitripedali, octoque pollicum diametro. *Colon* itidem equini adinſtar cellulis criſpatum, longum 9 pedes cum dimidio, diametro plus quam quadripollicari. *Rectum* cellulis deſtitutum, $5\frac{1}{2}$ pedum longitudine.

*Renes* erant pugno maiores. *Vterus* bicornis, cuius *vagina* longitudine 12 pollices aequabat. *Vrethrae* orificium a labiis vuluae introrſum ad $5^{\prime\prime}. 6^{\prime\prime\prime}$. remotum, digitum facile admittens, valuula cutacea, perampla contectum. *Vteri* orificium digito patu-

patulum, collum 5''. intus rugis longitudinalibus porcatum; *Cornua* non valde elongata. MESSERSCHMIDIVS poſt xx Auguſti femellam Hemioni diſſecans in altero cornu inuenit *foetum* (vt eius verbis vtar) "mure domeſtico fere maiorem, ſuis membranis inuolutum. *Chorion* libere fluctuans, nullis condylomatibus vel placentis, neque in chorio, neque in vteri parietibus vllibi conſpicuis. *Ouarium* eius lateris erat ouo columbino ſubpar,, (auctum certe corpore luteo) "reniforme, durum, compactum; cum tuba Fallopiana tortuoſe ad vterum procurrente et carunculae maioris ope in interno vterini cornu cauo praecluſa. Ex ouario per longitudinem diſſecto eximi nudis digitis potuerunt ouula fere quina, piſo aequalia, membranacea, diaphana, humore limpido, flaueſcente ſcatentia, quae aquae feruenti iniecta momento citius coagulabantur in duritiem albuminis gallinacei, cum aliqua tamen mucciditate,,. Haec MESSERSCHMIDIVS.

*Thoracis* cauum peramplum. *Pulmo* vterque bilobus; dextro acceſſorius *lobus impar* praelongus, retroflexus, cum ſiniſtro quoque pulmone continua ſubſtantia cohaerens adeoque vere intermedius et mediaſtinus. *Cor* vt in Aſino, maximum, mole caput pueri decennis aequans, longitudine pariter atque diametro baſeos circiter ſpithamali, conico-acutum. — *Thymus* glandula circa manubrium ſterni parenchymate diffuſa, cordis vaſa atque tracheam obtegit.

SCELETI oſſa equinis admodum ſimilia, ita vt vix deſcriptione indigeant; imprimis differt cranium, quod itaque cum equino accuratius conferam. *Frons*, in Hemioni cranio, cum roſtro in continuo plano rectilineo pergit; *bregmata* conuexiora, *criſta* occipitalis atque *condyli* prominentiores quam in Equo; *maxilla* inferior multo latior, angulo circulari quidem, ſed pleniore. *Orbitae* circulares, ſed antice inciſura et crena lacera ad foramen ſupraciliare. *Cerebri cauerna* vix ouo anſerino capacior, diametro longitudinali 3''. 5'''. trauſuerſali 2''. 6'''. Occipitales *condyli* quaſi collo eleuati proprio, cuius circumferentia 7''. *Facies taurina* vel bubalina potius, quam D'AVBENTONO obſeruante equinum cranium inuerſum ab occipitali latere inſpicientibus offert, ob inſignem illam prominentiam condylorum, proceſſus hyoïdeos ſubaequantium, in Hemiono paululum deformata. — Reliqua vix differre viſa ſunt. Cranii totius, cum maxilla plano cuidam impoſiti, altitudo verticalis ad criſtam occipitalem erit 10''. longitudo a ſumma criſta ad marginem alueolarem maxillae ſuperioris 18''. 7'''. baſis trianguli, quam conſtituit longitudo maxillae inferioris, a dentibus primoribus ad conuexitatem angulorum, 11''. 7'''.

| | |
|---|---|
| Latitudo cranii maxima inter poſticos margines orbitarum - - - | 0'. 6''. 8'''. |
| —— minima inter frontales inciſuras orbitarum - - - - - | 0. 4. 7½. |

Diſtan-

| | | | |
|---|---|---|---|
| Diſtantia inter angulos maxillae inferioris | 0'. | 2''. | 8'''. |
| —— inter condylorum collum - - | 0. | 4. | 2. |
| Subtenſa maxillae inferioris a ſummis dentibus ad condylos ſummos - | 1. | 2 | 1. |
| Altitudo ramorum maxillae ab angulis ad condylos - - - - - | 0. | 6. | 9. |
| —— ad proceſſus coronoideos - - | 0. | 8. | 2. |
| Diſtantia ramorum mandibulae ad angulos | 0. | 3. | 7$\frac{1}{2}$. |
| Latitudo oſſis maxillae infer. ſumma ad angulos - - - - - | 0. | 4. | 1. |
| —— —— ad baſin condylorum - - | 0. | 2. | 3$\frac{1}{2}$. |
| Diameter orbitarum - - - | 0. | 2. | 1$\frac{1}{2}$. |
| Latitudo oſſium naſi ad frontem - - | 0. | 4. | 11. |
| —— —— verſus extremitatem - - | 0. | 2. | 4. |
| Oſſium naſi pars vltra ſinum prominens | 0 | 2. | 0. |
| Longitudo maxillae ſup. vltra hiatum narium | 0. | 4. | 9. |
| Altitudo oſſis occipitalis a foramine ouali ad marginem criſtae - - | 0. | 2. | 6. |
| Diameter foraminis oualis verticalis - | 0. | 1. | 1$\frac{1}{4}$. |
| —— —— tranſuerſus inter condylos - | 0. | 1. | $\frac{3}{4}$. |
| —— cranii inter hiatus zygomaticos minima - - - - - - | 0. | 3. | 1. |
| —— —— inter proceſſus coronoideos maxima - - - - - - | 0. | 3. | 9$\frac{1}{2}$. |
| Diſtantia inter molares poſtremos - | 0. | 2. | 4. |
| —— —— anticos - - - - | 0. | 1. | 4. |
| Latitudo iſthmi maxillae inferioris - | 0. | 1. | 2$\frac{3}{4}$. |
| Arcus alueolaris dentium primorum - | 0. | 3. | 6. |
| Latitudo dentium primorum ſimul - | 0. | 3. | 11. |
| —— —— mediorum ſupra - - | 0. | 0. | 8. |

Eorum-

| | | | |
|---|---|---|---|
| Eorundem craſſities - - - - | $0'$. | $0''$. | $4\frac{1}{4}'''$. |
| ——— altitudo - - - - | 0. | 0. | 8. |
| Dentium molarium poſteriorum latitudo | 0. | 1. | 2. |
| Latitudo primorum molarium ſuperius - | 0. | 1. | 7. |
| —— —— inferius - - - | 0. | 1. | $3\frac{1}{5}$. |
| Craſſities molarium ſumma ſuperius - | 0. | 0. | 11. |
| —— —— inferius - - - - | 0. | 0. | 7. |
| Altitudo molarium extra alueolos - | 0. | 0. | 6. |

*Vertebrae* in vniuerſum 55. *Thoracis* 18. ſubaequales; et *coſtae* vtrinque totidem, quarum ſeptem verae, reliquae ſpuriae. *Lumbares* vetebrae quinque, quarum tertia proceſſibus transuerſis latiſſima; *Os-ſacrum* ſeptempartitum; *caudae* vertebrae 18. a prima ($1''$. $1\frac{1}{2}'''$.) ſenſim breuiores. Extremorum oſſa ab equinis vix diuerſa. *Carpus* octo oſſiculorum, diuerſae molis et figurae, geminata ſerie ſibi incumbentium. *Tarſus* ex oſſiculis ſenis, calcaneo, aſtragalo, ſcaphoide, cuboide et duobus innominatis, a ſtructura ruminantium alienis, vt in Equo, compoſitus. Extremitatum menſurae ſupra traditae ſunt; taedioſum foret minutas in forma oſſium differentias ſectari, quae ſaepe vix in oculos cadunt.

Omnes vt breuiter colligam differentias, *mole capitis* inter Caballum et Aſinum medius eſt Hemionus, ſed longius habet vtroque. Eiusdem et *aurium* proportione circiter cum Zebra conuenit. *Dorſi* formam plane ſingularem obtinet, angulatam quidem, vti Aſino, ſed arcuatam ſimul, qualis in nullo congenerum animalium obſeruatur. *Trunci* reliqua

liqua circumcaeſura, *vngulis*que ſimilior Aſino, *artuum* proportione magis cum Caballo conuenit. *Caudam* etiam aſinina magis depilem gerit, fere qualis in Zebra eſt, ſed longiorem et vaccinae ſimilem. *Colore* conſtanti differt ab omnibus, *loro* ſpinali quidem Aſini, ſed nulla trabe transuerſim cruciato, diuerſus. Tota forma vtique magis cum hybrido Mulo, quam cum congeneribus ſpeciebus, conſentit, a quo, niſi cauda et forma ſpinae, admodum parum differre videretur. Sed ex omnibus ſatis apparet peculiarem eſſe et a citatis omnibus diſtinctiſſimam ſpeciem, quae per ſe propagatur et ita propria eſt Aſiae, vti Zebra Africae, quum contra communes vtrique terrae videantur eſſe Caballus et Aſinus.

# TETRAO ARENARIA,

## DESCRIBENTE

## *P. S. PALLAS.*

Intactum ornithologis Tetraonem mihi videor deſcribere, qui tamen notabili ſimilitudine affinis eſt *Alchatae* Pyreneas Caucaſeasque Alpes incolenti, inter quam et *Tetraonem*, quam alibi (*) deſcripſi, *paradoxam* quaſi medium locum occupat. Noſtra non, vti prior, in locis montoſis viuit, ſed poſterioris ad exemplum arenoſis tantum deſertis delectatur. Aſt licet arenas ad Irtin et in Dauuria peragrauerim vaſtiſſimas, nunquam tamen in Sibiria hanc obſeruaui ſpeciem, quae demum in ſabuletis fluctuantibus, medio deſerto inter Rhymnum et Volgam extenſis, circaque Volgam verſus Aſtrachaniam late patentibus, copioſiſſime oblata eſt, quando deſerta illa An. 1773. aeſtate, ſequentique vere perluſtraui. Semina ſcilicet Aſtragalorum maiora praeſertim pro victu eligit, qualia ſunt alopecuroidis, Ciceris et phyſodis inter arenoſos colles in laudata regione copioſiſſime prouenientium, perque totam aeſtatem ſuperfluum Tetraonibus noſtris pabulum praebentium. Neque dubito defectui Aſtragalorum tribuendum eſſe, quod in orientalioribus Tatariae magnae arenis,

(*) Reiſe durch Rußland Tom. II. pag. 712.

arenis, vbi horum parcior eſt prouentus, non occurrant, ſaltim quousque haec deſerta a Curioſis explorata nunc ſunt.

Primo vere adſunt Tetraones arenariae; an vero in praedictis deſertis hybernent, non pro certo affirmauerim. Forſan Alaudarum atque Perdicum adinſtar illis annis, quae tepidam cum exili niue hyemen in regionibus iſtis ferunt, remanere, rigidiore bruma verſus Caucaſo vicina loca inque calidiorem Perſiam migrare ſolent. Obſeruaui ſemper per paria volantes, et incubationis quoque tempore, quod in Iunium cadit, Mas ſemper cum ſocia frequentat aquas, quarum haec ſpecies maxime auida eſt. Solent autem matutino praeſertim tempore, verſusque meridiem et occidente ſole ad hydreumata in deſerto a Nomadibus effoſſa, lacunasque aquatum venire, vbi ſiticuloſiſſimae toto pectore incumbunt ripis, vt lympha continuo tractu hauſta, Columbarum adinſtar, impleantur. Eoque ſolo fere tempore accedentem venatorem non ſentiunt, alioquin cautiſſimae, nec niſi inter volandum occidendae. Propter eandem ſiticuloſitatem nunquam longe ab aquis recedunt, ſed in vicinia nidulantur, certumque praebent per torridas illas ſolitudines peregrinantibus indicium vicinitatis aquarum. Nuſpiam copioſiores mihi occurrerunt, quam circa arenas ſcaturiginoſas ad *Burlu-chuduk*, et in locis, quae ob venarum aquae et hydreumatum copiam Quadraginta et Centum fontes (*Dytſchin* et *Soon chuduk*) a Cal-

 muccis

muccis appellantur ; et in genere, quo propius Volgae fluuio eo frequentiores, frequentes etiam in deſerto Cumano, contra in aridiſſimis et ſqualidis campis verſus Rhymnum nullae occurrunt. *Volant* ob alarum formam et magnitudinem leniter et continenter, columbarum fere inſtar, quas aliquantum et habitu referunt. Inter volandum (ſedentes vero nunquam) ſtridulam et amoenam edunt *vocem*, Pratincolae fere ſimilem, qua longius exaudiri poſſunt, et propter quam forte a Tataris ad Achtubam diſpalantibus, qui Caucaſea ſunt progenies, nomen *Dſherak* meruerunt. *Oua* pariunt columbinis maiora, albo-pallida, quae initio Iunii in diſſectis feminis matura inueni. *Nidum* vero, licet diligenter quaeſitum, venatores noſtri nunquam inuenerunt.

Tab.VIII. *Magnitudine* haec Tetrao Perdicem ſuperat, *habitu* Alchatam refert. *Roſtrum* quam in Perdice tenuius, prorſus vt in Alchata, cinereo-coeruleſcens, apice nigricante. *Lingua* anguſta, canaliculata, apice integerrima. *Palpebrae* nudae, pallidae, marginibus ſubpapilloſis, flaueſcentibus. *Supercilia* plumoſa, tecta.

*Caput* albido-cinereum in MASCVLIS, vertice vsque in ceruicem gryſeo-flaueſcenti nebuloſo. *Gula* ferrugineo-fulua, colore verſus latera colli diffuſo diluto, trianguloque atro ſubmedio collo terminata. *Collum* iugulumque totum, in hoc ſexu, cano albida, plumis veſtita ſingularibus truncatis, denſio-

denſioribus, elaſticis, nitidis, columbarum ſimilibus. *Ceruix* inferior, dorſum totum aduſque caudam, alarumque baſes plumis teſtaceo-albidis, annulo ſingulis fuſco terminali, maculam ouatam luteſcentem cingente, notatis variantur. Inter pectus et iugulum *circulus* ater, hinc *pectus* albidum; ſed *abdomen*, femora, criſſum atra. *Subcaudales* albae, ſtrigis aliquot transuerſis nigris.

*Alae* magnae, acutiſſimae, *ſubtus* cum tectricibus, pennisque hypochondriorum ſubalaribus albae. Supra *tectrices* primariae remigibus concolores, caneſcentes; *ſecundariae* extus luteo-fulueſcentes, efficientes quaſi ſpeculum alare huius coloris, baſi fuſcente teſtaceoque nebuloſae. *Remiges* primariae, praeſertim quinae extimae, acutiſſimae, compoſitis alis cauda vix breuiores; *ſecundariae* 11-21, vt et primariae omnes, fuſco-caneſcentes, baſi oblique albae, pleraeque apice exterius leuiter ſinuatae; *intimae* 22-27. dilutiſſime teſtaceo cinereoque vndulatae, extremo caneſcenti-cinereae, duae margine exteriore, reliquae apice exterius toto luteae.

*Cauda* acuta; *rectrices* ſedecim, intermediae duae fulueſcentes, taeniolis transuerſis fuſcis; reliquae fuſco gryſeoque crebro faſciatae, apice albae.

FEMINA paulo maior Mare hucusque deſcripto, a quo differt *colore* per totum corpus pallide flaueſcente, in capite, collo, iuguloque nigro

 *guttato*

*guttato*, in dorſo *faſciolis* transuerſis ſagittatis, crebris variegato; *Pectus* illi pariter albidum, circulo nigro iugulum diſtinguente obſoletiore; *Gula* flauedine vix vlla tincta, lunula transuerſa nigra minus conſpicua; abdomen atque criſſum etiam huic *atra*, ſubcaudales plumae extremo albae. Notabile quoque feminis plumas circa collum iugulumque molliores eſſe quam in mare, acutas, et vndique diuerſas. *Alae* obſoletius, caeterum vt in mare, coloratae.

*Pedes* Tetraoni arenariae, pariter vt Alchatae, exiles; *Tibiae* breuiculae, anticae fere ad digitos vsque plumis pallidis, fuſco punctatis veſtitae; *Digiti* breues, diſcreti, nudi, ſubtus calloſi, praeſertim tubere tali haemiſphaerico; *plicae* inter anticos digitos craſſae, dimidios fere digitos connectentes; *poſticus* a calce remotior, verruciformis, *vngue* ſubulato, introrſum vergente, ceu calcare, prominulus; anticorum *vngues* craſſi, obtuſi, nigri.

*Pondus* huius auis ſupra Libram medicam inter binas, ternasque fere vncias variat. *Menſurae* ſequentes adnotari merentur:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Longitudo a ſummo roſtro ad vropygium | $0^{\prime}$. | $10^{\prime\prime}$. | $0^{\prime\prime\prime}$. |
| —— caudae - - - - - | 0. | 9. | 3. |
| —— roſtri vsque ad oris angulos - | 0. | 0. | $8\frac{1}{3}$. |
| —— vlnae alarum - - - - | 0. | 9. | 0. |
| —— expanſarum alarum - - - | 2. | 2. | 10. |
| —— tibiae - - - - - - | 0. | 1. | 0. |
| —— digitorum anticorum medii cum $4^{\prime\prime\prime}$. vngue - - - - - - | 0. | 1. | 0. |
| —— extimi cum $3^{\prime\prime\prime}$. vngue - - | 0. | 0. | $8\frac{1}{2}$. |

Longi-

Longitudo intimi cum vngue pari - 0. 0. 7.
—— poſtici vnguis fere ſeſſilis - - 0. 0. 2.

*Prolobum* in omnibus vacuum inueni, mediocri capicite. *Ventriculus* oui columbini mole, apice bilobus, intus nucis facile capax, adeoque tenui ſubſtantia debiliter triturans Aſtragalorum ſemina emollita, cum glarea multa permixta. *Inteſtinum* ſpithamas fere ſeſquitres adaequat; *coeca* bina ſpithamalia, digitali longitudine ab ano remota. *Teſtes* adhuc initio Iunii maſculis turgidiſſimi, lutei, vt facile appareat omnium Tetraonum in noſtris terris hanc ſpeciem tardiſſime prurire atque pullos educare.

OBSER-

# OBSERVATIONES
# IN GADO LOTA
## INSTITVTAE,

Auctore

*I. T. KOELREVTER.*

Gadus Lota (*) adeo notus inter Europaeos eſt piſcis, vt deſcriptione quidem non egeat; Attamen aliqua in conſideratione eius obſeruaui, quae Ichthyologorum induſtriam ſuffugerunt, et in philoſophicam praeſertim piſcium cognitionem redundant. Itaque ea breuiter e deſcriptione Lotae hic excerpſiſſe, ideo haud inutile viſum eſt, quod ea deſcriptores hodiernos admonere poterunt, ne in externa obiectorum deſcriptione et in ſuperficie quaſi haerentes intimius naturae examen negligant, quod ad Phyſiologicos nobilioresque Zoographiae vſus ducere paſſim poteſt et plerumque etiam in tritiſſimis atten-

(*) Gadus (*Lota*) dipterygius cirratus, maxillis aequalibus. LINN. *Syſt. nat. ed. XII. p. 440. n. 14. Fn. Suec. 315.*
Gadus ſ. Silurus cirro in mente vnico *Art. gen. 22. Syn. 38. Sp. 107.*
Muſtela fluuiatilis, GESN. *Hiſt. piſc. Tigur. 1558. p. 209.* cum fig. *Aldrov. Ichth. 648. 577. Ionſt. piſc. 146. t. 28. f. 6 et 168. t. 29. f. 10. Salv. piſc. 213. Schonev. ichth. 49. Charl. onom. 159. Will. ichth. 125. Raj. piſc. 67, 68.*

attentos ſcrutatores non ſine inuenti cuiusdam vel vtilis vel curioſi praemio dimittit. Primum itaque externarum partium peculiaribus quibusdam momentis inhaerebo, anatomica notatu digniora in fine adnexurus.

Plane ſingulare primum eſt, quod in Lota saepius obſeruare mihi licuit, poſt mortem non tantum opercula cum membrana brachioſtega valde diduci et item os tanto rictu hiare, vt vsque in fauces proſpectus liber pateat; ſed etiam dorſum in ſtatu exanimi ſolito magis depreſſum, quaſi opiſthotonicum, inferiorem contra corporis ambitum magis arcuatum et ventricoſum deprehendi, quam in viuo piſce fuerat; id quod in aliis huiusmodi aquatilibus ſub iisdem circumſtantiis euenire haud ſolet.

*Narium* foramina in Lota quaterna, eaque valde inter ſe remota adſunt: harum oculis proxima a margine orbitae duarum linearum interuallo diſtant, ſubrotunda nec membrana tecta. Pari ab his diſtantia anterius paulloque ſuperius ſita ſunt alia, anguſtiora illis, et ad marginem poſteriorem *membranula* lineari, tres quatuorue lineas longa inſtructa, quam quis facile barbulam vocaret, ſi in piſce viuente, aquae immiſſo, erectam ac fluctuantem eam viderit. Haecce duo narium vtrinque foramina aquae peruia inuicem ſunt.

Sub capitis cute varii latent *ſinus* muciferi, quorum vnus vtrinque ſuper oculum lineae lateralis verſus principium excurrit atque illud excipit. Si

 in

in hunc, cute antea eum in finem cultello diſſecta, aerem inflaueris, facile omnes reliqui eiusdem lateris, ſubinde etiam alterius ſimul diſtenduntur. *Linea lateralis*, quam ſquamae valde exiguae, aggregatae, caeterisque multo minores conſtituunt, toto ſuo decurſu de via recta parum declinat. Latent ſub hac linea, ab eius principio ad tertiam totius piſcis longitudinis partem, oſſicula decem (fortaſſis et plura, vlterius enim haud proſecutus ſum) ſeu canaliculi dimidiati, muciferi, a primo ad vltimum magnitudine ſenſim decreſcentes. Primus isque maximus, ſc. $2\frac{1}{2}$ lin. longus, antice obtuſus ac latus, poſtice vero acuminatus et anguſtus, ſinus cuiusdam muciflui, ſibique contigui extremo reſpondet, cauitasque ipſorum vtrique communis eſt.

Errant qui in Lota *pinnam dorſalem* tantum vnicam eamque interruptam, vt in Lucioperca, conſtituunt. Etenim prior pinna, quae breuis eſt, *re vera diſtincta* apparet a ſecunda ad caudam vsque extenſa; cutis videlicet ſquamoſa, praetereaque nihil, ſpatiolum inter vtramque intercedens occupat. Inter caudam et ſecundam dorſi itemque ani pinnam interſtitium proprie nullum eſt.

Quantum denique numerus radiorum in pinnis Lotae variare ſoleat, e ſequenti comparatione trium inuiduorum, quae diſſecui, patet:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Primae | Pector. | 21. | ventr. | 7. | dorſ. | $\frac{13}{82}$ | ani | 75. | Caudae | 42. |
| Alteri | — | 21. | — | 7. | — | $\frac{10}{74}$ | — | 59. | — | 46. |
| Tertiae | — | 19. | — | 7. | — | $\frac{13}{75}$ | — | 71. | — | 45. |

Proce-

Procedo ad internas partes, quarum in tribus ſpeciminibus inter decem et 12 pollices longitudine aequantibus comparationem inſtitui.

*Hepar* aliquantum inconſtantis, quoad lobos, figurae et proportionis eſſe ſolet. Coloris eſt pallide rubicundi, et per dimidium fere caui abdominis exporrigitur, ſuper ventriculum, appendicum pyloricarum radices ac inteſtinorum partem expanſum. Figura eius in genere quodammodo flabelliformis eſt, anguſto ſcilicet principio circa diaphragma incipit, et prout abdomen ampliatur ipſum quoque latitudine creſcit. Margo eius inferior circularis, eumque verſus tenuatur ſubſtantia. In hypochondrio dextro ſubſtantia hepatis ſino rotundato quaſi exſciſſa eſt, duodeni tantum colique flexuram excipiente. Summitas viſceris anterior lobulo oblongo aucta, qui non in omnibus praeſens eſt. Siniſtra portio in lobum grandiorem, ſub poſtica ventriculi facie ſitum, dextra in minorem, ſub coli flexura reconditum terminata. In tertio, quod diſſecui, ſpecimine potior hepatis portio in ſiniſtro hypochondrio erat recondita: dexter ſcilicet lobus acuminatus, mediae magnitudinis; intermedius ſive anterior minimus; ſiniſter omnium maximus ac bipartitus, lobulo interiore aut ſuperiore obtuſo, exteriore longiore et acuminato; nec praeter hos vllus. In eodem *Vermiculi* nonnulli albicantes filiformes, a dimidia linea ad dimidium pollicem longi, altero extremo craſſiores, altero tenuiores rugisque transuerſis notati, conuexae hepatis ſuperficiei con-

 voluti

voluti inhaerebant, quos pro Gordio marino *Lin.* agnoſco. Extrema tantum viſceris membrana coërceri, eaque facillime extricari mihi videbantur, relictis quaſi lacunis in ipſo parenchymate exſculptis, quae pro nido fuerant. Vnus etiam alterue vermiculorum inter meſenterii partem, appendices pylori connectentem, deliteſcebat, folliculo quaſi proprio inuolutus. Viuentes ii vermiculi hirudinum more pro lubitu vel contrahi vel extendi poterant, tumque ipſorum extremitates modo rotundatae, modo acuminatae viſae; ſed guttula ſpiritus vini ſuperfuſa eos momento citius necabat.

*Veſicula fellis* Lotae arcui duodeni ſubſtrata, aequalisque fere vbique latitudinis, ductum ſuum cyſticum breuiſſimum diſtantia aliquot linearum a proximis pylori appendicibus in duodenum immittit. In verminoſo illo hepate cyſtis rubicunda et bile vacua inuenta eſt.

*Oeſophagus* ſupra pollicem longus, 4 lin. circiter latus, teres, ſubſtantiae magis compactae, rugisque longitudinalibus albentibus et notabilioribus diſtinctus, quam *ventriculus*. Et *is* quidem duplam fere oeſophagi longitudinem habet, diametroque dimidium axeos paullo ſuperat, ſaccum efformans ampliorem, oblongum ac fere membranaceum, in quo partes laruarum aquaticarum, ariſtae piſcium, teſtarumque comminuta fragmenta reperiri ſolent.

*Pylorus* ſacculum minorem refert, in omnes partes 5 lineas circiter diametro aequantem, qui textu-

textura compactiore et craſſiore a ventriculo facile dignoſcitur. Ad principium colli eius anguſtioris, iugum valuuloſum, non in omnibus tamen valde conſpicuum, apparet. *Appendices* pyloricae in vno ſpecimine foemineo 25. binis ſaepe circa baſin inter ſe concretis, in alio eiusdem ſexus 29. quinque oſtiis communibus in inteſtinum hiantes, quorum duo proxime ſub pylori valuula, reliqua tria paullo inferius in triangulum poſita; in tertio 46. inque verminoſa iſta Lota, itidem foemella 40. numeratae fuerunt. Et in hac quidem omnes quatuor communibus oſtiis proxime ſub duodeni principio inſerebantur. Aderat in eadem Faſciola barbata LINN. quam in *Nouis Commentariis Petrop. Tom. XV. p.* 499 *et* 513. nouo nomine generico *Acanthocephalum* vocaui, et internae duodeni tunicae ex oppoſito papillae ductus cyſtici inhaerebat.

Hinc excipit *Duodenum* ab initio amplum ſatis, rugisque deſtitutum, quibus contra ieiunum erat inſtructum; totus praeterea inteſtinorum tractus, imprimis vero duodeni pars inferior, glandulis minimis innumeris ſcatere mihi videbatur, quae in ipſo duodeno ita conſpicuae erant, vt albentia veluti puncta per inteſtini tunicas pellucerent.

*Lien* pallide rubicundus, oblongus, planus ſere ac tenuis, circa ouarii dextri ſummitatem inteſtino recto, meſenterio mediante, leuiter adnexus aderat.

*Ouaria* (Nouembri) maxima, oblonga, ouulis minutiſſimis, pallide flaueſcentibus referta. Dextrum

 ſiniſtro

ſiniſtro multo maius; vtrumque circa inteſtini recti finem coadunatur in vnum, communique pone anum ouiductus oſtio gaudet, quod immaturis adhuc ouis externe haud conſpicuum eſt.

*Renes* duo, ſupra diaphragma mole maximi, infra hoc ad imum abdominis vsque ſuper apophyſes vertebrarum transuerſas rariori textu decurrendo, circa veſicae aereae extremitatem in vnum corpus coaleſcunt et, aucta ibi valde ſubſtantia, totum caui abdominis angulum, vlterius productum, replent.

*Veſica vrinaria* capax, rugoſa, vna parte eaque longiore libera, altera veſicae aereae, renum extremo atque peritonaeo, (quod per totam aluum eſt argentei coloris, punctis nigricantibus rariſſimis adſperſi), arcte adhaeret. Fundus eius in *vno* ſpeciminum noſtrorum recremento rubicundo, renum ſubſtantiae haud abſimili refertus, ſeptoque in duos ſinus quaſi diuiſus, quorum dexter ſiniſtro multo amplior et profundior erat. In *altero* lineari-oblonga, fundoque leuiter incurua, extus peramplo patebat orificio. *Tertio* denique varie anfractuoſa et turgida fuit. *Vrethra* ita breuis, vt fere nulla; eiusque orificium ab ouiductus oſtio lineae circiter interuallo diſtat, ani principio proximum.

Maxime memorabile conformationis momentum in *Veſica aërea* Lotae obſeruaui. Ea quidem ſimplex eſt, inferne ſubcylindrica, ſuperne ventricoſa, et ſummitate in crura duo breuia, obtuſa et ampla diuiſa, ideoque quaſi cordata, ſed per totam

caui

caui abdominis longitudinem extenſa. Pars inferior ſubcylindrica, primum anguſtior, verſus extremitatem ſenſim ampliatur, amplitudine apophyſium transuerſarum in vertebris latitudini ſiue nexui cum coſtis exacte reſpondente. In facie viſceribus obuerſa ventris veſicae, 10 lin. circiter a baſi crurum diſtantia, non exacte in medio, ſed paullo dexterius, circulus notari meretur pellucidus, piſi magnitudine, in quo tunica exterior veſicae deficit. Huic circello inſeruntur vaſa duo, ni fallor arterioſa ab aortae maiori ramo ſuper dextrum veſicae crus excurrente, ramuloſque cum hepati, tum ventriculo ac meſenterio ſubminiſtrante, prouenientia (*). Fallunt igitur ac falluntur maxime, qui vaſa iſta ſanguinea pro ductu aereo, qualem tamen nullum vsquam emittit veſica Lotae, explorato et aperto habuerunt et deſcripſerunt. Haec ipſa bina vaſa ſanguinea, ſtatim poſt ingreſſum in veſicam, in arbuſculas circiter ſex, denſas, e circulo iſto pellucido, velut e centro radiatim excurrentes, per infimas ramificationum ſubtiliſſimarum gradus iterum, iterumque ſubdiuiſas, ac plane elegantiſſimas diſpertiuntur.

Apparatus iſte plane ſpecificus, ac fabrica ipſius veſicae aereae maxime ſingularis, aperte quaſi teſtantur, naturam hic momentoſum moliri opus, ſecernendo ſc. aërem euolutum e ſanguine, cui fixus antea inhaerebat, ac ſuperfluam illius quantitatem reſor-

(*) In Perca fluuiatili venae duae cum arteriola intermedia obſeruantur.

reſorbendo, fixamque iterum ſanguinis maſſae reddendo. Vtrumque fieri debere probat 1.) ille ipſe apparatus, tam ratione diſtributionis vaſorum ſanguineorum, quam cuilibet ſecretionis organo propriam ſemper ac ab omni alia, vulgari inprimis mere nutriente, longe diuerſiſſimam Phyſiologi optime agnoſcunt, quam etiam reſpectu diuerſitatis tunicarum, glandularum aliarumque partium, hanc aëris officinam ſaepius componentium. Exempla hac in re commemoranda ſunt inter alia Ophidion barbatum L. Silurus Clarias L. Gadus Merluccius L. apud *Willughb. p.* 112. 127. 174. et Scomber Amia L. ſiue Leccia Ital. ex obſeruatione *Fracaſſati in Malpigh. Oper. omm. Lugdb.* 1687. *Tom II. p.* 144. 2.) Ductus pneumatici aliorum piſcium, fluuiatilium potiſſimum eoque vere gaudentium, ſtructura, quippe quae pro vario valuularum (*a*) quibus altera illius extremitas circa Oeſophagum vel ventriculum inſtruitur, ſitu ac conformatione aëris ſecreti non tantum quidem, quantum forte alias neceſſe eſſet, ſed ſub certis vel aquae in qua degunt, vel aëris externi conditionibus mutatis, ſuperabundantem eius partem, bullarum ſub forma, facile eructari quidem ſinit, exteriori autem aditum omnino prohibet. Praeſentia aëris in veſica piſcium, ductu iſto pneumatico reuera carentium, iugem mutuamque ipſius ſecretionem aeque ac diminutionem neceſſario

(*a*) Vid e. g. Cyprini rutili Anatomen in *Nou. Comm. Petrop. Tom. XV. p.* 501.

ceſſario praeſupponens. Piſcium autem maximam gregem, pelagicorum inprimis, quos inter Gadi, Blennii, Spari, Labri, Sciaenae, Scombri, Siluri aliique iis maxime affines, numerandi, clauſam penitus habere veſicam; minorem longe ductu aëreo inſtructam; minimamque, vel cetacei ordinis, vel abyſſo plerumque adſcriptam veſica natatoria plane carere, analogia duce contendere auſim. Largam ſane hic obſeruationum omni attentione digniſſimarum meſſem aſſiduos anatomiae comparatae, nimium quantum ſemper neglectae, cultores in poſterum eſſe facturos, perſuaſum mihi eſt, remque totam ad liquidum perduci facile poſſe, ab iis, quibus multigenos pelagi piſces ſecandi data erit occaſio, mediterraneo mihi nunc, proh dolor! plane denegata. Primam iſtius ſecretionis notionem veſica Percae fluuiatilis ac Luciopercae, ſimili vaſorum ſanguineorum apparatu inſignium: immo ipſius Gadi Callariae ac Lotae folliculus aëreus, in quibus ſingulis ductum pneumaticum, adhibita omni licet induſtria, inuenire non poteram, iam ante hos ſeptendecim annos, tunc temporis Petropoli degenti mihi ſuppeditauit; inque aliorum quoque piſcium conformationem ſtudioſius poſtea inquirendo, ac varia huc ſpectantia momenta probe computando, veritatis eius tandem penitus conuictus ſum. En igitur nouum in phyſiologicis, ac prorſus ſingulare ſecretionis genus, quod in hunc vsque diem ſi non plane ignoratum, certe a nemine rationibus ſolidioribus illuſtratum atque confirmatum eſt.

 Caete-

Caeterum quod ad ſubſtantiam veſicae aëreae in Lota attinet, tunica eius exterior, praeſertim ad ſubcylindricam partem albida, magisque opaca eſt, quam ad ventrem; hac vero ſeparata interior diaphana, perlarum ac argenti colore reſplendens, in conſpectum venit. De caetero veſica aërea vertebris, earumque apophyſibus ita arcte adhaeret, vt integra inde ſeparari haud queat.

In binis, quas diſſecui, cauitas abdominis abſoluebatur *coſtis* vna et viginti, quarum quatuor ſuperiores cum ipſis 3, 4, 5 et 6 vertebrarum corporibus, ſequentes autem cum 17 transuerſis, valdeque prominentibus earum apophyſibus coniunctae erant. *Vertebrae* trunci in his 23, caudae 39 numerantur; At in tertia numerus priorum aeque ac poſteriorum vna maior fuit.

Notanda denique ſupereſt *rima* pone brachiarum vltimam in fauces patens; quatuorque faucium *tubercula* ſeu areolae oſſeae, denticulis obſitae ac mobiles, quarum mutuo ac continuo attritu cibi interpoſiti comminuuntur. Harum duae ſuperiores, ſubrotundae, muſculo teguntur lineari, robuſto, ac pollicem circiter longo, cuius principium vtrumque tertiae, quartae et quintae potiſſimum vertebrae latus excipit; duo inferiores autem, oblongae, illisque parallelae muſculo mouentur ex angulo branchiarum antico orto.

---

LACER-

# LACERTA APODA DESCRIPTA,

Auctore

*P. S. PALLAS.*

In vniuerſo Corporum organicorum Imperio pulcherrimum contemplatori ſpectaculum offerunt Affinitates naturales, quarum vinculis Conditor vbique fere ſpecies et genera, immo ordines quoque naturales et ſummas claſſes inter ſe concatenauit, maximeque diſſimilia, addendo hinc, demendo illinc, mutando, molliterque aſſimilando diſſentientia, extinctis quaſi per gradus vmbris, continua fecit. Hanc in cogitantis atque comparantis animi delectamentum emicantem harmoniam eadem diligentia affectauit Natura, ac pulcritudinem vniuerſi, rerumque omnium in hoc globo creatarum in delicias ſenſuum vbique luxuriantem. Et ſi quidquam, certe haec duo maxime Creationis momenta homuncionum gloriolae, totius noſtri globi fines in ſe concentrantium fauerent, ſi barbarus homo aeque pulcritudine naturae moueretur, ac politiorum mortalium vbique modica manus; aut ſi non harmonica illa rerum naturalium concatenatio penitioris atque ſublimioris eſſet indaginis. Hinc non finem huiuſmodi precariam, ſed cauſam potius conſenſus naturae quaeſiuerunt recentiorum aliqui, haud tamen hucusque ad-

tigiſſe dicendi ſunt, licet *Ill.* LINNEVS eiusque diſcipulus *Nobiliſſ.* ALSTROEMERIVS magnam vtique ſpeciem veritatis praebuerint opinioni, qua contenditur: initio rerum tot modo animal a vel plantas, quot ordines naturales vel ſumma genera exſtant, creata fuiſſe, quorum adulteriis in prima mundi infantia ſenſim prognatus ſit, quem nunc perpetuum videmus, affinium et congenerum ſpecierum numerus. Quae ſi vere in rerum Natura vnquam exſtitit, per adulteria atque hybridorum propagationem, ſpecierum multiplicatio; nullam rationem video, quare ab antiquiſſimis, quorum ſcripta monumenta exſtant, ſaeculis plane ceſſauerit et non potius ad noſtra vsque tempora continuata, imo, propter auctum numerum ſpecierum e diuerſis connubiis productarum, harumque tanto maiorem analogiam et aequalitatem, frequentior etiam facta ſit, ita vt hodie vulgo videres nouas enaſci ſpecies, quae diſtinctae perſiſtant et in nouam ſtirpem multiplicarentur. At ſi noſtro aeuo adulteriis etiam maxime affinium animalium, et praeſertim hybridorum in nouas ſpecies propagationi obſtacula nouimus; quaenam olim cauſa eadem obſtacula ſuſtulit, quando deficientibus, ſecundum iſtam hypotheſin, ſpeciebus intermediis, ſtationariae paucae in vaſto Naturae campo diſpoſitae multo maiori adhuc gradu diſſimilitudinis a ſe inuicem abhorrebant? — Mihi potius videtur, et obſeruationes variae confirmant, plerumque illas ſpecies, quae inter ſe quammaxime ſunt ſimiles, tanto maiori antipathia et horrore effluuio-

fluuiorum mutuo a promiſcuis adulteriis arceri. Et licet induſtria humana hybrida produxerit multa, quorum nonnulla foecunda eſſe et ambiguam ſtirpem propagare non ſolum concedo, ſed etiam confirmo; ea tamen experientia docet ſucceſſu generationum ad alterutrius parentis formam et habitum ſenſim redire, copulisque cum primaria ſtirpe pronioribus plane deleri. Adeoque cum iis potius ſentio, qui putant ſpecierum numerum ab initio rerum talem, qualis nunc exſtat, conditum fuiſſe, caſteque a Natura ſeruari, et affinitates earundem in Creationis ſchemate ſtabilitas fuiſſe, vt totius harmonica eſſet pulcritudo, quam in ſingularum ſpecierum forma et ornatu, immo in partibus indiuiduorum ſingulis miramur.

Luculenta interim affinitatis huius naturalis exempla Zoologia praeſertim hodierna iam nunc detexit; innumera vero, haud minus admiranda, nepotes manent. Non inter poſtrema huius naturae inuenta collocari merebitur *Reptile, in quo aliquamdiu dubius haeſi, an ad Serpentes vel Lacertas eſſet referendum.* Primo adſpectu quilibet Anguem appellauerit; ſed praeter gracilem corporis longitudinem, pedumque organicorum defectum, nihil admodum habet quod Angui, vel quod non Lacertae conuenire poſſit. *Capitis* proportio et forma, *dentes* in ore obtuſi, *lingua* perfecte lacertina, *oculi* vt in Lacertis palpebrarum ope clauſiles, *aurium* externi meatus valde conſpicui; *ſquamarum* dein compoſitio annularis, nulla abdominalium, quae in anguibus nume-

rantur, diſtinctione, *tractus* per latera longitudinalis, mollior, in antico initio quaſi cicatrice pedis notatus, *pedunculus* vtrinque ad anum exſertus, ſubdidactylus, *caudae* fragilitas, longitudo, circumcaeſura prismatica, verticilli; *interna* denique ante omnia *ſtructura*, rudimenta *ſterni* oſſiumque *peluis*, Anguibus plane denegata, *coſtae* robuſtae, non in caudam, imo vix vſque ad anum productae, quum Serpentibus etiam per caudam continuentur, *vertebrarum* caudae conformatio hinc dependens, totiusque *ſceleti* conſiſtentia magis oſſea; *pulmo* itidem, vt Lacertam decet, duplex, *inteſtinorum* ſitus atque conuolutio, ab omni parte Lacertam eſſe pronunciant, nullumque inter Serpentes exemplum analogiae agnoſcunt. Quandoquidem etiam Anguis bipes *Linnéi*, qui ad noſtrum Reptile affinitatis gradu proximo accedit, licet pedibus ſit magis conſpicuus, tamen defectu aurium et conſtructione reliqua a Lacertis longius abhorret. Liceat itaque LACERTAM *apodam* quamvis paradoxo nomine appellare miram ſpeciem, cuius formam et fabricam hic minutius perluſtrabimus, non multo minus ambiguam, quam eſt *Sirenis* dictae *Lacertinae*, per GARDENIVM detectae, de qua mihi tamen nondum ſatis liquere videtur, quum Lacertarum Americae copioſiſſimarum cuiusdam Laruam eſſe potius haereat ſuſpicio (*), quam pedum poſteriorum defectus ſolus non diluit.

In

(*) *Act. angl. vol. LIV. pag. 191.*

In Reptili noſtro: *Caput* lacertinum, magnum, corpore craſſius, tetraëdrum, roſtro conico, decliui, obtuſo. *Oris* margines loricati, acie arguta conniventes; *dentes* in marginibus maxillarum (*Tab. IX. fig.* 2.) obtuſi, inferiores craſſiores, in vtraque maxilla anterius, retrorſumque ſenſim minores; minimi in antica parte maxillae ſuperioris, vbi deficiunt inferiori; praeterea *palatum* tuberculis trium parium longitudinalibus, tuberculoſis, oſſi innatis exaſperatum. *Lingua* (*Tab. X fig.* 1. *a.*) omnino lacertina, carnoſa, plana, bifida, laciniis fuſcis mollibus. — *Nares* ſimplices, patulae. — *Oculi* in area depreſſa laterali capitis, *palpebris* clauſiles, quarum *inferior* lata, ruga calyculata, *ſuperior* ad ſupercilium obtuſe prominulum deliteſcens, anguſtiſſima. — *Aurium* aperturae pone rictum longiſſimum patulae, inſignes, tympano, vti Lacertis, reſpondentes. *Loricae* capitis oſſeae, duriſſimae, cranio adnatae, figura et diſpoſitione ea, quae Lacertis eſſe ſolet. Tab. IX. Fig. 1.

*Corpus* a capite ad anum aequali craſſitie teres, ſupra conuexum, ventre planiuſculo; totum cataphractum eſt *ſquamis* magnis, planis, obſolete reniformibus, oſſeis et ſupra oſſeam laminam epidermide corneola incruſtatis, quae per ordines annulares, ſeriesque longitudinales reſpondent. In regione pedum anticorum incipit *foſſa* longitudinalis mollior, minutis ſquamis obſita, quae dilatationi corporis, cui loricae iſtae plane repugnant, fauet inque ipſo initio quaſi cicatricem ſiſtit, vbi pedes anticos collocandos fuiſſe, quaſi nutu indicauit Natura. In

ſtatu

Tab. IX. ſtatu naturali, quum aluus neque eſca, nec ouario repletus eſt, foſſa illa in rugae veluti ſpeciem collapſa apparet, lorica dorſali ventralem margine paene contingente. Eandem foſſam poſtice ad inciſuram ani terminat vtrinque *pedunculus* minimus, planus, ſquamulis quatuor imbricatus, apice obſolete bifidus: digitis ſubacutis; quem pedum poſticorum rudimentum eſſe nemo dubitauerit.

*Squamae* corporis *ſubtus* paulo maiores in decem ſeries digeſtae ſunt, annulosque paulo vltra centum, non numeratis pluribus gulam protegentibus, quarum ordo minus ſtrictus eſſe ſolet. *Dorſalium* ſquamarum ſeries longitudinales 13. quorum foſſae laterali proximae minores. Verſus caudam hae ſquamae ſtria longitudinali, ſenſim argutiore, angulis caudae reſpondente porcatae ſunt, quae in ventralibus plane non apparent. *Sciſſura ani* tota abdominis latitudine ſemicircularis, rugis ſub ſquamarum margine labiata, intra quas medius *anus*, et vtrinque *ſinus* coecus ſebaceus apparet.

*Cauda* corpore multo longior, proportione ab omni inter Serpentes exemplo aliena, ab ano ſenſim adtenuata, tota imbricata *ſquamis* reniformibus, aequaliter decreſcentibus, media ſtria argute carinatis, perque verticillos et ſeries longitudinales ita reſpondentibus, vt cauda tota euadat prismatico-angulata. Numerus angulorum hinc quoque idem eſt, qui ſerierum in quas longitudinaliter ordinantur ſquamae; adeoque in maiori parte caudae 18, in extremitate (alter-

(alternis ordinibus eliſis) 12 anguli numerantur. Tab. IX. Propter duritiem ſquamarum cauda quoque tota duriſſima, argutis adeo aciebus, maxime verſus apicem, porcata, vt cultri inſtar vulnerent.

*Longitudo* Lacertae huius apodae, quae toto corpore *colore* uniformi pallide flaueſcente, interdum ſubvireſcente inſignis eſt, tripedali maior eſſe ſolet. *Proportiones* e ſpecimine maiori apponere viſum eſt; itaque

| | | | |
|---|---|---|---|
| Longitudo a ſummo roſtro ad anum - | 1'. | 6''. | 0'''. |
| —— caudae - - - - - | 2. | 4. | 0. |
| —— capitis ad poros vsque auditiuos - | 0. | 1. | $8\frac{1}{2}$. |
| —— rictus oris - - - - - | 0. | 1. | 5. |
| Circumferentia capitis ad baſin - - | 0. | 3 | 10. |
| —— corporis ante anum - - - | 0. | 3. | 5. |
| —— caudae ad anum - - - - | 0. | 3. | 2. |
| Diſtantia narium ab apice roſtri - - | 0. | 0. | $2\frac{1}{3}$. |
| —— —— inter ſe - - - - | 0. | 0. | $3\frac{1}{2}$. |
| —— oculorum a naribus - - - | 0. | 0. | 5. |
| —— aurium a poſtico cantho oculorum | 0. | 0. | 9. |
| Fiſſurae palpebrarum - - - - | 0. | 0. | 4. |
| Capitis altitudo ſolida - - - - | 0. | 0. | $11\frac{2}{3}$. |
| —— latitudo ad aures - - - | 0. | 1. | 2. |
| Longitudo pedunculorum ad anum - - | 0. | 0. | $1\frac{2}{3}$. |
| Latitudo ani inter pedunculos - - | 0. | 1. | 8. |

Venio iam ad ea, quae cultri auxilio obſervari poſſunt et omnia ex eodem, cuius menſuras praemiſi, ſpecimine exponam. — *Linguae* formam, quatenus externe apparet, ſupra deſcripſi. *Apex* eius Tab. X. Fig. 1.

 (*fig.*

Tab. X. Fig. 1. (*fig.* 1. α.) laeuis eſt, *hypogloſſis* vero (*a.*) tota craſſior, tenuiſſimis confertisque villis quaſi molliter tophoſa; eaque poſtice circumſcriptione ſubbiloba terminatur, ſinu fouens aperturam *glottidis* (*b.*) papillari forma prominentem et inſtar rimae conniuentem. *Faux* pone linguam tota (*b* — *c.*) rugis exilibus parallelis, in *oeſophagum* (*c*) continuatis, longitudinaliter ſtriata eſt; apertura oeſophagi 1′′. 4′′′. diſtat a glottide, vltra quam hypogloſſis 5′′′. et progloſſis bifida tantundem fere prolongantur. — *Os*
Fig. 5. *hyoïdeum* (*fig.* 5.) ſubcartilagineum, poſticis cornibus muſculis circa baſin maxillae tumentibus circumflexum, antrorſum verſus hypogloſſidem tricorne, tracheae ſuccubum; totum ceteroquin muſculis, etiam
Fig. 4. ab ipſa lingua continuis adnexum *iugo* oſſeo (*fig.* 4.), quod, ſterni ſuccedaneum, primas coſtas, cor includentes, amplectitur, et baſin cordis protegit, ipſum compoſitum e lamina lunata, arcuata, ſubcartilaginea (*a.*); oſſiculis duobus teretiuſculis, claviculas referentibus (*b b.*), extremo continuatis cartilagini quaſi ſcapulam exprimenti (β β.); interiectisque lamellis duobus ouali-ſublunatis, ſemicartilagineis (*c c*) interſtitia explentibus.

Fig. 1. *Cor* (*fig.* 1.) inter primas coſtas omne cavum explet, *pericardio* tendinoſae naturae incluſum, ouatum, ſupra depreſſum, vbi longitudinaliter eidem incumbunt ſiniſterior oeſophagus (*e.*), dexterior trachea (*k.*), mediaque iſtis inſtrata, perque coſtales ramos ſpinae vertebrarum adſtricta *Arteria magna* (*t t.*), quae vsque ad caudam deſcendit, praeterque ramos iſtos

iſtos pinnatim exeuntes, extremo ad meſenterium (*u u.*), teſtes, renes atque caudam diſtribuitur. Cordis *ventriculus* vnicus, qui carnoſa ſubſtantia perquam craſſa conſtat, et anguſtum quidem cauum, ſed per ambitum cauernis, quas lacertorum interualla relinquunt, auctum exhibet. *Auricula* ipſo corde maior, depreſſo-oblonga, aortae cuculli adinſtar circumpoſita, intus ſepto ſemibipartita. Tab. X. Fig. 1.

*Pulmones* (*l l.*) a corde incipiunt et vtrinque oeſophago, ventriculique anteriori parti longitudinaliter accumbunt: *Siniſter* maior (5''. 6'''. longus), laxiore membrana verſus ſpinam adnexus; *dexter* minor, breuiorque (4''. 5'''.) propter ſpatium hepati, cui adcubat, neceſſarium, membrana etiam ſtrictiore longitudinaliter adnatus. Vterque pulmo non vltra 5'''. ab anteriore extremitate, qua ſubacuti ſunt, *tracheae* bronchos breuiſſimos recipit; vterque, ſed praeſertim ſiniſter, poſtica extremitate veſicularis, inflatus; at maiori parte parenchymate elegantiſſime cauernoſo infarcti ſunt.

*Oeſophagus* (*e.*) tripollicari longitudine ſtrictus, deinde ſenſim in *ventriculum* (*f.*) dilatatus, qui poſtice capacior, nihilque, niſi amplitudine, ab oeſophago diſcretus, quinque circiter pollicum longitudinem explet. *Pylorus* (*g.*) acutiſſimo angulo inflectitur, vnde pergunt *inteſtina* capacia, in gyros compoſita, laxiorique meſenterio ambituoſe adnexa, vt in Lacertis, nunquam vero in Serpentibus eſſe ſolent. Totius inteſtini a meſenterio ſeparati longitudo a pyloro ad anum 1 pedem et

 nouem

Tab. X. Fig. 1. nouem pollices aequat. Extremum inteſtinum ſemipedali longitudine recto curſu ad anum deſcendit ($h - i.$), inſigni ſtrictura ($h$) a reliquo tractu diſtinctum, et lumine $7'''$. patens, quum tenuis inteſtini amplitudo vix $5 - 6'''$. excedat.

*Hepar* (*n.*) a dextris ventriculo longitudinaliter accumbit et ſuccumbit, lineare, plano-conuexum, antrorſum verſus oeſophagum adtenuatum, poſtica extremitate lateſcens, vbi a ventrali margine hiatu cyſtifero triangulari (*o*) exciſum eſt, vltra quem apex in acumen decreſcit. Totius hepatis longitudo $5''$. latitudo ſumma $9'''$. explet. *Cyſtis* fellea (*o.*) inſignis, initio duodeni infunditur.

*Lien* (*q.*) ampulliformis meſenterio (*u.*) medio inter meſaraicorum vaſorum truncos ſitu inhaeret. *Pancreas* exiguum (*p.*) ventriculi extremitati poſticae dexterius accubat, incluſum duplicatura meſenterii, quod et ventriculum et inteſtinalem canalem totum ſpinae vertebrarum longitudinaliter adnectit. *Glandulae* lymphaticae atque meſaraicae, vt in amphibiis omnibus, plane nullae.

*Teſtes* (*r.r.*) ante renum initia ſpinae vtrinque appoſiti, oblongi, $10'''$. longitudine, poſiti extra *peritonaeum* abdomen obueſtiens, quod praeſertim verſus poſteriora aterrimo colore infectum eſt.

*Renes* (*s.s.*) itidem ſpinae dorſi extra peritonaeum longitudinaliter adiacent, tripollicares, anterius acuminati, poſtice prope anum obtuſo fine complanati, toto parenchymate in lobulos transuerſim ſubdiuiſi.

In

In *Sceleto*, praeter *iugum*, quod ſupra deſcripſi, compoſitum, prioribus coſtis laxe circumpoſitum et ſolis muſculis inhaerens, variis conformationis momentis ſimilitudo ſumma cum Lacertis confirmatur. Praecipua ſunt 1.) quod vertebrae colli adſint diſtinctae, coſtis deſtitutae; 2.) quod coſtae robuſtae ſint, non ariſtis piſcium ſimiles, ſed craſſae, oſſeae, extremo truncatae, nulla licet cartilagine auctae, vnde quaſi deficere aliquid in illis videtur, dum praeruptae in carnibus terminantur; 3.) quod in regione ani vertebrae aliquot confertiores ſpeciem quandam oſſis ſacri aemulantur, cuius proceſſibus adligatae vtrinque haerent trabeculae duae oſſeae, imperfectae peluis rudimentum referentes et pedunculos externos ſeu pedum poſticorum veſtigia ſuſtinentes; 4.) quod vertebrae caudae proceſſuum numero totaque ſtructura, vt et coſtarum defectu a ſolita Serpentum conformatione plane abhorreant. Tab. X. Fig. 2. 3.

*Cranium* (vt ſingula adtingam) ſolidioris multo compagis eſt, quam in Serpente, formaque tota, duritie et contignatione vt in Lacertis maioribus ſe habet. Cerebri *cauerna* minima inter geminos parietes verticales, e trabecula perpendiculari (*a a.*) et aſſerculis ſinguli duobus oſſeis compactos, antice tota patet, et effundit neruos, in organa varios per hiatus tendentes. *Scutum* bregmaticum ſimplex, poſtice in cornua duo robuſta (*b b.*) diuaricatum, quae ab olla cerebri disiuncta committuntur oſſi vtrinque difformi, quod tympani cauum continet, et cui infra mandibula non condylo, ſed cauitate cotyloidea adarticulatur.

Tab. X. Fig. 2. 3. culatur. *Mandibula* e quatuor oſſibus conſtat, quorum duo poſteriora ramos conſtituunt, anticisque arcubus dentatis harmonia lacera coadunantur (*c.*). *Dentes* nulla incuneatione firmati, ſed oſſe ſolido maxillis continui videntur, intus inſigni poro excavati. — *Squamae* caput tegentes ipſa cranii oſſa incruſtant, et in fronte anterioreque ſcuti bregmatici parte adeo ſunt inolitae, vt nulla vi, niſi fractis oſſibus, ſeparari queant.

*Vertebrae colli* diſtinctae tres: harum prima ſiue *Atlas* cranio laxioribus ligamentis mobilior inarticulatur, et proceſſum ſpinalem ſupra infraque habet nullum, ſed laterali vtrinque crure ſequentis corpus includit. — *Secunda* vertebra (*d.*) vere compoſita eſt e duabus in vnam coalitis et communi criſta lata, loco proceſſus ſpinalis, ſupra inſtructis, infra tamen proceſſibus duobus diſtinctis (licet corpora in ſolidum connata ſint) prominentibus. Haec vertebra proceſſu odontoïdeo nullo atlantem ſubintrat, vnde epiſtrophaeus proprie deficere videtur. — *Tertia* vertebra, niſi quod ſimplex eſt, proceſſu ſpinali lato, et ſubtus ſubulato priori ſimillima eſt. Hae colli vertebrae ſtrictim cöarticulatae ridigiſſimum efficiunt collum, quod longitudinem 5½ lin. omnino aequat.

*Dorſi* ſeu trunci *vertebrae* 57. proceſſibus ſpinalibus latis vltimae colli vertebrae ſimiles ſunt (*e–f.*), ſubtus vero ſpinam nullam exſerunt, leui tantum corporum carina ſubangulatae. — *Coſtarum* totidem paria

paria; primum enim par articulatione ſua inter vltimam colli, primamque trunci vertebram, vltimum (*fig.* 3. *d d.*), quod omnium minimum et quaſi ſpurium eſt, inter penultimam et vltimam trunci vertebras (*e. f.*) intercalatur. Robuſtae ſunt, vt dixi, omnes, valde arcuatae, extremitate dorſali craſſae, compreſſae, altera, quae muſculis inſeritur, quaſi truncatae, nullo tamen cartilaginis veſtigio. Anteriores paulo minores ſunt, ceterum ſimiles reliquis; poſtremae iſtae duae rectiuſculae, neque apice truncatae (*d d.*). Motu in articulo eodem, quo quadrupedum thoraces, gaudent. Tab. X. Fig. 2. 3.

*Vertebrae*, quas ad *ſacrum* refero, quia inter ſe immobili articulatione cohaerent, tranſuerſisque proceſſibus ſuis, trabeculis pelui ſuccedaneis firmamentum praebent, duae ſunt numero (*g.*), inter ſe ſimillimae, quarum prior vltimae trunci coſtiferae vertebrae committitur. Corpore, dorſalique proceſſu ſimillimae ſunt vertebris trunci, ſed laterales ſeu tranſuerſos proceſſus habent magnos, latos, planos, extremo truncatos, poſterior quidem paulo minorem, quibus vtrinque margine per ligamenta adnectitur *trabecula* (*a a.*), quam modo dixi. — Ea quidem rectiuſcula, altera extremitate, qua firmatur, planiuſcula medioque ſtrictiore ſatis refert clauiculae humanae humeralem extremitatem; altera extremitate quaſi rhombica eſt, et extus inſigni tuberculo notata, cui inſidet *apex* cartilagineus (*b.*) minimus, pedunculum externum vtcunque ſuffulciens. Situs naturalis trabecularum (*a a*) antrorſum obliquus eſt, ſeu coſtis

vltimis

Tab. X. Fig. 3. vltimis contrarius, ſimul extrorſum diuergens; ſatis mobiles autem videntur.

*Vertebrarum* caudae incertus eſt numerus, praeſertim quum, propter fragilitatem caudae ſummam, multa indiuidua ea parte truncata occurrere ſoleant. Integerrimis vltra CXX. numeraui. Harum *prima* (*h.*) proceſſibus transuerſis latis ſacri vertebris ſimillima et adproximata eſt, ſed mobilior, et eo maxime diuerſa, quod (adinſtar reliquarum maiorum caudae vertebrarum omnium) proceſſu longiſſimo, bicruri radice orto, teretiuſculo inſtructa ſit. Succedentibus caudae vertebris proceſſus transuerſi anguſtiores, gradatimque antrorſum obliquati, omnium vero coarticulatio ſatis rigida; et poſtremis proceſſus omnes, vt vulgo, penitus obſoleſcunt.

Pauca ſunt, quae de vitae genere moribusue *Lacertae apodae*, ſic ſatis minutioſe deſcriptae, addere poſſum. Patria eius ſunt conualles herbidae, arenoſae, Elaeagno aliisue fruticibus inumbratae deſerti ſabuloſi Naryn inter Rhymnum et Volgam ſatis ardenti ſub coelo ſiti. Rarius etiam ad Sarpam riuum occurrit; ſed frequentior in eodem, ex quo Sarpa fluit, deſerto Kumano verſus ipſum Kumam fluuium dicitur eſſe et a ſtudioſo Nic. Sokolof ibi pariter, circaque Terekum lecta fuit. Solet ab accolis harum regionum proprie *Sheltopuſik* appellari, quod tamen nomen etiam *Colubro petolario*, in praeruptis ad auſtralem Volgam haud infrequenti et in magnam molem excreſcenti, vulgo applica-

plicatur. — Lacerta noſtra apoda inter fruteta latitare amat, et praetereuntes ſaepe ſubita ſua fuga terret, dum antris ſeſe condit. Venatur potiſſimum Lacertam agilem, aliasque Lacertas minores, quadrupedes, quarum oſſa et integra capita (corporibus iam in putrilaginem reſolutis) in ventriculo noſtrae ſemper inueni.

Dum vero diſſectae Lacertae apodae ventriculum diſcinderem, in naturam praedae deglutitae inquiſiturus, inueni chymo innatantes VERMICVLOS formae admirandae et ad nullum bene genus referendos, quorum ſpecimen *fig. Tab. X. ſexta* expresſum eſt. Suggeſſit ſtatim memoria, ſimiles fere vermes a *Celeberr.* quondam ROEDERERO in viſceribus morbo, qui Goettingae annis 1760 et 61. epidemicus fuit, mucoſo defunctorum, repertos et a discipulis eius Cls. WAGLERO et WRISBERGIO deſcriptos (*) fuiſſe. Et omnino quidem, locos horum euoluens, video alteram ſpeciem obſeruatorum a ROEDERERO vermiculorum, vel, vt appellauit, *Trichuridum*, quam WAGLERVS "in lineam ſpiralem „*contortam*, magis cineream, rigidam, elaſticam„ dixit, plane non a vermibus intra ventriculum Lacertae Tab. X. Fig. 6.

(*) Conf. De Morbo mucoſo, Liber ſingularis, quem ediderunt I. G. ROEDERER, et CAR. GOTL. WAGLER. *Gott. 1762. 4. pag. 41. tab. 3. fig. 4. b.* et HENR. AVG. WRISBERG obſeruationum de Animalculis infuſoriis Satura. *Gott. 1765. 8. pag. 6. not.*

Tab. X. Fig. 6. certae apodae repertis diuerſos fuiſſe; quum contra altera, *recta* WAGLERO, flaccida, albaque dicta Aſcaridibus omnino proxime affinis videatur et a priore, quam hic curatius perluſtrabimus, toto genere certiſſime differat.

Rectiſſime cum *Cel.* ROEDERERO citati auctores hanc vermium inteſtinalium ſpeciem pro noua, nullique ante illos deſcripta habuerunt. Miror autem veram eorum ſtructuram, quae parum conuexa lente facile perſpicitur, adeo euaſiſſe Cell. Viris, vt etiam caudam appellauerint, vbi *caput* vermis quaerendum eſſe, ſtructura illius *tuberculi* probat, quo Trichuridum caudam terminari Cl. WRISBERGIVS quoque aſſeruit (†). Hoc, quod *figura* noſtra ad *a.* expreſſum eſt, microſcopio inſpectum (A.) ſimillimam roſtro Taeniae conformationem exhibet. *Diſcus* nempe, media *foueola* excauatus, quam hic oris conniuentis locum deſignare perſpicuum eſt, per marginem radiatim diuergentes *vncinuli* coronant, quibus vermis pro lubitu ventriculi tunicis adfigitur. Sed in Taenia, praeſertim cucurbitina et hydatigena (**), proboſcidem ſimilem radiatam quatuor papillae

(†) *Loc. cit. p. 12.*

(**) Caput Taeniae hydatigenae atque cucurbitinae iu *Diſſ. de infeſtis viuentibus intra viuentia p. 40.* inque *Elencho Zoophytorum p. 403.* et in *Miſcell. Zoolog. p. 169. 170.* vindicaui; viderunt et alii recentiores. Solus *Ill.* LINNEVS neque in canicidiis inuenit, neque videntibus etiamnum credit; facillime apparet tamen ſi Taeniam, praeſertim

pillae circumſtant, quorum in noſtris vermiculis nihil apparet, ſed filum a diſco tenuiſſimum pergit. Idque, licet inſigne, non tamen ſolum eſt nec primarium diſcrimen, quo vermes hi noſtri a Taeniis generice diſtinguuntur. Etenim forma externa, cute elaſtica et paene dicam cornea, articulorum oſculorumque defectu et interna pariter ſtructura abludunt. Tab. X. Fig. 6.

*Filum* (*a* – *c*.) varie curuatum, quod a diſco vncinulato (A.) continuatur, elatere et craſſitie equinam ſetam aemulatur, et in pollicarem circiter longitudinem aequabili tenuitate pergit. Hinc lentiſſime craſſeſcit in ſpiram (*c*.) magis minusue explicatam, in plerisque vero mortuis (non enim viuentes deprehendi) in modum Trochi perſpectiui contortam, cuius extimus et maximus anfractus craſſiorem totius corporis partem conſtituit, vnde in rectum exporrectum denique adtenuatur in *caudam* acumine vncinatam (*b*), ſubaſperam, in variis varie rugoſam vel vulneratam, plerisque vero, quos inueni, vermibus plane truncam. Craſſior pars corporis, maxime quae in ſpiram contorta eſt, obſoletis *rugis* quaſi nodoſa apparet in omnibus. *Cutis*, quae totum corporis tubum conſtituit, tota gryſeo-palleſcentis, in multis ſubfuſci eſt coloris atque rigiditate, non minus quam elaſticitate Inſectorum molliorum corneolas cruſtas, vel duriorem epidermidem humanam refert. *Interanea*, licet caute diſſecauerim complures, non adeo diſtincta inuenire po-

 tui,

ſertim cucurbitinam, in canibus frequentem, cum ea parte muci inteſtinalis, cui filum inſeritur, caute abradas et mucum in aqua macerando ſolutum abluas.

Tab. X. Fig. 6. tui, vti a *Clar.* WRISBERGIO in Trichuridibus generatim deſcribuntur. Crediderim Illum e rectiori et molliori ſpecie vermium, quos ſub Trichuridis nomine comprehenderat Praeceptor, viſcera iisdem magis perſpicua deſcripſiſſe, quae horum cum Aſcaridibus affinitatem confirmant. In noſtra vero, quam *Trichuridi ſpirali* ROEDERERI per omnia ceteroquin ſimilem eſſe video, nonniſi parenchymatoſum ductum continuum, corporis craſſiorem partem opplentem videre potui; in quo non minus, quam conſiſtentia cutis, rigiditate corporis et defectu annulorum, cum *Gordiis* proxime conuenit. Sed ore et cauda ab iis quoque differt, quas tamen partes etiam in ſpeciebus variis Gordiorum inconſtantes eſſe perſpexi. Vnde niſi Gordiis adnumerare velis vermem noſtrum, nouo erit opus nomine; quandoquidem *Trichuridis* (ſeticaudae) appellatio, ideae falſa ſuperſtructa, ſeruari nequit; ab Aſcaridibus autem, quibus adnumeratus fuit in nouiſſima *Ill.* LINNEI *Mantiſſa* (*p.* 543.), magis alienus eſſe videtur.

Addam hic breuem indicationem vermium inteſtinalium, qui ſtructura oris analogiam cum *praedicta ſpecie* ſummam habent. — *Prior* ſit, quem olim primus in *Diſſ.* citata *de infeſtis viuentibus*, cet. et denuo in *Zoophytorum Elencho* ſub nomine *Haerucae* deſcripſi; *Ill.* LINNEVS poſtea nomine *Faſciolae barbatae* (*) indigitaſſe videtur; nuperrime vero *Cel.* KOELREVTERVS (†) *Acanthocephali* ſub titulo propoſuit.

(*) *Faun. ſuec. Ed. II. n.* 2077.

(†) *Nov. Commentar. Petrop. Vol. XV. pag.* 500. *tab.* 26. *fig.* 5.

poſuit. Hanc nunquam maiorem inueni illo ſpecimine, quod naturali magnitudine *Tab. IX. fig.* 2. expreſſum eſt, et ex inteſtinis Ranae temporariae oblatum. In Piſcium inteſtinis (occurrunt autem copioſe in Lucio, Cernua, Perca, Gadis atque Truttis variis,) raro pollicarem magnitudinem adtingunt. Viui molles ſunt, lineares, depreſſi, obſolete rugoſi, albi, punctis linearibus duplici ordine transuerſis opacis in parenchymate transparentibus, propter quam ſtructuram Taeniis eos adnumerare haud dubitaui. In aqua pura ſtatim turgeſcunt et moriuntur, referuntque vermem cylindricum, laeviſſimum, ſubdiaphanum, rigidiuſculum, qualem *figura* propoſita refert. *Roſtrum*, quod viui retrahunt et quo inteſtinorum tunicis, Taeniaeque piscium ſimul habitanti lubenter affiguntur, cylindraceo turgidulum eſt, totumque minutiſſimis aculeis reclinatis muricatum (*fig.* 2. A.), vnde infixum aegrius euellitur. Tab. IX. Fig. 2.

*Alteram* nuper in inteſtino tenui Suis inueni vermium ſpeciem, cuius figuram in eadem *Tab. IX.* (*fig.* 3.) addo. Recens colore Aſcaridis et conſiſtentia Lumbrici fuit, ſed in ſpirituoſo liquore ſatis rigida eſt facta. *Corpus* a craſſiore extremitate (*a.*) ſenſim gracileſcit et per dimidium circiter longitudinis filiforme pergit, obtuſa papilla (*b.*) tanquam ano terminatum. Eadem craſſior pars in rugas annulares contrahitur, quae longitudinalibus deinde ſulcis decuſſantur, et verſus tenuiorem partem ſenſim Fig. 3.

 euane-

euaneſcunt. *Roſtrum* (*a.* A.) ad craſſioris extremitatis obtuſum finem pro lubitu vermis exſeri retrahique poteſt, breuiſſimum, cylindraceum, truncatum, ordinibus duobus *vncinulorum*, in ſingulo ordine circiter denum, coronatum, ita vt inferior corona ampliori ſit circuitu. *Diſcum* roſtri obſident *papillulae* ſolidae ſenae (A.), *centralem* circumſtantes, in qua tamen oris apertura haud apparet. *Corium*, quo tubus ipſius vermis conſtat, craſſum eſt, intus muſculoſis fibris denſum. *Canalis* alimentarius longitudinalis, glanduloſus, inteſtinula ab anteriore extremitate duo breuia, medulla ſpinalis gangliis concatenata, aliaque intus diſtincte apparent. De quibus hic fuſior eſſe nolo; id tantum moniturus, nullam vermium inteſtinalium ſpeciem ſupra deſcriptis, in ventriculo Lacertae apodae repertis, magis affinem videri.

---

---

ACERI-

# A C E R I N A;

## PISCIS, AD *PERCAE* GENVS PERTINENS, DESCRIPTVS,

Auctore

*A. I. GVELDENSTAEDT.*

Acerina, nomen proprium piſcis alicuius a PLINIO *Medico* vſitatum, atque ab acutiſſimis Ichthyologis, BELLONIO, GESNERO et ARTEDIO, ceu Synonimon *Percae fluuiatilis minoris* ſeu *Cernuae* LINNAEI non niſi dubitanter vſurpatum, piſci, Ichthyologis hucusque ignoto, *Percae Cernuae* maximopere adfini, nunc ſecundum regulas artis deſcribendo, imponatur. Analogia inter *Acerinam* et *Cernuam*, quoad numerum, ſitum, figuram et colorem partium, ſumma; ſed in earum proportione, et praeſertim in ea capitis ad truncum facile elucet inter hoſce fratres germanos differentia. Longitudo trunci ſuperat longitudinem capitis *Cernuae* ter, *Acerinae* vix bis. Longitudo roſtri, ſeu ſpatii inter cantum anteriorem oculi et oris apicem, *Cernuae* ter, *Acerinae* bis ſumenda, ad exprimendam integram capitis cuiuslibet dimenſionem. Magnitudine *Acerina Cernuam* vix excedit. *Acerinae* in fluuiis occurrentes vulgo digitales, ſed in mari obuiae ſpithameae. Caro alba, ſapidiſſima, oſſiculis plurimis bifurcis ſtipata, et diaeta animalis, *Acerinae* cum

cum *Cernua* communis. *Acerina*, ciuis *Ponti Euxini* et *paludis maeoticae*, ob nuptias celebrandas *Boryſthenem* et *Tanain*, fluuiosque minores ad illos abeuntes, migratorie menſibus brumalibus petit, mihique has aquas frequentanti obuiam iuit; ſed *Boryſthenem* vix vltra oſtium fluuii *Desna*, *Tanain* vix vltra oſtium fluuii *Woroneſch* adſcendit, ac praeſertim locis arenoſis allicitur. An reliquos in *Pontum Euxinum* ſeſe exonerantes fluuios plane reſpuat, non affirmem; attamen probabiliter putem cum nec *Comes* MARSILIVS in ſuo *Danubio pannonico-myſico* noſtrum piſcem habeat; nec *Cel.* SCHAEFFERVS *Pentadi primae piſcium bauarico-ratisbonenſium*, quam noſter ſuo iure intrare debuiſſet, inſeruerit; nec ego in *Phaſi* per *Colchidem* tranſeunte inuenerim. Silentium Auctorum non ſemper abſentiam animalium indubitanter reddere, patet interim ex RZACZYNSKI exemplo, qui nec in ſua *hiſtoria naturali Poloniae*, *Boryſthenis* piſces enumerante, noſtram *Acerinam* propoſuit. Incolis ad *Tanain* circa vrbem *Woroneſch*: *Birtſchok*: circa vrbem *Tſcherkask*: *Baltſchok*; et incolis ad *Boryſthenem*: *Babir* ruſſice ſalutatur *Acerina*. *Cernua* autem, quae ſuperius in iisdem fluuiis frequentior eſt, in quibus inferius, quousque ab *Acerina* viſitantur, fere deficit, incolis ruſſice: *Ierſch* dicitur. *Cernuae* iconem, quae antea minus bona in operibus GESNERI, IONSTONI, WILLOVGHBAEI et MARSILII exſtabat, optimam dedit *Cel.*
Tab. XI. SCHAEFFERVS in *Pentade* iam citata. *Acerinae* icon nunc datur, indiuiduum magnitudine naturali maxi-

maxima ſiſtens, vt pateat conferenti, in quo conveniant, iterumque in quo differant adfines hae ad *Percae* genus, ab *ill. Equ. aur. a* LINNE et ARTEDIO ſancitum, pertinentes ſpecies; idemque vt eo magis eluceat, additur

## *DESCRIPTIO ACERINAE.*

*Statura* compreſſo-oblonga, latitudine quinquies, craſſitie ſepties a longitudine ſuperata.

*Caput* cathetoplateum, productum, dimidiae trunci longitudini aequale; ſinubus coecis ad nares, in vertice et ad baſeos latera cauernoſum; roſtro parum decliui et apice rotundato; inteſtitio inter oculos anguſto; occipite acute ſerrato; temporibus planis, ſerie perpendiculari denticulorum deſcendo increſcentium exaſperatis.

*Rictus* anguſtus, antrorſum ſpectans, quo aperto mandibula ſuperior e vagina quaſi protruditur, quae, ore clauſo, labio ſtrictiuſculo ante mandibulam inferiorem prominet.

*Nares* medium inter roſtri apicem et oculum occupantes, aperturis vtrinque duplicibus; anteriore minore, valuula ſemitecta et a poſteriore ſat remota.

*Oculi* magni, laterales, vertici proximi, prominuli; *iride* ſupra fuſca, infra argentea, ſed limbo interno tenui toto argenteo; *pupilla* circulari, nigra.

*Opercula* branchiarum plana, margine arcuata, integerrima, aperturam branchiarum vtrinque ſoli-

tariam bene obtegentia; *membrana branchioſtega* vtrinque ſeptem radiata.

*Truncus* oblongo compreſſus; *dorſum* rotundatum, caneſcens; *pectus* et *abdomen* valde planum, albicans; *latera* vix conuexa, maculis rotundatis, nigris, diſperſis, ſupra lineam lateralem frequentioribus, infra illam rariſſimis picta; *linea lateralis* dorſo parallela et propior quam ventri, per medium inter dorſum et lineam muſculorum interſtitialem decurrens.

*Squamae* omnem truncum, excepto pectore, obtegentes, difficillime decedentes, imbricatae, rotundatae, mediocres, in dorſo et lateribus punctis fuſcis irroratae, in abdomine illis carentes, ſubaſperae, ſed minime pungentes, propter crenas tenuiſſimas et obtuſiſſimas earum limbum conſtituentes; accedit vtrinque, pone aperturam branchiarum, ſupra pinnam pectoralem, ſquama magna triquetro-acuminata, apice pungens, ſuperficie laeuis.

*Pinna dorſalis* vnica, ſeu, ſi mauis, duae confluentes in vnam, omne fere dorſum occupans; *radiis* 30. 31 vel 32. quorum quatuor primi increſcentes, reliqui decreſcentes; eorumque anteriores 17 vel 18. ſpinoſi, ſimplices et membrana albida, fuſco maculata coniuncti; reliqui inermes, apice ramoſi et membrana albida, immaculata copulati.

*Pinnae pectorales* vtrinque ſolitariae, proxime ad angulum inferiorem aperturae branchiarum ſitae, inter ſe oppoſitae, oblongo-acuminatae, albae; *radiis* 25. tenuibus, ramoſis.

*Pinnae*

*Pinnae ventrales* duae, proxime pone et infra pinnas pectorales ſitae, inter ſe parallelae, trapezoideae, albae; *radiis* ſex ſtipatae; quorum primus breuior, ſimplex et ſpinoſus, reliqui ramoſi et inermes.

*Pinna ani* ſolitaria, fini caudali pinnae dorſalis oppoſite et aliquot lineas pone anum ſita, alba, figura et magnitudine ventralibus analoga; *radiis* 7. 8 vel 9. quorum duo primi valde craſſi, ſpinoſi et ſimplices; reliqui tenues, inermes et ramoſi; omnes longitudine ſubaequales.

*Cauda* verticalis, albida, bifurca, cruribus aequalibus, acuminatis; *radiis* 17. exceptis lateralibus minoribus.

*Dimenſiones* partium externarum ſecundum pedem *londinenſem* duodecimalem ita:

| | poll. | lin. |
|---|---|---|
| Longitudo ab apice roſtri ad caudae extremum | 8 | 2. |
| —— —— —— —— ad foramen anterius narium - - - - - - - | — | 6. |
| —— —— —— —— ad foramen poſterius narium - - - - - - - | — | 9. |
| —— —— —— —— ad cantum anteriorem oculorum - - - - | 1 | 2. |
| —— —— —— —— ad aperturam branchiarum - - - - - | 2 | 4. |
| —— —— —— —— ad initium Pinnae dorſalis - - - - - | 2 | 6. |
| —— —— —— —— ad extremum pinnae dorſalis - - - - - | 5 | 11. |

| | poll | lin. |
|---|---|---|
| Longitudo ab apice roſtri ad caudae radicem | 6 | 6. |
| —— —— —— —— ad radicem Pinnae pectoralis - - - - - - | 2 | 5. |
| —— —— —— —— ad radicem Pinnae ventralis - - - - - - | 2 | 8. |
| —— —— —— —— ad anum - - - | 4 | 4. |
| —— —— —— —— ad initium Pinnae ani - - - - - - | 5 | — |
| —— —— —— —— ad extremum Pinnae ani - - - - - | 5 | 7. |
| Diameter oculorum - - - - - | — | 6. |
| —— inter oculos - - - - | — | 4½. |
| —— perpendicularis capitis inter oculos | 1 | 1. |
| —— —— trunci ad P. dorſalis initium | 1 | 8. |
| —— —— —— ad P. dorſalis extremum - - - - - | — | 7. |
| —— tranſuerſalis capitis ad oculos - | — | 10. |
| —— —— trunci maximus ad P. ventrales - - - - - | 1 | 1. |
| —— —— —— ad anum - - - | — | 8. |
| Longitudo ſquamarum maximarum - - | — | 1½. |
| Latitudo earundem - - - - - | — | 2. |

Externarum partium deſcriptioni iam exhibitae addam quaedam de internis.

*Cauitas oris* omnino edentula; ſed in ipſis faucibus areolae quatuor, duae ſuperiores ſeu intermediae et ſubrotundae, duae laterales et lineares, *denti-*

*denticulis* minimis retrorſum ſpectantibus aſperae; *lingua* adnata.

*Branchiae* vtrinque quatuor, quarum pars concaua tuberculis, in arcu primo ſeu anteriori acuminatis et elongatis, in reliquis ſubaequalibus et obtuſis vtrinque pectinatae.

*Cordis corpus* vniloculare, pyramidato-triquetrum; *auricula* corpore duplo amplior, ſemilunata, baſi corporis incumbens; *aorta* baſi ventricoſa; *pericardium* tenuiſſimum.

*Diaphragma* tendineum.

*Hepar* latum, vix vltra ventriculum deſcendens, quadraticum, obſolete bipartitum; lobulo ſiniſtro minori, acuminato; dextro maximo quadrato; *veſica fellea* minuta, in medio ſuperficiei inferioris hepatis abſcondita.

*Lien* ſubrotundus, atro-rubens, ad ventriculi fundum ſitus.

*Ventriculus* oblongo incuruatus, fundo obtuſiuſculo; *appendices* ad pylorum tres, papilliformes, vix tres lineas in indiuiduis ſpithamaeis longitudine excedentes, ſubaequales. *Inteſtinum* ſemel reflexum, pinguedine pauca obuolutum, longitudini trunci aequale.

*Veſiculae ſpermaticae* et *ouaria* duplicia, linearia, ad totum abdomen vtrinque decurrentia, albida.

*Peritonaeum* argenteum, ad veſicam aëream, non alibi, punctis fuſcis irroratum.

*Veſica aërea* ſimplex, ampla, per totam abdominis longitudinem ſpinae dorſali adhaerens; *ductu pneumatico* e gula extremitatem anteriorem petente.

*Renes* ſpinae dorſi adglutinati, ſanguinolenti, difformes, in *veſiculam vrinariam* oblongam, ante anum obuiam ſeſe exonerantes.

*Vertebrae* ſpinae dorſalis quadraginta et *coſtae* vtrinque quindecim.

---

---

# SEX AVIVM DESCRIPTIONES;

Auctore

*A. I. GVELDENSTAEDT.*

In *Caucaſo* et in adfinibus ad ſeptentrionem meridiemque iugi huius alpini ſitis regionibus ſubmontanis atque compeſtribus, per annos aliquot iuſſu AVGVSTISSIMAE peregrinator ad corpora naturalia attentus dum fui, opportunitate vſus ſum, aues haud paucas *Ornithologis* huc vsque ignotas videndi, obtinendi, denominandi, deſcribendi atque depingendi. Earum aliquas viderunt etiam et orbi litterato in *Commentariis* noſtris *academicis* et in *itinerariis* iam communicauerunt, eundem in finem maris *Caſpii* et fluuii *Wolgae* littora viſitantes *Collegae* coniunctiſſimi. Ex harum penu ſunt: *Sterna caſpia*, *Ardea caſtanea*, *Alauda mutabilis* ſeu *tatarica*, *Charadrius gregarius*, *Pelecanus pygmaeus*, *Larus Ichthyaetus*, *Grus Leucogeranus* et *Tetrao arenarius*; de his, cum ſcitu neceſſaria iam dicta ſint, ſileo et denominationes atque deſcriptiones meas ſupprimo. Ex aduerſariis exhibeam nunc eas tantummodo aues, quarum antea, ni fallor, prorſus nulla mentio facta eſt. Sex auium ſpecies, ad genera ab *ill. Equite aurato a* LINNE in *ſyſtematis naturae* editione duodecima ſtabilita reductas, ſiſtam.

I.

# I. *LOXIA RVBICILLA.*

Auis, quam ſub hoc nomine propono, magnitudine, habitu et colore proxime ad *Enucleatorem*, roſtro ad *Coccothrauſtem* accedit, et inter haſce duas ſpecies congeneres quaſi media. Colore ſuauiſſimo coccineo, albido et cineraſcente lepide variegato *Rubicilla* antecellit *Enucleatorem*, colore miniato fuſco vndulato oculos minus afficientem. Roſtri craſſitie *Coccothrauſti* cedit *Rubicilla.* Auis noſtra indigena alpium *caucaſicarum* aëre frigidiuſculo pariter ac *Enucleator* delectatur; praeſertim ad alveos glareoſos torrentium in *Caucaſo* occurrentium degit et baccas *Hippophaës Rhamnoidis*, ad illos copioſiſſime creſcentis, gulae indulgens auidiſſime legit, eandemque diſſeminat. Familiae numeroſiſſimae *Rubicillarum* gregatim volitare et vocem *Pyrrhulae* imitare ſolent. *Sexus* differentia vix vlla, niſi quod rubedo feminae minus ſpecioſa ſit. *Icon* Tab. XII. ſtaturam et habitum magnitudine naturali exprimit, reliqua ex *deſcriptione* patent, quam nunc dabo.

*Roſtrum* incraſſato-conicum; capite dimidio breuius, a fronte ſex, a rictu octo lineas longum; baſi latiſſimum, diametro perpendiculari ſex, et transuerſali quinque linearum; apice acuminatum; *mandibula* ſuperior fuſca, apice recto vix vltra inferiorem prominens; inferior albida, lateribus tantiſper introrſum flexa. *Lingua* integra, truncata. *Nares* baſilares, capiſtro fuſco tectae. *Oculi* fuſci.

*Caput*

*Caput* ſupra, *gula*, *collum ſubtus* et *pectus* intenſe coccinea, leucoſticta, maculis acutis triquetris; *abdomen* et *ani regio* dilute roſea, albido vndulata; *caudae tectrices inferiores* roſeo-fuſcae. *Collum ſupra* et *dorſum* caneſcens cum roſei tinctura; *tectrices caudae ſuperiores* fuſco-roſeae. Baſis plumarum omnium, quae in ſitu naturali obtecta et partem maximam totius plumae conſtituit, intenſe cinerea.

*Alae* complicatae quoad pollicem vnum cauda breuiores; *remigibus* et *tectricibus* primariis fuſcis, marginibus obſolete roſeis, tectricibus axillae dorſo concoloribus.

*Cauda* tres pollices et ſex lineas longa, integra; *rectricibus* duodecim, aeneo-nigris, extima vtrinque exteriore margine albida, reliquis margine roſeo adumbratis.

*Femora* ad genua vsque plumoſa, cana; *tibiae* et *digiti*, quorum tres antici et vnus poſticus, nigri coloris; *vngues* digitorum incurui, acuminati, nigri, anteriorum ſubaequales, poſtici maximus.

*Longitudo* auiculae extenſae ab apice roſtri ad caudae extremum octo pollicum pedis *londinenſis* duodecimalis, qui in omnibus meis deſcriptionibus pro menſura adhibetur.

## II. *TANAGRA MELANICTERA.*

Auis hoc nomine imbuenda ſummopere habitu, coloribus et differentia ſexuali accedit ad *Car-*

*duelem Americanam* BRISSONII, ſeu ad *Fringillam triſtem* LINNAEI, cuius hiſtoriam *Cel.* EDWARDS in ſuis ſpicilegiis hiſtoriae naturalis *tomo* 2. *capite* 274. et *tabula* 274. exhibuit. Magnitudine *Tanagra Melanictera Fringillam triſtem* aliquantum ſuperat et *Emberizae Miliariae* aequalis eſt. Inſuper *Tanagra Melanictera* ſat euidenter differt a *Fringilla triſti* ſtructura et colore roſtri, pileo nigro maris multo ampliori vsque ad nucham procedente, rectricibus ac remigibus earumque tectricibus vniformiter cinereo-fuſcis, non albo terminatis. *Mas* et *femina Tanagrae Melanicterae* omnino iisdem coloris varietatibus inter ſe differunt, quibus femina et mas *Fringillae triſtis* inter ſe diſcrepant. Habitat auicula noſtra in ſubmontanis promontorii vtriusque, et ſeptentrionalis et meridionalis *Caucaſi*, circa thermas ad fluuium *Terek* obuias et in *Georgia* circa *Tefliſium* a me obſeruata. Vulgo in dumetis *Rhamni Paliuri* occurrit, ſub ramis ſpinoſiſſimis *Accipitribus* acceſſum prohibentibus ſecure nidificans atque prolem ſeminibus eiusdem arbuſculi, quibus fere vnice victitat, enutriens. Solitarie volitantes vocem, eae *Pari maioris* analogam, edunt. *Iconem maris* tab.
Tab.XIII XIII. et *feminae* tab. XIV. exhibeo, vt magnitudo
Tab.XIV. naturalis, ſtatura et ſexus differentiae pateant, quae in deſcriptione ſubſequente verbis et numeris exprimere tentabo.

*Roſtrum* conicum, acuminatum, capite brevius, a fronte ſex, a rictu oris octo lineas longum, rectum, liuidum; *mandibula ſuperior* ad baſin obſo-

obſolete trigona, ad apicem acuminata et vtrinque ſubemarginata; *mandibula inferior* lateribus inflexo-coarctata, vt in *Emberizis* eſſe ſolet, apice etiam ſubemarginata. *Vibriſſae* ad rictum oris breues. *Nares* ſubfrontales, rotundae. *Lingua* cylindrico-ſagittata, apice lacera. *Oculi* fuſci.

*Caput* ſupra a fronte vsque ad nucham et ad latera atrum; *collum ſupra* et *dorſum* brunneo-ferrugineum; *vropygium* luteſcenti-ferrugineum; auis tota *ſubtus* vniformiter flauiſſima.

*Alae* complicatae caudae medium attingentes, fuſcae, albido longitudinaliter ſtriatae; *remiges* fuſcae, marginibus albidis; *tectrices* ſuperiores remigibus concolores, inferiores autem albido-flauae.

*Cauda* ſubforcipata, tres pollices longa; *rectrices* duodecim, fuſcae, marginibus albido-flauicantibus.

*Femora* ad genu vsque plumoſa, abdominis colore imbuta; *tibiae* et *digiti* liuido-incarnati coloris; digitorum tres antici, inter ſe liberi, quartus poſticus, medio reliquis ſubaequalibus aliquantum longiore; *vngues* incurui, acuti, ſubaequales, fuſci.

*Longitudo* totius auis ab apice roſtri ad caudae extremum ſeptem pollicum, quinque linearum.

Haec huc vsque omnia de *mare*. *Femina*, quae omni figura, proportione et colore extremitatum cum *mare* exacte conuenit, differt coloribus capitis et trunci; illa nimirum ſupra tota a fronte ad cau-

dam vsque ſordide oliuaceo - ferruginea fuſco maculata, ſubtus tota ex albido - flaua.

## III. *MVSCICAPA MELANOLEVCA.*

*Muſcicapa Melanoleuca* noſtra ſtatura, magnitudine et coloribus cum *Motacilla Leucomela* in Tomo XIV. *Commentariorum* exhibita mire conuenit. Differentia primaria in eo ponenda, quod dorſum *Muſcicapae Melanoleucae* album, *Motacillae Leucomelae* autem nigrum ſit. Alia adhuc diſcrepantia in rectricibus occurrit. Auis haec migratoria, inſectivora habitat per aeſtatem in *Georgia* campeſtri ad fluuiorum ripas fruticetis obſitas, circa *Tifliſium* ad
Tab. XV. *Cyri* ripas a me obſeruata. Ex *icone* hic adiecta patet clare magnitudo naturalis, figura et color maris, idemque magis diſtincte ex deſcriptione, quam nunc communico.

*Roſtrum* ſubulatum, capiti longitudine ſubaequale, a fronte ſex, a rictu nouem lineas longum, atrum; *mandibula ſuperior* baſi obſolete trigona, apice tantillum incurua et vtrinque emarginata. *Vibriſſae* ad rictum breues, patentes. *Nares* baſilares, oblongae, capiſtro ſemitectae. *Lingua* ſagittata, roſtro vix breuior, nigra, apice bifida. *Oculi* fuſci.

*Capiſtrum*, *caput infra* vsque ad medium collum et ad latera vsque ad ſupercilia atrum; ſed *caput ſupra* et *corpus* totum niueum, pectore leuiſſime flaueſcente; baſi obtecta pennarum omnium fuſca.

*Alae*

*Alae* totae ſupra infraque atrae, apicis margine remigum ſecundariarum obſolete albido; complicatae vltra mediam caudam procedentes.

*Cauda* integra, duos pollices et ſex lineas longa; *rectrices* duodecim, albae, apice nigrae, eoque magis quo interiores, attamen nec in medio pari nigredo ad medietatem accedit.

*Femora* vsque ad genu plumoſa, fuſco et albido annulata; *tibiae* decem lineas longae, atrae, laeues; *digiti* pariter atri, quarum tres antici, quartus poſticus, omnes nigri, medio reliquis ſubaequalibus aliquantum longiore; *vngues* incurui, acuti, nigri, ſubaequales.

*Longitudo* auis extenſae ab apice roſtri ad caudae extremum ſex pollicum, trium linearum.

In *femina* ea, quae in mare nigra, fuſca; et quae in mare alba, ſordide cinerea ſunt.

## IV. *MOTACILLA ERYTHROGASTRA.*

Quanta de *Muſcicapa Melanoleuca* et *Motacilla Leucomela* affinitas depraedicata, tanta etiam depraedicanda de *Motacilla Erythrogaſtra* noſtra et *Motacilla Phoenicuro* LINNAEI. Mares ſat facile; ſed feminas vtriusque ſpeciei, a ſuis maribus toto coelo coloribus diuerſas et non niſi abdomine et cauda ſubanalogas, difficillime ex deſcriptione diſtingues. Femina *Motacillae Erythrogaſtrae* coloribus etiam multum aemulatur *Motacillam Oenanthen*, et cum eadem magnitudine conuenit, qua *Phoenicurum* nonnihil ſuperat.

 perat.

perat. Morbus et vitae genere *Motacilla Erythrogaſtra* aues congeneres imitatur: curſitat ad fluuiorum ripas; arbuſculis inſidens caudam motitat inquietiſſima, attamen non timida; volans pipit more *Motacillae albae*; mas feminae ſtrenuus cuſtos et comes fidelis; inſectis victitat, pulloſque, in nidis herbaceis inter *Hippophaës* ramos, cuius baccas etiam appetit, tuto occultatos enutriunt. Migratoria auis noſtra per aeſtatem habitat cum *Loxia Rubicilla* ad alueos glareoſos torrentium *Caucaſicorum*, quos, hyeme inſectis infeſto ſuperueniente, fine Octobris deſerit, clima mitius, inſectis pro cibo abundans,
Tab. XVI. auſtrum verſus quaeſitura. Figura tabulae XVI.
Tab. XVII. ſiſtit *marem* et figura tabulae XVII. *feminam Motacillae Erythrogaſtrae* magnitudine, figura et colore naturali. Ad *maris deſcriptionem* accedam.

*Roſtrum* triquetro-ſubulatum; apice ſubincurvo, integerrimo; colore atro; a fronte quinque, a rictu octo linearum longitudine. *Vibriſſae* ad rictum detritae. In cauitate oris lutea *lingua* bifida. *Nares* baſilares, rotundae, peruiae. *Oculi* fuſci.

*Vertex* vsque in *nucham* et alarum *ſpeculum* alba, fuliginoſo-ſordida; *capiſtrum*, *gula*, *genae* et *tempora*, *collum* et *interſcapulium* aterrima; *pectus* et totum *corpus ſubtus* atque *criſſum* vtrinque intenſe caſtanea.

*Alae* complicatae vltra medietatem caudae vix procedentes, aterrimae, ſpeculo albo quadratico, quod remiges 3—10. quae medio albae ſunt, efficiunt.

*Cauda*

*Cauda* tres pollices et duas lineas longa, integra, *rectricibus* duodecim vropygio concoloribus.

*Femora* vsque ad genu plumoſa, abdominis colore tincta, ſed ipſo genu atro; *tibiae* et *digiti*, quorum tres antici et inter ſe liberi, quartus poſticus, nigri coloris; *vngues* incurui, acuti, ſubaequales, digitis concolores.

*Longitudo* totius auiculae extenſae a roſtri apice ad caudae extremum ſeptem pollicum.

De *femina* dicenda habeo ſequentia: *roſtrum* et *pedes* atra, vt in mare; *criſſum* et *cauda* caſtanea, vt in mare, ſed dilutiora, apicibus rectricum et intermediis duobus rectricibus totis fuſceſcentibus; *reliqua* tota quanta *auis* cinerea, ſupra intenſior, infra dilutior et in abdomine cum aliqua ruffeſcentis mixtura; *magnitudo* cum mare eadem.

## V. *SCOLOPAX SVBARQVATA.*

*Subarquata* ob roſtrum gracile capite multo longius commode *Scolopacibus* LINNAEI adnumeratur, quae ob roſtrum gracile deorſum arcuatum ad *Numenios* BRISSONII pertinet. Magnitudine, habitu et colore proxime accedit ad *Cinclum Dominicenſem*, nec non ad *Calidrem naeuiam* BRISSONII; differt autem euidentiſſime roſtro longiore et arcuato. Auis huius migratoriae, per aeſtatem circa mare *Caſpium* obuiae et verſus *Tanain* vsque ad oſtium fluuii *Choper* adſcendentis, ad ripas arenoſas fluuiorum inſecta atque vermiculos legentis et curſitantis

ſtatu-

ſtaturam atque magnitudinem naturalem exprimit
T. XVIII. *icon* appoſita; color et reliqua ſcitu neceſſaria enunciantur in deſcriptione, quae ſequitur.

*Roſtrum* gracile, teretiuſculum, capite fere duplo longius, vnius pollicis et octo linearum, modice deorſum arcuatum, atrum; *mandibula ſuperior* ſulco e naribus procedente vltra medium exarata; apice obtuſiuſculo, laeuiſſimo; *mandibula inferior* canaliculata, tantillum ſuperiore breuior. *Lingua* longa, fere apicem roſtri attingens, ſagittata, integerrima. *Nares* baſilares, lineares, peruiae. *Oculi* fuſci.

*Orbitae* margo albidus; *lora* fuſca. *Caput* atque *collum* ſupra et *interſcapulium*, cum *alis nothis* fuſca, albido-ferrugineo, quo limbi pennarum adumbrantur, vndulata. *Dorſum* cinereum; *gula*, *tempora*, *collum inferius*, *pectus* et *abdomen* ruffo-ferruginea, gula albicante, pectore et abdomine fuſco, quo pennae terminantur, vndulata. *Ani* regio, *vropygium* et *caudae tectrices* ſuperiores et inferiores alba, maculis fuſcis oblongis, infra rarioribus picta.

*Alae* cauda aliquantum longiores, bifurcatae, totae cinereae, faſciola transuerſa obſoleta, albicante; *remiges* primores 1 — 10. decreſcentes, fuſco-cinereae, rachidibus albidis; ſecundariae 11 — 20. aequales, obtuſae, emarginatae, cinereae, apice albidae; reliquae valde elongatae, acuminatae, vireſcenti-cinereae, marginibus albicantibus; *tectrices* remigum quatuor primorum fuſcae, reliquae cinereae,
apice

apice albido; tectrices axillae et diſci alarum dilute cinereae; alae ſubtus et *hypochondria* niuea.

*Cauda* breuis, duos pollices longa, rotunda; *rectrices* duodecim fuſco-cinereae, rachidibus marginibusque albicantibus.

*Femora* ferruginea, fere vsque ad genua plumoſa; pars femorum nuda, *tibia* et digiti nigra; *digiti* tres antici, quorum intermedius longitudini tibiae aequalis et lateralibus nulla membrana adnexus; quartus poſticus, breuis; *vngues* parui, acutiuſculi, nigri.

*Longitudo* totius auis extenſae a roſtri apice ad caudae extremum octo pollicum et ſex linearum.

## VI. *SCOLOPAX CINEREA.*

Nomine hoc volo auem, quae magnitudine, colore et corporis pedumque habitu, excepto roſtro, ad *Canutum*, cuius *iconem Cel.* EDWARDS *Tomo* 2. *tabula* 276. dedit, magis quam ad aliam vllam; roſtro autem proxime ad auem gallice *le Corlieu* et anglice *the Barker* a *Cel.* ALBINO dictam et *Tomo* 2. *tabula* 71 repraeſentatam, quae me ſentiente a *Limoſa griſea* BRISSONII diuerſiſſima eſt, accedit. Adnumeranda illa proprie *Limoſis* BRISSONII, praeſertimque *Limoſae griſeae* propter colorem ſummopere analoga eſt. Differt autem a *Limoſa griſea* BRISSONII ſeu *Scolopace Totano* LINNAEI *Scolopax cinerea* noſtra, quod minor ſit; quod pedes in proportione corporis multo breuiores habeat; quod vro-

pygium cinereum, non album, ſit; quod rectricibus cinereis vnicoloribus, non albis fuſco faſciatis inſtructa ſit. Per aeſtatem habitat haec migratoria auis, quae affinitatem, inter genera *Scolopacis* et *Recuruiroſtrae* ſtrictiorem reddit, ad mare *caſpium*, circa oſtium fluuii *Terek* a me obſeruata; ibidem prolificat; in inundatis et praeſertim ad margines lacuum ſalſorum gregatim degit et inſecta pro victu quaerit. Sexus differentia, quantum comperire potui, externa nulla. *Icon* ſiſtit magnitudinem naturalem et figuram partium, deſcriptio reliqua cum colore; en! illam.

Tab. XIX.

*Roſtrum* capite duplo longius, ſeu vnum pollicem et decem lineas longum, gracile, teretiuſculum, ſubdepreſſum, ſurſum tendens; apice mandibulae ſuperioris laeui, tantillum deorſum incuruato, acutiuſculo; colore nigro. *Nares* baſilares, lineares, peruiae. *Oculi* fuſci.

*Tota auis ſupra* cinerea, pennis in medio fuſco pictis, quae macula fuſca in capite et collo linearis, in interſcapulio oblonga, in vropygio transverſa; *tota auis infra* alba, a gula ad pectus cinereo-ſtriata, a pectore ad caudae tectrices inferiores niuea.

*Alae* cinereae, faſcia transuerſali obſolete albida; *remiges* primores fuſcae, rachide primae alba; ſecundariae cinereae, quarum eae, quae primoribus proximae ſunt, apice albido gaudent, reliquae autem carent.

*Cauda*

*Cauda* alas complicatas vix excedens, duos pollices et tres lineas longa, integra; *rectrices* duodecim cinereae totae, ſed vtrinque extima albido cinereoque varia.

*Pedes* fuſco-rubentes; *femora* ſupra genu quoad tres lineas denudata; *tibiae* roſtro dimidio vix longiores; *digiti* tres antici, baſi ſubpalmati, quorum medius tibiae longitudine aequalis, quartus poſticus; *vngues* in digitis omnibus obuii, ſubaequales, acutiuſculi, nigri.

# QVATVOR FVCORVM SPECIES DESCRIPTAE.

ab

*I. LEPECHIN.*

Plantas marinas, quas fucos dicunt, effinxit Natura tenaces et coriaces, non raro corneas aut membranaceas, excluſit que in omnibus huc vsque notis cauum internum euidentius, niſi illas bullas aut folliculos velis, qui in diuerſis fucorum ſpeciebus obſeruantur, ipſorum que fructificationi inſerviunt. Aſt mare Album, inter varias fucorum ſpecies, quas mare Mediterraneum in ſuo gremio fouet, aut quibus mare Kamtſchatcam alleuens abundat, vel denique quae Oceano ſeptentrionali indigenae ſunt; producit duas ſpecies, quae euidenti cauo inſtruuntur, et quaſi medium inter Fucos atque vluas conſtituunt; horum alterum *tubuloſum*, *ſaccatum* alterum nominare placet.

## FVCVS TVBVLOSVS.

Fucus caule tereti ramoſo, ramis oppoſitis vel alternis, foliis tubuloſis.

DE-

## DESCRIPTIO.

Radix eſt nulla, niſi orbiculum paruum velis, quo ſaxis aliis que corporibus marinis affigitur. Ex orbiculo hoc ſurgit caulis teres, ſat firmus ad inſtar chordae muſicae, qui modo per aliquot lineas eleuatur, modo ſtatim in ramos mox oppoſitos, mox alternos, ex omnibus plagis caulis emergentes, finditur. Caulis atque rami teretem ſuam figuram ſeruant fere ad extrema, vbi complanati euadunt, atque in folia bifurca abeunt. Interna ipſorum ſubſtantia tenui perforatur canali, qui cum dilatione extremorum ipſe quoque dilatatur.

Ex ipſo caule ramis que vndique protruduntur folia tubuloſa, aliquando oppoſita, ſaepe alterna, non raro bina terna ve vni loco inſerta, tantiſper vndulata, quae omnia ſeſſilia ſunt, tenui que principio orta ſenſim ſenſimque dilatantur, et ad apices iterum in acumen exeunt. Folia inferiora tam caulis, quam ramorum minora ſunt, media longiſſima, apicem vero terminantia mediocria.

Cauitas interna foliorum inaequalis eſt et viſcido vndique illinitur.

Sed quo modo propagatio ſpeciei in hoc fuco contingat, nullus indicare valeo; an forſan illa fiat per teneriora ramenta, quae in iunioribus ſuperficiem foliorum occupant, in adultis vero ad inſtar pilorum, hinc inde ſparſorum viſuntur? Color totius plantae pulchre rubet: magnitudo ſaepe octo pollicum. Creſcrit copioſe in profundis maris Albi,

 et

et praecipue ad frequentes inſulas ſinus Candalanſcoy (Кандалакская губа). Vſum oeconomicum incolae norunt nullum. Tab. XX. fucum noſtrum magnitudine naturali ſiſtit. litt. (*a*) extremitatem ramorum complanatam oſtendit, litt. (*b*) cauitatem internam in foliis abruptis monſtrat.

Fuco deſcripto proxime Natura iunxit fucum

## SACCATVM
### qui eſt.

Fucus caule plano, inflato, ramoſo; ramis oppoſitis, foliis ouato oblongis, tunicis, intus cauis.

## DESCRIPTIO.

Hic Fucus itidem adglutinatur corporibus marinis aut lapillis per ſpeciem radicis tuberculatae, cuius ambitus eſt rotundus. Ex hac protuberantia ſurgit caulis tenuis, teres, ſolidus fili emporetici craſſitie, duas lineas longus, qui dein complanatur; latior atque cauus redditur. Inde per aliquot lineas ſimplex, ſimplicia quoque emittit folia ex ouato oblonga, tumida, inflata, intus caua, margine vndique colloſo, petiolata, petiolis tubuloſis. Sed caulis ſtatim finditur in ramos oppoſitos, cauli analogos, qui gerunt folia caulinis ex amuſſim ſimilia, oppoſita, ramos per ſua paria terminantia. Color totius fuci ruber eſt: longitudo V. pollicum Fructificatio perfici videtur vt in praecedenti. Locus Oſtium maris Albi circa tres inſulas; vbi ad inſtar glomerum integros inueſtit lapides. T. XXI. magnitudine naturali

turali fucum deſcriptum repreſentat, litt. (*a*) cauitatem internam foliorum monſtrat.

Sequuntur duae ſpecies, quae folia plana gerunt, earum primam proponere placet ſub nomine.

## FVCI DICHOTOMI.

Fucus acaulos frondibus dichotomis, membranaceis, ligulatis, vndique proliferis.

## DESCRIPTIO.

Radix eſt nulla ſed frons ipſa lapidibus aliisque corporibus marinis adfigitur et ſuperficie ſua inferiore exprimit figuram illius corporis, cui adhaeret. Illa frondis pars, quae caulem mentitur, ex latiori principio paullulum anguſtatur, et quaſi collum interceptum efficit; inde ſenſim ſenſimque lateſcit, et emenſis 14 vel 15 lineis finditur in frondes, vt plurimum per dichotomiam diuiſas, interius anguſtas, medio dilatatas, extremitate iterum attenuatas; quae extremitates denuo in nouas proles vel dichotomas, vel ternas diſtinguuntur. Omnes frondes ex vtroque latere emittunt ligulas ſibi ſimiles dentibus longioribus modo ſimplicibus, compoſitis modo inſtructas, inter quas rudimenta nouarum ligularum iacent. Neruus omnino nullus, ſubſtantia membranacea firma pellucida, color amoene rubens; magnitudo ad ſummum pedis dimidii. In littus maris Albi, quod incolis Terſcoy audit, copioſe noſter

fucus

fucus eiicitur; et ab ouibus auide, ob teneram ſuam ſubſtantiam, conſumitur. Tab. XXII. magnitudine naturali fucum dihotomum ſiſtit.

*Nota*: Fucus membranaceus rubens anguſtifolius, marginibus ligulis armatus. Rai Syn. 47. 33. Fucus humilis membranaceus acaulos elegantiſſimus ruber, capillis longis fimbriatus. Moriſ. hiſt. 13. p. 646. Fucus frondibus membranaceis proliferis ciliatis Ill. *Linn.* et Hudſ. angl. 472. n. 31. vt et deſcriptio a Clariſſ. *Gmel.* in h. f. p. 176. ad fucum Ciliatum data, cum noſtro fuco conuenire videntur; ſed Icon, per quem dictum fucum Gmelinus l. c. Tab. XXI. fig. 1. expreſſit, toto coelo a noſtro Fuco differt: propius vero eiusdem tabulae figurae tertia, quae fucum Ligulatum *Gmelini* ibid. p. 178. deſcriptum repreſentat, ad noſtrum fucum Dichotomum accedit. Interim fructificationis modus in fuco Dichotomo obſeruandus, ad aliam omnino ſectionem ipſum relegare ſuadet. Quamuis non eſt inficiendum iuniores fucos in modo ſui propagandi imponere posſe; videtur enim illa perfici per proles frondium deciduas, quae omnino teneriores ſunt, et colore magis diluto gaudent: ſed iidem adultiores facti, fructificationis organa oſtendunt in globulis nigricantibus, ſeſſilibus, magnitudine ſeminis milii, inter dentes per vtrumque latus ligularum diſpoſitis. Hinc iure vindicat ſibi locum in familia fucorum globuliferorum, et exinde concluditur fucum Dichotomum nobis dictum vel prorſus eſſe nouum, vel inſufficienter ab Auctoribus deſcriptum.

FVCVS

# FVCVS GRAMINIFOLIVS.

Fucus caule tereti, ſubdiuiſo, tubuloſo, foliis linearibus duplici ſerie poſitis, planis membranaceis.

## DESCRIPTIO.

Radix nulla eſt, ſed caulis teres tenui oritur principio et ſenſim ſenſimque robora ſumit ita, vt extremum ipſius multo ſit validius. Breui ab exortu ſuo non raro diuiditur in ramos ſibi ſimiles, ſaepe et ſimplex ſeparatam efficit frondem. Ab initio fit ſolidus, ſed quo vlterius pergit, eo magis pulpoſus euadit et intus perforatur canali. Caulis et rami veſtiuntur foliis planis, tenerioribus, linearibus oppoſitis denſis, duplici ſerie ſitis, quae ad apicem in faſciculum colliguntur et caulem atque ramos terminant. Propagationem huius fuci eodem modo contingere, quo in omnibus fucis membranaceis fieri aſſolet, probabile videtur. Nulla enim tubercula, neque alia corpuſcula globulifera detegere potui, licet diuerſae aetatis fucos examinandi poteſtas fuerit. Color totius fuci cinnabarinus, magnitudo non raro pedis 1. Locus mare Album. Tab. XXIII. fuci deſcripti frondem ſimplicem magnitudine naturali ſiſtit.

# MINERA
# ARGENTI CORNEA
## CHEMICE EXAMINATA ET DESCRIPTA.

Auctore

*E. LAXMANN.*

Praeterlapſa equidem iam illa tempora ſunt, in quibus ſperma Ceti Camphoramque (*a*) ad inflammabilia foſſilia retulerunt, et Bezoar in terra creſcere, vti Boracem in animalibus (*b*), crediderunt mineralogi: ceſſarunt illi quoque dies, in quibus Naphta cum Succino lapidibus annumerabantur, et Cinnabaris a Mercurio genere ſeparabatur (*c*). Certe noſtrum Seculum, etiam ratione ad Regnum minerale habita, feliciſſimum nominare poſſumus. Multorum quippe corporum ſubterraneorum genuina cognitio nobis innotuit, de quibus veteres, vel plane nullam, vel erroneam et ſuperficialem ſolummodo notitiam habebant. Omnino recentioribus noſtri aevi

---

(*a*) Libauii Singularii Lib. III. Aluari Alfonſi Barbae: El arte de los Metales.

(*b*) Sigfrid Aron Forſii Minerographia.

(*c*) Encelius de re Metallica. Schwenckfeldii Catalogus foſſil. Sileſiae. Dezalier d'Argentwille Hiſtoire naturelle.

vi Mineralogis conſummatiſſimis, vt illuſtris de *Linné* verbis vtar, ſempiterna ab omnibus aequis Cenſoribus debetur gloria, quod infinito labore et ſudore montium et naturae abyſſum penetrarunt (*d*). Hi Malachitem a Iaſpide et Lapide nephritico ſeparant, minerisque cupri annumerant; Lapidem Lazuli vero e medio minerarum huius metalli removent, et inter lapides Zeoliti generis collocant. Hi Lapidem calaminarem et Galenam ſterilem ſic dictam, non terras inanes, ſed veras Zinci mineras eſſe oſtendunt, et ſexcenta alia. Interea tamen non omnem adhuc ex vaſtiſſimo Regni mineralis campo ſuſtulerunt lapidem; varii nempe adhuc naeui in deſcriptionibus praeſertim illorum foſſilium occurrunt, quae vel ob pretium raritatemque ipſorum examini pyroſophico ſubiicere non potuerunt vel hypotheſi aliqua ſeducti, ab anteceſſoribus mutuo acceperunt, mineralogi. Horum e numero noſtra quoque eſt Minera argenti cornea, cuius poſt Kentmannum (*e*) fere omnes mentionem faciunt, licet pauciſſimis videre licuit. Operae pretium ergo eſſe putaui, rariſſimis eius fruſtis muſaeum orbare, ipſaque iuſto examini metallurgico ſubiicere, et quicquid per analyſin chemicam nec non multorum annorum experientiam mineralogicam didici, rerum naturalium

Ppp 2 ſcruta-

(*d*) *Linn.* Syſt. Nat. Tom. III. Praefat.

(*e*) *Geſnerus* de omni rerum foſſilium genere cum Nomenclatura Kentmanni.

ſcrutatoribus, quos hucusque principia argenti cornei naturalis latuerunt, communicare.

Nomen minerae noſtrae quod attinet, ideo cornea appellata eſt, quoniam cultro raſa, colorem glabri apicis cornu bouini fuſci vel cinerei oſtendit. Antiquis mineralium deſcriptoribus, quantum ego quidem ſcio, incognita fuiſſe videtur, quippe ante nominatum Kentmannum, neque nomen neque vlla eius mentio, niſi cineream argenti mineram Plinii velis (*f*), in ſcriptis illorum occurrit.

Patriam hucusque agnoſcit ſolam Saxoniam et in Sibiria tractum Kolywanenſem. Prima eius fruſta *Mariebergae* inuenta ſunt, poſtea eadem minera *Iohan Georgenſtadii*, et nuperrime, narrante *Brünnichio*, *Oberſchoenae* detecta eſt. Nunquam vero magna copia, ſed rariſſime ſemper in conſpectum venit. In Sibiria vero e ſuperiori parte argentifodinae illae incomparabilis, cui a ſerpentibus nomen (Smeinogorskoi rudnik) ab anno 1745 vsque ad annum 1768 adeo maxima copia haec minera, auro argentifero natiuo vberrime comitata, obuenit, vt totam iſtam ſuperiorem partem (*g*) nominati montis, venam cumulatam magnam complectentis, ſola hac minera, interrex-

(*f*) *Plinii* Hiſt. nat. Lib. XXXIII. Cap 6.

(*g*) In *Faucibus* puta a Commiſſione Imperiali Praeſide Generale *Bejero* anno 1745. habita, Denominatis (Commiskoi rosnos коммиской разносъ) vt et anno 1748. in *puteis* primo et ſecundo numero notatis, qui nunc *fauces* illas magnas (bolſchoi rosnos большой разносъ) conſtituunt, praecipue eruebatur.

tertextis paucis aliis, conſtare diceres: quam metallicultores ibidem, pro plumbo natiuo corrupto, argento largiter permixto, vel ſpecie quadam Minerae argenti vitreae, habuerunt, et vulcano pro excoquendo argento tradiderunt. Nunc vero omnibus fere ſuperioribus locis fodinae ditiſſimae iam exhauſtis, argentum quoque corneum rarius eſſe incepit, nec niſi in fiſſuris fibrisque Spati *pendentis* et Cornei *jacentis* in conſpectum venire ſolet.

Si datas ab antiquioribus autoribus huius minerae deſcriptiones examinemus, primo intuitu viſerimus, illos ferme omnes ſolummodo ſemipelluciditatis, coloris cornei et ductilitatis mentionem feciſſe, paucosque inſuper liquabilitatem ſolo igne candelae obſeruaſſe, et ſic relictis reliquis qualitatibus laudandam ideam ſuperficialem ſuppeditaſſe. Recentioribus ergo, anteceſſorum deſcriptionibus non contentis, magis de interno habitu partibusque conſtitutiuis, quam de externa facie ſolicitis, varias vias incedentibus, omnes illae ambiguitates adſcribendae, quae in nuperrima huius minerae hiſtoria occurrunt. Ex his namque *Linnaeus*, *Cramerus*, *Wallerius*, *Cartheuſerus* aliique varii iuniores argentum hic pauco ſulphure arſenicoque mineraliſatum vel laruatum eſſe contendunt. *Cronſtedius*, chemicam viam nimis ſtricte incedens, occaſione experimentandi deſtitutus, hypotheſi veritati ſimillima fiſus, ab effectu in laboratoriis metallurgicis vſitatiſſimo ad effectum officinae naturae concludens, vnicum acidum ſalis communis hanc mineram conſtituere dixit. *Lehmannus*

 de

de principiis eius haeſitans, audita theoria Cronſtediana, etiam praedictum acidum vel arſenicum asſumenda eſſe putauit. *Scopoli* cum hocce acido ferrum combinauit (*h*). *Iuſti* feruida imaginatione inſpiratus, vti Annaebergae Auſtriae inferioris nouas argenti mineras alcali mineraliſatas finxit, ita hic quoque praeter ſulphur et Arſenicum alcali quoddam addidit. Omnium tamen miſerrime de minera noſtra ſomniauit *Iugel* nunc iterum ea ipſa in Geometria ſua ſubterranea peius dicens, quae iam ante ducentos annos melius dixerunt rudes metallorum foſſores, dum illam, lapidem durum, coti ſimilem, in flauo et coeruleo Corneo obuium, eſſe ſtatuit (*i*).

Differentiis autorum praecipuorum ſic breuiter expoſitis, ad ipſam deſcriptionem minerae noſtrae tranſeo, colorem, figuram, duritiem, odorem aliasque eius qualitates conſiderans.

Color *externus* in variis fruſtis varius, ab ipſo enim micante albido, quem griſeo perlatum nominare poſſum, per omnes variationes cinerei in flaveſcentem, virideſcentem, violaceumque vergentis vsque in fuſco nigreſcentem ſaturatur. *Internus* color *raſurae* faciem cornu bouini cinereo fuſci vel fuſco plumbei aemulatur; *fracturae* vero plerumque medium inter griſeum et fuſcum tenet absque vllo nitore.

Quoad

(*h*) Principia Mineralogiae ſyſtematicae et practicae pag. 211.
(*i*) Johann Gottfried Jugel Geometria Subterranea oder die Markſcheidekunſt S. 113.

Quoad figuram externam minera noſtra amorpha eſt vocanda, fruſtula enim cryſtallina cubica vti famoſum illud Freibergenſe rariſſime occurrunt et in Sibiriae fodina inter maximam eius copiam nunquam viſa ſunt. Pura interdum in Ochra plumbi mineris ſcatente, cum Spato huius metalli, Coeruleo montano cryſtallino, Cupro natiuo aliisque, in glebis varie formatis, inuenitur: interdum fiſſuras fibrasque tam *pendentis* quam *jacentis* auro argentoque natiuis ornata replet: ſaepiſſime vero et vulgariter lamellis Spati particulisque Cornei ſubtiliſſime et fere inconſpicue intertexta eruitur, et ſub nomine minerae argenti ſpataceae vel corneae liquatur. Ratione internae figurae ſiue texturae omnino metallis auro, argento aliisque excepto ferro ſimilis eſt. Magnitudine vero ope Microſcopii *Dollondiani* maxime aucta, ob ſemipelluciditatem a metallis differt, nec aliter, ac ſi ex innumeris diaphanis globulis conſtaret, qui cuticula opaca veſtiti ſunt, et in lamella cultro abſciſſa tenui, elegantes vndulatas figurationes oſtendit, quarum iconem figura a Tab. XXIII. exhibet. T. XXIII.

Superficies in fruſtis puris interdum ſcabriuſcula apparet cum debili quodam nitore, plerumque autem, quaſi farina aſperſa vel tunica quadam ipſa minera fragiliore induta eſſet, obuenit.

Flectitur noſtra minera et ducitur ſub malleo eodem modo ac minera argenti vitrea flecti et duci ſolet, cui duritie parum cedit, eodem fere gradu,

quo

quo haec metalla mollia ſtannum puta plumbumque, hac qualitate ſuperat.

Pelluciditate varia plerumque vero valde debili gaudet. Tenues eius lamellae, vti laminae cerae flauae decuplo craſſiores translucent; pellucida vero eius fruſta albo coruo rariora eſſe ſolent.

Ratione qualitatis liqueſcendi adhuc easdem leges ſancte ſeruat, quas iam ante ducentas annos Kentmannus in ſuo fruſtulo detexit: parua nempe eius fruſta candelae admota liqueſcunt cum odore ſulphuris, maioribus vero eodem ignis gradu opus eſſe videtur, quem plumbum liquefactum poſtulat.

Grauitas ſpecifica ad argentum puriſſimum, hoc eſt ex luna cornua reductum, plerumque ſe ita habet vt 140 ad 200.

Inter omnes vero illas notas, quibus haec minera ab omnibus aliis diſtinguitur, nulla conſtantior eſt, quam odor eius ſpecificus, non ingratus, debilis, mixturam aliquam vitriolico argillaceam vel margaceam indicans. Hanc notam, quam Autores ſilentio tranſierunt in omnibus tam ſaxonicis quam ſibiricis fruſtis ſemper praeſentem inueni, et non ſolum in puris, ſed etiam in mineris tenuiſſime inſperſis (*k*) intertextisque certiſſimam. Videtur hic odor

(*k*) In fruſtulis enim illis rariſſimis *Iohan Georgenſtadienſibus*, ob virides cryſtalliſationes micaceas notatu dignis, ad inſtar fuci cinerei tenuiſſime licet inſperſa occurrit, odorem nihilominus tamen valde ſenſibilem prodit.

odor quoque ratione ad durationem habita valde conſtans eſſe, quippe in veterrimis Saxoniae et primis Sibiricis fruſtis aeque ſenſibilis occurrit ac in illis qui nuperrime effoſſa ſunt (*l*).

Reſpectu copiae argenti ex hac minera, non vnam fouent ſententiam autores, quod neque mirandum, quoniam cum tunicis tenuiſſimis nulla certa experimenta inſtituere potuerunt. Ego per centies et plus repetita experimenta didici, mineram puram ex centum libris fere ſeptuaginta libras argenti puri dare, eodemque modo tractandam eſſe, quam autores in arte docimaſtica de minera argenti vitrea praeſcribunt.

Supereſt iam, vt meum qualecunque de hac minera iudicium in medium proferam.

Ab communi illa rerum creatarum ſorte, quod nimirum generantur, ad maturitatem perueniunt, ſeneſcunt et iterum in prima principia reſoluuntur, quo ipſo rurſus ad nouam geneſin quaſi recta via reuoluuntur, varias mineras foſſilia varia excipienda eſſe docent nonnulli Auctores. Imprimis vero de mine-

(*l*) Fruſtulum egregium praedictis cryſtalliſationibus viridibus parallelopipedis micaceis ornatum, a beato Chriſtiani olim Conſiliario Collegiorum Barnauliae accepi, quod inſignis ille metallurgus, cui omnem auri argentique culturam kolyuanenſem debemus, adhuc iuuenis ante 40 annos Saxonia ſecum tulit, hunc odorem ſpecificum ſenſibiliter adhuc exhalantem.

mineris argenti veris vitream puta rubramque magnus mineralogus *Henkelius* affirmauit illas nunquam fatiſcere vt loquuntur metallurgi vel minui et reſolui poſſe, ſed ſemper immutatas permanere, acuoque edaci pertinaciter reluctari (*m*). Certe primo huic poſt Agricolam mineralogiae parenti nunquam contradicerem, niſi res ipſa loqueretur. Mineram argenti rubram a fortiſſimo hoc naturae dente rodi et in puluerem vitriolico arſenicalem verti, iam plures obſeruarunt mineralogi (*n*). Quod vero minera argenti vitrea, huic quoque legi ſubiecta, illud in ipſa illa ab ſerpentibus inclyta fodina didici. Inueni ſcilicet omnes illas ab Autoribus allatas huius minerae varietates, fuſcam nimirum, flauam, cineream et virideſcentem, nihil aliud eſſe, quam vnam eandemque mineram, tempore et aetate ſolummodo vel maturitate, vt ita dicam, differentem.

Duriuſcula illa fruſta violaceo plumbea, quae cum Galena et pyrite cupreo vel ſubſtantia quadam alia, glan-

(*m*) *Henkels* Pyrithologia oder Kiesʒhiſtorie S. 685. Quod tamen non de illis, quae adhuc in gremio venarum ſuarum latent, ſed tantum de illis contendit vir magnus, quae in muſaeis aſſeruantur vt ex ſequentibus paginis l. c. liquet.

(*n*) Pura illa Minerae argenti rubrae fruſta, (non de paruis Pyriti intertextis granulis ſed de magnis rubris homogeneis glebis loquor), quae argento vitreo cryſtalliſato obvolutae ſunt, vti Freibergii occurrere ſolent, ſenſim fatiſcere et puluere vitriolico obduci video, licet in muſaei ſatis ſicci arcis vitreis ſeruantur.

glandularum ſiue macularum modo ipſis immixtis, adhuc immutatis nitentibus, venas ſuas ex aſſe replent, et quaſi vnum corpus ſolidum conſtituunt, pro ea varietate habui, quam natura in ſua officina, ad debitam huius minerae maturitatem, in mollitie nempe et colore plumbi conſiſtentem, perducere adhuc non potuit. In eiusmodi venulis metallicis enim, quae ambobus lateribus *pendenti* puta et *jacenti* arctiſſime conglutinatae ſunt, aëri aquisque ſubterraneis nullus acceſſus conceditur, et conſequenter nulla fatiſcentia vel reſolutio et mollitio locum habere poteſt.

Cum autem praedicta duo elementa ſalibus comitantibus venas penetrant, ſiue id longitudine temporis, ſiue terrae motu, ſiue quacunque alia cauſſa fiat, variae ſolutiones, deſtructiones, regenerationesque producuntur. Partes nimirum illae galenaceae, pyritoſae, calcareae aliaeque, menſtruorum vi magis ſubiectae, ſoluuntur, et minera noſtra, quae in priori varietate cum his heterogeneis lateribusque ſuis in vnum corpus ſolidum, durum conglutinata erat, nunc iam cauernoſa (druſig) purior, ductilior et mollior ſaturato colore plumbi inter latera ſua aeri aquisque expoſita iacet; eſtque nihil aliud, quam frequentiſſimum vetuſtiſſimumque illud, argentum rude plumbeo colore Auctorum, quod recentiores mineram argenti vitream, licet minori iure, vocant. Hanc, quam tempori ſolummodo debemus varietatem, maturum argentum vitreum dicerem.

Si poſt plura ſecula, vt loquuntur Metallarii, ſero venerit foſſor metallicus, non amplius mineram ſuam ſaturato plumbeo colore et nitore praeditam inuenerit, ſed vel pallidam, nitoreque ad partem orbatam, vel cineraceam in fuſcum, flauum viridemque colorem vergentem, cum aliqua debili pelluciditate, nec non odore ſpecifico, quem ſupra deſcripſi, vt putares naturam ſubtiliſſimam aliquam ſolutionem ſulphuris, argentum hic mineraliſantis incepiſſe, quae cum pauca volatiliſatione metalli et diminutione grauitatis ſpecificae coniuncta eſt. Hanc temporis quoque filiam, quae Autoribus *minera cornea* audit et inter omnes argenti mineras rariſſime occurrit, pro tertia huius minerae varietate permatura haberem.

Haec iam ſeneſcens argenti minera ſenſim metallo ſuo orbatur, quod in vicinitate iam nudum occurrit. Color eius pallidus vel fuſcus nigreſcit et amiſſa tenacitate in fragilem, carboni ſimilem, manus inquinantem maſſam permutatur. Haec varietas, quam autores, nunc mineram argenti nigram nunc mineram vitream fragilem, vocare ſolent, mihi vltima minerae noſtrae aetas eſſet.

Pallide plumbeae illae minerae ſiue argenti vitrei mollis tenuem lamellulam, illa tamen duplo craſſiorem quam Figura *a.* monſtrat, magnitudine aucta exhibet Figura *b.* Eſt illa quoad partem pellucida et ex eiusmodi corpuſculis globuloſis compoſita ac de minera cornea iam dixi. Figura *c.* lamellu-

mellulam eiusdem minerae Freibergae ortae repraeſentat. Luna cornua autem, quae arte producitur ſub Microſcopio viſa, ex homogeneis partibus conſtare videtur, quaſi cerae flauae fruſtulum eſſet.

Ex hac breui hiſtoria fatorum argenti rudis plumbei coloris videtur mineram noſtram corneam non ſolum eiusdem proſapiae eſſe, iisque fere ac illud conſtare principiis conſtitutiuis, ſed etiam illos autores non erraſſe qui illam ſubdiaphanam ſubſtantiam ſulphure potiſſimum mineraliſatam eſſe ſtatuunt et mineram vitream albam (Weiſſes Glaserz) vocant, quod etiam ex inſtitutis cum ipſa plurimis experimentis vberius patebit, quorum nonnulla coronidis loco hic ſequuntur.

Accepi minerae noſtrae puriſſimae, ſubtiliſſime raſae ſemiunciam, et vnciis duabus olei vitrioli concentratiſſimi ſuperinfuſis, ex retorta vitrea probe loricata, applicato recipiente proportionatam aquae copiam continente, omnibusque obſeruandis obſeruatis, ex fortiſſimo igne arenae diſtillaui. Hanc operationem eum in finem inſtitui, vt aliquid acidi ſalis communis acciperem, ſi hoc, vt nonnulli volunt, mineraliſatum eſſet. Accepi autem, iuſto adhuc ignis gradu adhibito, nihil, aucto vero ad vehementem vsque, ipſum oleum, odore ſulphureo impraegnatum tranſiit. Luna cornua factitia autem optime edulcorata ex altera eiusmodi retorta, in vno furno becheriano, eodem igne iisdem cautelis tractata, primo dedit portionem acidi ſalis communis, quod argentum acido nitri ſolutum egregie prae-

cipitabat et cum hocce acido lege artis permixtum aurum ſoluebat: poſtea quoque ipſum purum oleum, relicta calce, euehebatur.

Nullo ſic acido ſalis per diſtillationem inuento, putaui illud via ſublimationis inueniri poſſe. Accepi igitur Mercurii Viui vnciam vnam, quam cum ſemiuncia minerae noſtrae puriſſimae in mortario vitreo trituraui. Durante trituratione per totas duodecim horas, nulla tamen amalgamatio nullusque legitimus aethiops inſequi voluit, ſed minera in ſubtiliſſimas lamellulas nigricantes detrita ſuperficiem mercurii ſolummodo obueſtiebat.

Peracta operatione aliquid cinnabarini fuſci cum multo mercurio in collo vitri apparuit. Ad mercurium ſublimatum corroſiuum vero quod attinet, quem expectaui, nec vllum quidem eius veſtigium adfuit, quod neceſſario adeſſe deberet, ſi acido ſalis muriatici argentum mineraliſatum fuiſſet.

Praeſentiam vero ſulphuris, praeter praedictam cinnabarificationem, ex hepateſcenti huius minerae qualitate, ſatis cognoui, vt ex ſequentibus breuiter expoſitis liquet.

1. Partes nimirum anaticae minerae noſtrae purae ſubtiliſſime raſae et ſalis tartari bene permixtae, crucibulo haſſiaco commiſſae, et in aperto igne tractatae, vt de hepate ſulphuris, excepta ſola agitatione, monent auctores, candefactae mediocriter intumeſcebant, aucto vero ignis gradu, in maſſam compactam coeruleo cineream, ſuperficie glabra, ſubſidebant; quae poſt refrigene-

gerationem affuſa aqua diſtillata tempore duodecim horarum ſoluebatur. Solutio hac, aquae limpidiſſimae ſimilis, inſtillato acido nitri, cum turbatione et efferueſcentia fuſco opalina in luteum vergens euaſit, prodito nauſeoſo odore ipſius hepatis, quem nominatum alcali cum ſulphure natiuo e monte ſulphureo *argunenſi* ſimul paratum exhalabat.

2. Eadem minera cornea cum ſpato adhaerente praedicto modo liquata, in maſſam nigro cineream abibat, cuius aquoſa ſolutio flaueſcens, limpida affuſo acido nitri cum efferueſcentia et turbatione colore fuſco opalino tingebatur, praeſentiamque aliquam hepatis indicabat.

3. Minera argenti vitrea pura cryſtallina Freibergenſis qualis in Spato albo occurrere ſolet iisdem enchiridiis tentata, nigro coerulea coagulata fundum crucibuli petebat: ſolutio vero aquoſa in viridem colorem vergens cum nominato acido turbabatur, fuſcumque hepar absque ſenſibili ebullitione largiebatur.

4. Eadem argenti minera vitrea pura non cryſtallina, ratione coloris et mollitiei a plumbo vendibili difficillime dignoſcenda eiusdem fodinae, eodem modo vti dictum fuſa, maſſam nigram colore fuliginis praebebat, cuius ſolutio aquoſa, eleganter oliuacea, limpida, addito acido nitri cum efferueſcentia et turbatione, fuſcum lac ſulphuris tunica veſtitum dedit odore valde ſenſibili hepatico.

5. Mi-

5. Minera Kolywanenſis vitrea ſatis adhuc dura, colore violaceo, maculis rubicundis pyritoſis parvis interſperſis, cuius iam ſupra pag. 490. mentionem feci, praedictarum minerarum modo tractata, in maſſam fuſco hepatico colore ornatam liquabatur; quae aqua ſoluta ſolutionem cinereo virideſcentem limpidam dedit, affuſo acido nitri vehementer efferueſcentem, opalino fuſcam, cuticula veſtitam, hepar ſulphuris redolentem.

Inuento ſic ſulphure in omnibus memoratis mineris, quas naturam cognationis vinculo coniunxiſſe videmus, etiam cum Luna cornua factitia probe edulcorata idem periculum feci: haec autem modo illarum fundum crucibuli non petebat, nec coagulabatur, ſed poroſa cauernoſaque manebat. Alcali vero, ſuperfuſa aqua diſtillata, ſoluto, argentum pulcherrimum varie ramoſum quaſi dendriticum apparebat.

# ASTRONOMICA.

# COMMENTATIO
# HYPOTHETICA
## DE PERICVLO, A NIMIA COMETAE APPROPINQVATIONE METVENDO.

Auctore

*L. EVLERO.*

Cum haec quaeſtio ſine dubio maximi ſit momenti, neque tamen ob ſummas calculi difficultates quicquam certi adhuc definiri potuerit, laborem haud ingratum me ſuſcepturum eſſe arbitror, ſi hypothetice caſum finxero, quo cometa proxime ad terram eſſet acceſſurus; atque omnes mutationes, quos tam terra quam cometa in motu forent paſſuri, accuratius determinavero. Quod quo facilius exſequi liceat, cometam in ipſo plano eclipticae moueri aſſumam, vt ſaltem difficultates calculi ex diuerſitate planorum oriundas remoueam. Hunc in finem ante omnia formulas generales pro motu tam cometae quam terrae quatenus in ſe inuicem agunt perpendi conueniet.

§. 1. Sit igitur S centrum ſolis pro fixo habendum, eiusque maſſa ſit $= A$; tum vero ad tempus quodcunque $= t$ reperiatur centrum terrae in T, cometa vero in Z, ac ponatur maſſa terrae $= B$, cometae autem $= C$: vbi ex parallaxi ſolis nuper ac- T. XXIV. Fig. 1.

curatiſſime determinata compertum eſt eſſe propemodum $A:B = 360000:1$. Iam ponantur diſtantiae a Sole $ST = u$ et $SZ = v$; at diſtantiae terram inter et cometam $TZ = w$. Et aſſumta directione fixa $S\Upsilon$, quae in plano eclipticae ad initium arietis tendat, ad eam ex $T$ et $Z$ perpendicula demittantur $TX$ et $Zx$, vocenturque coordinatae pro terra $SX = X$ et $XT = Y$; at pro cometa $Sx = x$ et $xZ = y$. Praeterea ponantur anguli $\Upsilon ST = \Phi$ et $\Upsilon SZ = \omega$, vt hinc obtineamus coordinatas

$$SX = X = u\,\text{coſ.}\,\Phi \text{ et } XT = Y = u\,\text{ſin.}\,\Phi.$$

Tum vero

$$Sx = x = v\,\text{coſ.}\,\omega \text{ et } xZ = y = v\,\text{ſin.}\,\omega,$$

hincque duplici modo erit

$$TZ = w = \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2};$$

deinde vero etiam

$$w = \sqrt{uu + vv - 2uv\,\text{coſ.}\,(\omega - \Phi)}.$$

§. 2. His conſtitutis erit vis qua ſol terram attrahit $= \frac{A}{uu}$, vnde oritur vis ſecundum

$XS = \frac{AX}{u^3} = \frac{A\,\text{coſ.}\,\Phi}{uu}$ et vis ſecundum $TX = \frac{AY}{u^3} = \frac{A\,\text{ſin.}\,\Phi}{uu}$. Deinde quia cometa ad ſolem vrgetur vi $\frac{A}{vv}$, hinc naſcentur vires ſecundum

$$xS = \frac{Ax}{v^3} = \frac{A\,\text{coſ.}\,\omega}{vv} \text{ et ſecundum } Zx = \frac{Ay}{v^3} = \frac{A\,\text{ſin.}\,\omega}{vv}.$$

Porro quia terra trahitur verſus cometam in $Z$ vi $= \frac{C}{ww}$, hinc oritur vis ſecundum

$SX = \frac{C(x-X)}{w^3} = \frac{C(v\,\text{coſ.}\,\omega - u\,\text{coſ.}\,\Phi)}{w^3}$, et vis ſecundum

$XT = \frac{C(y-Y)}{w^3} = \frac{C(v\,\text{ſin.}\,\omega - u\,\text{ſin.}\,\Phi)}{w^3}$. Vicis-

Viciſſim autem cometa ad terram vrgetur vi $= \frac{B}{ww}$, vnde naſcitur vis ſecundum

$$xS = \frac{B(x - X)}{w^3} = \frac{B(v\, cof.\, \omega - u\, cof.\, \Phi)}{w^3}$$ et ſecundum

$$Zx = \frac{B(y - Y)}{w^3} = \frac{B(v\, ſin.\, \omega - u\, ſin.\, \Phi)}{w^3}.$$

His igitur viribus coniunctis terra ſollicitabitur his viribus acceleratricibus:

vi ſecundum $XS = \frac{A\, cof.\, \Phi}{uu} - \frac{C(v\, cof.\, \omega - u\, cof.\, \Phi)}{w^3}$

vi ſecundum $TX = \frac{A\, ſin.\, \Phi}{uu} - \frac{C(v\, ſin.\, \omega - u\, ſin.\, \Phi)}{w^3}$

cometa autem ſollicitabitur

vi ſecundum $xS = \frac{A\, cof.\, \omega}{vv} + \frac{B(v\, cof.\, \omega - u\, cof.\, \Phi)}{w^3}$ et

vi ſecundum $Zx = \frac{A\, ſin.\, \omega}{vv} + \frac{B(v\, ſin.\, \omega - u\, ſin.\, \Phi)}{w^3}$.

§. 3. Quia vero etiam ſol ad terram trahitur vi ſecundum $ST = \frac{B}{uu}$, quae reſoluta dat ſecundum directionem $SX$ vim $\frac{B\, cof.\, \Phi}{uu}$ et ſecundum directionem $XT$ vim $\frac{B\, ſin.\, \Phi}{uu}$, pari modo etiam ſol ad cometam vrgetur vi $\frac{C}{vv}$, quae reſoluta dat pro directione $Sx$ vim $\frac{C\, cof.\, \omega}{vv}$ et pro directione $xZ$ vim $\frac{C\, ſin.\, \omega}{vv}$. Quare cum ſolem in quiete ſtatuamus, has vires mutatis ſignis inſuper ad vires quibus terra et cometa ſollicitantur adiici oportet, vnde pro terra habebuntur vires ſequentes:

ſecundum $XS$ vim $\frac{(A + B)\, cof.\, \Phi}{uu} - \frac{C(v\, cof.\, \omega - u\, cof.\, \Phi)}{w^3} + \frac{C\, cof.\, \omega}{vv}$

ſecundum $TX$ vim $\frac{(A + B)\, ſin.\, \Phi}{uu} - \frac{C(v\, ſin.\, \omega - u\, ſin.\, \Phi)}{w^3} + \frac{C\, ſin.\, \omega}{vv}$.

At vero cometa vrgebitur ſequentibus viribus:

ſecundum $xS$ vi $\frac{(A + C)\, cof.\, \omega}{vv} + \frac{B(v\, cof.\, \omega - u\, cof.\, \Phi)}{w^3} + \frac{B\, cof.\, \Phi}{uu}$

ſecundum $Zx$ vi $\frac{(A+C)\,ſin.\,\omega}{vv} + \frac{B(v\,ſin.\,\omega - u\,ſin.\,\Phi)}{w^3} + \frac{B\,ſin.\,\Phi}{uu}$ quae vires iam ſunt acceleratrices, ita vt non opus ſit eas per maſſas in quas agunt diuidere.

§. 4. His igitur viribus inuentis pro motu terrae ſequentes binas adipiſcimur aequationes:

$$\frac{ddX}{2g\,dt^2} = -\frac{(A+B)\,coſ.\,\Phi}{uu} + \frac{C(v\,coſ.\,\omega - u\,coſ.\,\Phi)}{w^3} - \frac{C\,coſ.\,\omega}{vv}$$

$$\frac{ddY}{2g\,dt^2} = -\frac{(A+B)\,ſin.\,\Phi}{uu} + \frac{C(v\,ſin.\,\omega - u\,ſin.\,\Phi)}{w^3} - \frac{C\,ſin.\,\omega}{vv}$$

ſimili autem modo pro motu cometae habebimus ſequentes duas aequationes:

$$\frac{ddx}{2g\,dt^2} = -\frac{(A+C)\,coſ.\,\omega}{vv} - \frac{B(v\,coſ.\,\omega - u\,coſ.\,\Phi)}{w^3} - \frac{B\,coſ.\,\Phi}{uu}$$

$$\frac{ddy}{2g\,dt^2} = -\frac{(A+C)\,ſin.\,\omega}{vv} - \frac{B(v\,ſin.\,\omega - u\,ſin.\,\Phi)}{w^3} - \frac{B\,ſin.\,\Phi}{uu}.$$

In his aequationibus differentio-differentialibus elementum temporis $dt$ aſſumtum eſt conſtans, et ſecundum regulas in Mechanica traditas $g$ denotat altitudinem lapſus grauium vno minuto ſecundo, ſi quidem tempora in minutis ſecundis exprimere velimus; qui computus cum hic foret nimis prolixus, mox aliam temporum menſuram introducemus, ex motu ſcilicet terrae medio petitam.

§. 5. Quoniam autem hic coordinatas orthogonales X, Y et $x$, $y$ ideo in calculum induximus, vt principia motus in Mechanica tradita, quae ad certas directiones fixas reſpiciunt, applicare licuerit, nunc in gratiam calculi aſtronomici eas iterum elidi conueniet; quem in finem pro terra ſequentibus combinationibus vtamur:

I.

$$\text{I. } \frac{ddX \cos.\Phi + ddY \sin.\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{(A+B)}{uu} + \frac{C(v\cos.(\omega-\Phi)-u)}{w^3} - \frac{C\cos.(\omega-\Phi)}{vv}$$

$$\text{II. } \frac{ddY \cos.\Phi - ddX \sin.\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{C\,v\sin.(\omega-\Phi)}{w^3} - \frac{C\sin.(\omega-\Phi)}{vv}.$$

Simili modo pro cometa adhibeamus ſequentes combinationes:

$$\text{I. } \frac{ddx \cos.\omega + ddy \sin.\omega}{2g\,dt^2} = -\frac{(A+C)}{vv} - \frac{B(v-u\cos.(\omega-\Phi))}{w^3} - \frac{B\cos.(\omega-\Phi)}{uu}$$

$$\text{II. } \frac{ddy \cos.\omega - ddx \sin.\omega}{2g\,dt^2} = -\frac{B\,u\sin.(\omega-\Phi)}{w^3} - \frac{B\sin.(\omega-\Phi)}{uu}.$$

§. 6. Verum ad literas X, Y, $x$ et $y$ penitus extrudendas notemus eſſe

$$X\cos.\Phi + Y\sin.\Phi = u \text{ et } Y\cos.\Phi - X\sin.\Phi = 0,$$

hinc differentiando erit

$$dX\cos.\Phi + dY\sin.\Phi - Xd\Phi\sin.\Phi + Yd\Phi\cos.\Phi = du$$

hincque

$$dX\cos.\Phi + dY\sin.\Phi = du. \text{ Deinde}$$

$$dY\cos.\Phi - dX\sin.\Phi - Yd\Phi\sin.\Phi - Xd\Phi\cos.\Phi = 0, \text{ ergo}$$

$$dY\cos.\Phi - dX\sin.\Phi = +ud\Phi,$$

Ac denuo differentiando fiet

$$ddX\cos.\Phi + ddY\sin.\Phi - dXd\Phi\sin.\Phi + dYd\Phi\cos.\Phi = ddu,$$

ergo

$$ddX\cos.\Phi + ddY\sin.\Phi = ddu - ud\Phi^2. \text{ Porro}$$

$$ddY\cos.\Phi - ddX\sin.\Phi = ud\Phi + dYa\Phi\sin.\Phi + dxd\Phi\cos.\Phi$$

ſiue

$$ddY\cos.\Phi - ddX\sin.\Phi = udd\Phi + 2\,dud\Phi.$$

His igitur valoribus ſubſtitutis pro motu terrae has duas obtinebimus aequationes:

$$\text{I. } \frac{ddu - ud\Phi^2}{2g\,dt^2} = -\frac{(A+B)}{uu} + \frac{C(v\cos.(\omega-\Phi)-u)}{w^3} - \frac{C\cos.(\omega-\Phi)}{vv}$$

$$\text{II. } \frac{udd\Phi + 2dud\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{C\,v\sin.(\omega-\Phi)}{w^3} - \frac{C\sin.(\omega-\Phi)}{vv}.$$

§. 7.

§. 7. Simili modo pro cometa cum ſit

$x \operatorname{coſ.} \omega + y \operatorname{ſin.} \omega = v$ et $y \operatorname{coſ.} \omega - x \operatorname{ſin.} \omega = 0$

erit differentiando

$dx \operatorname{coſ.} \omega + dy \operatorname{ſin.} \omega = dv$ et $dy \operatorname{coſ.} \omega - dx \operatorname{ſin.} \omega = v d\omega$

ac denuo differentiando

$ddx \operatorname{coſ.} \omega + ddy \operatorname{ſin.} \omega = ddv - v d\omega^2$ et

$ddy \operatorname{coſ.} \omega - ddx \operatorname{ſin.} \omega = v dd\omega + 2 dv d\omega$

vnde motus cometae his ſequentibus aequationibus exprimetur:

$$\frac{ddv - v d\omega^2}{2 g dt^2} = -\frac{(A + C)}{vv} - \frac{B(v - u \operatorname{coſ.}(\omega - \Phi))}{w^3} - \frac{B \operatorname{coſ.}(\omega - \Phi)}{uu}$$

$$\frac{v dd\omega + 2 dv d\omega}{2 g dt^2} = -\frac{B u \operatorname{ſin.}(\omega - \Phi)}{w^3} - \frac{B \operatorname{ſin.}(\omega - \Phi)}{uu}.$$

Sicque omnia reducuntur ad binas diſtantias $u$ et $v$ et binos angulos $\Phi$ et $\omega$, quae ad quoduis tempus determinari oportet.

§. 8. Quod ſi vero omnia potius per ipſas coordinatas X, Y et $x$, $y$ exprimere malimus, ita vt ſit

$u = \sqrt{X^2 + Y^2}$; $v = \sqrt{xx + yy}$ et $\omega = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2}$;

tum vero pro angulis

$\operatorname{coſ.} \Phi = \frac{X}{u}$, $\operatorname{ſin.} \Phi = \frac{Y}{u}$, $\operatorname{coſ.} \omega = \frac{x}{v}$, $\operatorname{ſin.} \omega = \frac{y}{v}$

aequationes immediate ex principiis mechanicis deductae dabunt primo pro terra

$$\frac{ddX}{2 g dt^2} = -\frac{(A + B) X}{u^3} + \frac{C(x - X)}{w^3} - \frac{Cx}{v^3}$$

$$\frac{ddY}{2 g dt^2} = -\frac{(A + B) Y}{u^3} + \frac{C(y - Y)}{w^3} - \frac{Cy}{v^3}$$

ſimilique modo pro motu cometae

$$\frac{ddx}{2 g dt^2} = -\frac{(A + C) x}{v^3} - \frac{B(x - X)}{w^3} - \frac{BX}{u^3}$$

$$\frac{ddy}{2 g dt^2} = -\frac{(A + C) y}{v^3} - \frac{B(y - Y)}{w^3} - \frac{BY}{u^3}.$$

§. 9.

§. 9. Praemiſſis igitur his formulis generalibus, quibus tam motus terrae quam cometae ob actionem mutuam perturbatur, vtrumque motum ſeorſim neglecta actione mutua euoluamus, et curſum cometae in plano eclipticae ita inſtituamus, vt, vbi per orbitam terrae eſt tranſiturus, ibi ſimul ipſam terram offendat, et quaſi contingat. Ante vero quam hoc eueniat, cum cometa iam terrae ita apropinquauerit, vt actio mutua iam ſatis notabilis euadat ac fortaſſe actionem Solis ſuperet, tum nobis erit inueſtigandum, quantam mutationem vterque motus ſit ſubiturus, vt inde Phaenomena definire liceat, quae tam ante quam poſt hanc coniunctionem apparere debeant.

§. 10. Primo igitur cum inaequalitates motus terrae ex excentricitate oriundae nihil ad hanc inueſtigationem conferant, ipſam terram in circulo circa ſolem motu vniformi circumferri aſſumamus, cuius circuli radius ſit diſtantia media terrae a ſole $= a$; tum vero tempore $t$ circa ſolem conficiat angulum $= \vartheta$, quem pro tempore vnius diei nouimus eſſe $= 59'. 8''$ ſiue in partibus radii ſpatium $= 0,017204$: poſito ſcilicet ſinu toto $= 1$. Quamobrem reiectis terminis ab actione cometae ortis habebimus primo eius diſtantiam a ſole $u = a$, tum vero pro tempore $t$ angulum $\Phi = \vartheta$; quibus valoribus ſubſtitutis formulae (§. 6.) datae ob $dd\Phi = dd\vartheta = 0$, quia motus eſt vniformis, erunt

prima $-\frac{a\,d\vartheta^2}{2g\,dt^2} = -\frac{A+B}{aa}$ altera vero $0 = 0$.

 Hinc

Hinc igitur loco temporis $t$ angulum ſeu arcum $\vartheta$ in calculum introducere poterimus, dum ex iſta aequalitate obtinemus $2\,g\,d\,t^2 = \frac{a^3\,d\,\vartheta^2}{A+B}$; quare ſi hunc valorem introducamus, et aequationes generales per $2\,g\,d\,t^2$ multiplicemus, eae ſequentes formas induent:

$$\text{I. } ddu - ud\Phi^2 = -\frac{a^3\,d\vartheta^2}{u\,u} + \frac{a^3 C\,d\vartheta^2 (v\,\mathrm{coſ.}(\omega-\Phi) - u)}{w^3\,(A+B)} - \frac{a^3 C\,d\vartheta^2\,\mathrm{coſ.}(\omega-\Phi)}{v\,v\,(A+B)}$$

$$\text{II. } udd\Phi + 2\,dud\Phi = \frac{a^3 C\,v\,d\vartheta^2\,\mathrm{ſin.}(\omega-\Phi)}{w^3\,(A+B)} - \frac{C\,a^3\,d\vartheta^2\,\mathrm{ſin.}(\omega-\Phi)}{v\,v\,(A+B)}.$$

Quia autem maſſa C prae maſſa ſolis A eſt quam minima, ponamus breuitatis gratia fractionem $\frac{C}{A+B} = m$, vt habeamus has aequationes:

$$\text{I. } ddu - ud\Phi^2 = -\frac{a^3\,d\vartheta^2}{u\,u} + \frac{m\,a^3\,d\vartheta^2 (v\,\mathrm{coſ.}(\omega-\Phi) - u)}{w^3} - \frac{m\,a^3\,d\vartheta^2\,\mathrm{coſ.}(\omega-\Phi)}{v\,v}$$

$$\text{II. } udd\Phi + 2\,dud\Phi = \frac{m\,a^3\,d\vartheta^2\,\mathrm{ſin.}(\omega-\Phi)}{w^3} - \frac{m\,a^3\,d\vartheta^2\,\mathrm{ſin.}(\omega-\Phi)}{v\,v}.$$

§. 11. At ſi ipſas coordinatas X et Y in calculo retinere velimus, aequationes ſupra §. 8. exhibitae, ſi etiam per $2\,g\,d\,t^2$ multiplicentur induent has formas:

$$d\,d\,X = -\frac{a^3\,X\,d\,\vartheta^2}{u^3} + \frac{m\,a^3\,d\,\vartheta^2\,(x-X)}{w^3} - \frac{m\,a^3\,x\,d\,\vartheta^2}{v^3}$$

$$d\,d\,Y = -\frac{a^3\,Y\,d\,\vartheta^2}{u^3} + \frac{m\,a^3\,d\,\vartheta^2\,(y-Y)}{w^3} - \frac{m\,a^3\,y\,d\,\vartheta^2}{v^3}$$

hae ſcilicet aequationes erunt euoluendae, poſtquam actio mutua terram inter et cometam ſenſibilis fieri coeperit; ante vero hunc terminum, quamdiu motus terrae adhuc fuerit vniformis, ob $u = a$ et $\Phi = \vartheta$, erit $X = a\,\mathrm{coſ.}\,\vartheta$ et $Y = a\,\mathrm{ſin.}\,\vartheta$, hincque porro $\frac{d\,X}{d\,\vartheta} = -a\,\mathrm{ſin.}\,\vartheta$ et $\frac{d\,Y}{d\,\vartheta} = a\,\mathrm{coſ.}\,\vartheta$; vbi iſtae formulae $\frac{d\,X}{d\,\vartheta}$ et $\frac{d\,Y}{d\,\vartheta}$ denotant celeritates terrae ſecundum directionem coordinatarum; vnde ipſo momento, quo terra per di-

rectionem fixam S $\Upsilon$ tranſit, quandoquidem in hoc loco actionem cometae incipere ſtatuemus, erit

$$X = a,\ Y = 0 \text{ et } \frac{dX}{d\vartheta} = 0 \text{ et } \frac{dY}{d\vartheta} = a.$$

§. 12. Nunc vero pro motu cometae in plano eclipticae, quo calculus ſimplicior reddatur, ponamus cometam recta verſus ſolem curſum ſuum tendere, quoniam obliquitas curſus ad noſtrum inſtitutum nihil confert. Hoc modo remota actione terrae angulus $\Upsilon$ S Z $= \omega$ erit conſtans puta $= \alpha$, vnde aequationes pro cometa (§. 7.) erunt

$$\frac{ddv}{2g\,dt^2} = -\frac{A+C}{vv} \text{ et } 0 = 0,$$

vnde ſi loco $2g\,dt^2$ valorem ſupra ſtabilitum ſubſtituamus habebimus

$$ddv = -\frac{a^3\,d\vartheta^2\,(A+C)}{vv\,(A+B)};$$

quia vero maſſa A prae B et C eſt quaſi infinita, erit $\frac{A+C}{A+B} = 1$, ideoque $ddv = -\frac{a^3\,d\vartheta^2}{vv}$, qua aequatione motus cometae per lineam rectam Z S exprimitur. Eam igitur per $2\,dv$ multiplicemus et integremus, atque ob $d\vartheta$ conſtans obtinebimus

$$dv^2 = \frac{2a^3\,d\vartheta^2}{v}, \text{ ſiue } \frac{dv^2}{d\vartheta^2} = \frac{2a^3}{v} + C,$$

vbi $\frac{dv}{d\vartheta}$ denotat celeritatem, qua cometa a ſole recederet. Verum ex theoria cometarum conſtat, eos ita moueri ac ſi ex diſtantia infinita motum incepiſſent; vnde patet, conſtantem hanc eſſe $= 0$; quare cum cometam ad ſolem accedere aſſumamus eius celeritas erit $\frac{dv}{d\vartheta} = -\sqrt{\frac{2a^3}{v}}$.



§. 13.

T. XXIV. Fig. 2. §. 13. Pro motu autem penitus determinando ex hac aequatione deducimus $d\vartheta = -\frac{dv\sqrt{v}}{\sqrt{2a^3}}$, cuius integrale eſt $\vartheta = C - \frac{2v\sqrt{v}}{3\sqrt{2a^3}}$. Ad conſtantem autem determinandam ponamus initio, quo terra tranſiit per directionem fixam S ♈ in puncto B (quoniam hoc tempore actionem mutuam incipere deinceps ſtatuemus) cometam fuiſſe in C, exiſtente diſtantia $SC = c$, ac tempus quo ex C in Z vsque perueniet erit $\vartheta = \frac{2c\sqrt{c} - 2v\sqrt{v}}{3\sqrt{2a^3}}$. Quare ſi iam ponatur $v = SO = a$, habebimus tempus, quo cometa ex C vsque ad eclipticam in O pertingit $= \frac{2c\sqrt{c} - 2a\sqrt{a}}{3\sqrt{2a^3}}$.

§. 14. Cum igitur angulus BOC poſitus ſit $= \alpha$, tempus quo terra ex B ad eundem locum O perueniet erit $\vartheta = \alpha$; neceſſe igitur eſt vt fiat

$$\alpha = \frac{2c\sqrt{c} - 2a\sqrt{a}}{3\sqrt{2a^3}},$$

vnde colligimus

$$2c\sqrt{c} = 3\alpha\sqrt{2a^3} + 2a\sqrt{a} = (3\alpha\sqrt{2} + 2)a\sqrt{a}$$

hincque nanciſcimur ipſam diſtantiam

$$SC = c = a\left(\frac{3\alpha}{\sqrt{2}} + 1\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Quocirca ſi initio ſtatuamus terram fuiſſe in B, exiſtente diſtantia $SB = a$: ſimul vero cometam fuiſſe in C, exiſtente angulo $BSC = \alpha$, et diſtantia

$$SC = c = a\left(\frac{3\alpha + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

tum tam terra quam cometa ob motum proprium, neglecta ſcilicet mutua perturbatione, elapſo tempore $= \alpha$ ſimul peruenient in idem punctum O, ibique

que idcirco conflictum exercerent, quem autem fortaſſe ob actionem mutuam euitabunt, propterea quod vtriusque motus ob mutuam actionem non mediocriter immutabitur.

§. 15. Quod ſi igitur aſſumamus, actionem mutuam terrae et cometae tum demum fieri ſenſibilem, cum terra verſata fuerit in puncto B, cometa autem in puncto C, quod temporis momentum tanquam epocham accipiamus, vnde vtrumque motum deinceps proſequamur; hinc elapſo tempore $= \vartheta$ cometa peruenerit in Z, ita vt ſit diſtantia S Z $= v$, et angulus ♈ S Z $= \omega$. Vt ſupra ergo demiſſo perpendiculo $Zx$, poſitisque coordinatis $Sx = x$ et $Zx = y$, aequationes pro motu cometae inter coordinatas $x$ et $y$ erunt ſequentes, ſiquidem fractionem minimam ponamus $\frac{B}{A+B} = n$

$$ddx = -\frac{a^3 x\, d\vartheta^2}{v^3} - \frac{n\, a^3\, d\vartheta^2 (x - X)}{w^3} - \frac{n\, a^3\, d\vartheta^2\, X}{u^3} \text{ et}$$

$$ddy = -\frac{a^3 y\, d\vartheta^2}{v^3} - \frac{n\, a^3\, d\vartheta^2 (y - Y)}{w^3} - \frac{n\, a^3\, d\vartheta^2\, Y}{u^3}$$

pro quarum aequationum reſolutione notandum eſt, initio, quo cometa adhuc haeſit in C, exiſtente diſtantia S C $= c$ et angulo ♈ S C $= \alpha$, fore coordinatas $x = c \operatorname{coſ.} \alpha$ et $y = c \operatorname{ſin.} \alpha$. Deinde cum ſupra inuenerimus $\frac{dv}{d\vartheta} = -\frac{a\sqrt{2a}}{\sqrt{v}}$, erunt celeritates laterales pro initio

$$\frac{dx}{d\vartheta} = \frac{dv}{d\vartheta} \operatorname{coſ.} \alpha = -a \operatorname{coſ.} \alpha \sqrt{\frac{2a}{c}} \text{ et } \frac{dy}{d\vartheta} \operatorname{ſin.} \alpha = -a \operatorname{ſin.} \alpha \sqrt{\frac{2a}{c}}$$

ſupra vero pro eadem epocha iam pro terra dedimus

$$X = a;\ Y = 0;\ \frac{dX}{d\vartheta} = 0;\ \frac{dY}{d\vartheta} = a.$$

 §. 16.

§. 16. Nunc angulum $\alpha$ tantum accipiamus, vt tum demum actio mutua terrae et cometae euadat ſenſibilis, id quod ob ſummam paruitatem terrae et cometae reſpectu ſolis non ante contingere ſtatuamus, quam duobus circiter diebus ante coniunctionem in O, quamobrem ſtatuamus angulum

$$BSC = \alpha = 2\,(59'.\,8'') = 1^\circ.\,58'.\,17'',$$

cuius valor in partibus radii eſt 0, 034408; hinc igitur colligetur diſtantia

$$SC = c = \left(\frac{\alpha\alpha}{\sqrt{2}} + 1\right)^{\frac{1}{2}} a = 1,048086.\,a$$

vnde fit $OC = 0,048086.\,a$, exiſtente angulo

$$BSC = 1^\circ.\,58'.\,17''.$$

Hinc igitur pro initio huius epochae habebimus

$$x = 1,047472.\,a \text{ et } y = 0,036054.\,a$$

porro $\frac{dx}{d\vartheta} = -1,380581\,a$; $\frac{dy}{d\vartheta} = -0,047520\,a$.

§. 17. Conſtituta igitur hac epocha, vbi terra et cometa primum in ſe inuicem agere concipiuntur, ſi ponamus hinc elapſum eſſe tempus $= \vartheta$, primo pro motu terrae ſequentes binas nacti ſumus aequationes:

$$ddX = -\frac{a^3 X d\vartheta^2}{u^3} + \frac{m a^3 d\vartheta^2 (x - X)}{w^3} - \frac{m a^3 x d\vartheta^2}{v^3}$$

$$ddY = -\frac{a^3 Y d\vartheta^2}{u^3} + \frac{m a^3 d\vartheta^2 (y - Y)}{w^3} - \frac{m a^3 y d\vartheta^2}{v^3}.$$

Pro motu cometae autem iſtas binas:

$$ddx = -\frac{a^3 x d\vartheta^2}{v^3} - \frac{n a^3 d\vartheta^2 (x - X)}{w^3} - \frac{n a^3 X d\vartheta^2}{u^3}$$

$$ddy = -\frac{a^3 y d\vartheta^2}{v^3} - \frac{n a^3 d\vartheta^2 (y - Y)}{w^3} - \frac{n a^3 Y d\vartheta^2}{u^3}.$$

Has

Has autem aequationes non ſolum nullo modo integrare licet, ſed etiam ſolita methodus appropinquandi inde petita, quod perturbationes tanquam minimae ſpectari queant, hic locum habere nequit; quandoquidem hic euenire poteſt, vt actio mutua terrae et cometae adeo ſuperet actionem ſolis, cum ſcilicet ſatis prope ad ſe inuicem acceſſerint. Quamobrem alia via non ſupereſt, niſi vt per gradus ſatis exiguos vtrumque motum ex ipſis formulis differentio-differentialibus proſequamur, dum elemento temporis $d\vartheta$ ſucceſſiue valores ſatis exiguos tribuemus vt hinc nullus error ſit metuendus.

## Praeparatio harum aequationum ad calculum ſequentem.

§. 18. Primum hic neceſſe eſt omnia elementa quae in has formulas ingrediuntur ad menſuras determinatas magisque cognitas reduci. Primo igitur diſtantiam terrae mediam $= a$ per ſemidiametros terreſtres exprimamus, quoniam haec menſura maxime idonea videtur ad diſtantiam cometae a terra definiendam. Hinc ex parallaxi ſolis nuper inuenta ſtatuamus $a = 24000$ ſemidiametris terrae. Deinde cum fractio $n = \frac{B}{A+B}$ ſit ſatis exacte $\frac{1}{360000}$, tribuamus cometae etiam maſſam terrae aequalem, vt ſit quoque $m = \frac{1}{360000}$, atque hinc per logarithmos habebimus

$$la^3 = 13,1406336, \; lma^2 = lna^3 = 7,5843311.$$

Porro autem menſura temporis, quam hic introduximus

mus per angulum $\vartheta$, qui reſpondet motui medio terrae, nimis eſt incommoda et non ſatis clara; eius ergo loco potius conueniet tempus ab epocha noſtra elapſum per dies naturales exprimere, quorum numerum ponamus $= \tau$. Tum igitur ob motum diurnum $= 59'. 8'' = 0,017204$ erit $\vartheta = 0,017204 \tau$ ideoque

$$d\vartheta = 0,017204\, d\tau.$$

Quod ſi nunc breuitatis gratia ponamus

$$a^3 d\vartheta^2 = \Delta d\tau^2 \text{ et } m a^3 d\vartheta^2 = n a^3 d\vartheta^2 = \delta d\tau^2$$

habebimus

$$l\Delta = 9,6118924 \text{ et } l\delta = 4,0555899:$$

quibus valoribus ſubſtitutis quatuor noſtrae aequationes erunt:

$$ddX = -\frac{\Delta X d\tau^2}{u^3} + \frac{\delta(x - X) d\tau^2}{w^3} - \frac{\delta x d\tau^2}{v^3}$$

$$ddY = -\frac{\Delta Y d\tau^2}{u^3} + \frac{\delta(y - Y) d\tau^2}{w^3} - \frac{\delta x d\tau^2}{v^3}$$

$$ddx = -\frac{\Delta x d\tau^2}{v^3} - \frac{\delta(x - X) d r^2}{w^3} - \frac{\delta X d\tau^2}{u^3}$$

$$ddy = -\frac{\Delta Y d\tau^2}{v^3} - \frac{\delta(y - Y) d\tau^2}{w^3} - \frac{\delta Y d\tau^2}{u^3}$$

vbi membra poſtrema ob nimiam paruitatem tuto omitti poſſunt: media enim membra eatenus tantum in ſenſum veniunt, quatenus diſtantia continuo diminuitur.

§. 19. Haec etiam menſura temporis nobis multo clariorem ideam et menſuram celeritatum ſuppeditat quam ante, vbi verbi gratia $\frac{dX}{d\vartheta}$ exprimebat ſpatium quod hac celeritate percurri poſſet tempo-

tempore $\vartheta = 1$, ſiue per angulum $\vartheta = 57^\circ. 17'$. cui reſpondet tempus circiter 60 dierum. Nunc igitur easdem celeritates exprimemus per formulas

$$\frac{dX}{d\tau}, \frac{dY}{d\tau}; \frac{dx}{d\tau} \text{ et } \frac{dy}{d\tau},$$

quae formulae exprimunt ſpatia, quae his celeritatibus tempore vnius diei percurrentur, haecque ſpatia in ſemidiametris terrae dabuntur. His igitur nouis menſuris introductis, pro initio noſtrae epochae nanciſcemur ſequentes menſuras penitus determinatas in ſemidiametris terrae expreſſas

$$X = 24000; \; Y = 0; \; \frac{dX}{d\tau} = 0, \; \frac{dY}{d\tau} = 412, 896$$

$$x = 25130, 328; \; y = 865, 296$$

$$\frac{dx}{d\tau} = -570, 036 \text{ et } \frac{dy}{d\tau} = -19, 621$$

his igitur praemiſſis ſequens problema principale perpendamus.

## Problema.

§. 20. *Si ad tempus* $\tau$ *dierum ab epocha elapſum dentur diſtantiae* X *et* Y *pro terra, et* x, y *pro cometa; tum vero etiam celeritates* $\frac{dX}{d\tau}$ *et* $\frac{dY}{d\tau}$ *pro terra, atque* $\frac{dx}{d\tau}$ *et* $\frac{dy}{d\tau}$ *pro cometa, inuenire pro tempore* $\tau + d\tau$ *dierum ab epocha elapſo valores earundem litterarum qui ſint* X′ Y′ x′ y′, *vna cum celeritatibus* T XXIV. Fig. 3.

$$\frac{dX'}{d\tau}, \frac{dY'}{d\tau}, \frac{dx'}{d\tau}, \frac{dy'}{d\tau}.$$

## Solutio.

Cum $d\tau$ ſit elementum quod pro minimo haberi queat, erit ex natura differentialium

$$X' = X + dX + \tfrac{1}{2}ddX;\quad Y' = Y + dY + \tfrac{1}{2}ddY$$
$$x' = x + dx + \tfrac{1}{2}ddx;\quad y' = y + dy + \tfrac{1}{2}ddy$$

deinde vero pro celeritatibus

$$\frac{dX'}{d\tau} = \frac{dX}{d\tau} + \frac{ddX}{d\tau};\quad \frac{dY'}{d\tau} = \frac{dY}{d\tau} + \frac{ddY}{d\tau}$$
$$\frac{dx'}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau} + \frac{ddx}{d\tau};\quad \frac{dy'}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau} + \frac{ddy}{d\tau}$$

vbi valores differentiales ſecundi gradus ex noſtris aequationibus ſupra datis elici debent. Primo igitur ex elementis datis quaeri debent diſtantiae $ST = u$ et $SZ = v$, quod commodiſſime fiet per angulos $BST = \Phi$ et $BSZ = \omega$, quos quidem per ſe noſſe iuuabit: hic autem reperientur ex his formulis

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{Y}{X} \text{ et tang.}\,\omega = \frac{y}{x},$$ quibus inuentis erit

$$u = \frac{X}{\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{Y}{\text{ſin.}\,\Phi} \text{ et } v = \frac{x}{\text{coſ.}\,\omega} = \frac{y}{\text{ſin.}\,\omega}.$$

Deinde pro diſtantia $TZ = w$ inuenienda ducatur axi parallela $TV$, quae erit $x - X$, et $VZ = y - Y$; tum vero ponatur angulus $VTZ = \psi$, qui deſignabit longitudinem cometae ex terra viſi eritque $\text{tang.}\,\psi = \frac{y - Y}{x - X}$; atque hinc obtinebitur ipſa diſtantia

$$TZ = w = \frac{x - X}{\text{coſ.}\,\psi} = \frac{y - Y}{\text{ſin.}\,\psi};$$

His autem valoribus definitis ex ſuperioribus aequationibus habebimus

$$ddX = -\frac{\Delta X d\tau^2}{u^3} + \frac{\delta(x - X)d\tau^2}{w^3}$$
$$ddY = -\frac{\Delta Y d\tau^2}{u^3} + \frac{\delta(y - Y)d\tau^2}{w^3}$$
$$ddx = -\frac{\Delta x d\tau^2}{v^3} - \frac{\delta(x - X)d\tau^2}{w^3}$$
$$ddy = -\frac{\Delta y d\tau^2}{v^3} - \frac{\delta(y - Y)d\tau^2}{w^3}.$$

§. 21.

§. 21. Hic autem non amplius elementum $d\tau$ pro infinite paruo habemus, ſed potius ei valorem ſatis exiguum dabimus, quem tam paruum ſufficit aſſumi, vt interea membra noſtrarum aequationum nullam mutationem ſenſibilem ſubeant. Atque hic facile intelligitur, ſtatim ab initio pro $d\tau$ integri vnius diei interuallum tuto aſſumi poſſe, ita vt ſit $d\tau = 1$; deinceps vero, cum cometa multo propius ad terram acceſſerit, interualla $d\tau$ paullatim diminui conueniet, prouti ex circumſtantiis facile erit diiudicare.

§. 22. Hoc igitur modo ab ipſa noſtra epocha ſucceſſiue per gradus progrediamur, atque pro primo quidem ſpatium vnius diei aſſumere licebit. Atque hac ratione ad quoduis tempus ab epocha noſtra elapſum poterimus tam ſitum terrae et cometae quam vtriusque motum aſſignare; quam ob rem calculum pro iſtis temporis interuallis hic apponamus.

## Calculus pro ipſa epocha, vbi $\tau = 0$.

§. 23. Elementa igitur pro hoc calculo erunt:

$$X = 24000,000 \qquad Y = 0,000$$
$$x = 25139,328 \qquad y = 865,296$$
$$x - X = 1139,328 \qquad y - Y = 865,296$$
$$dX = 0\,d\tau \qquad dY = 412,896.\,d\tau$$
$$dx = -570,036.\,d\tau; \quad dy = -19,621.\,d\tau$$

 vnde

vnde ſtatim habemus $\Phi = 0$ et $u = a = 24000$; tum vero $\omega = 1°. 58'. 17'$ et $v = c = 25154,08$. Primo igitur tantum quaeratur angulus $\psi$ cum diſtantia $w$ hoc modo:

| | |
|---|---|
| $a\,l(y-Y) = 2,9371647$ | ad $l(x-X) = 3,0566489$ |
| ſubtr. $l(x-X) = 3,0566489$ | add. $l\,$ſec. $\psi = 10,0988986$ |
| $l\,$tang. $\psi = 9,8805158$ | $l\,w = 3,1555475$ |
| ideoque $\psi = 37°. 13\frac{1}{4}'$ | ideoque $w = 1430,697$ |

Nuncm embra noſtrarum aequationum ita computentur

| | | |
|---|---|---|
| $l\,\Delta = 9,6118924$ | $l\,\Delta = 9,6118924$ | $l\,\delta = 4,0555899$ |
| $l\,X = 4,3802112$ | $l\,x = 4,4003537$ | $l(x-X) = 3,0566489$ |
| $= 3,9921036$ | $4,0122461$ | $7,1122388$ |
| $l\,u^3 = 3\,1406336$ | $l\,v^3 = 3,2018252$ | $l\,w^3 = 9,4666425$ |
| $l\,\frac{\Delta X}{u^3} = 0,8514700$ | $l\,\frac{\Delta x}{v^3} = 0,8104209$ | $l\,\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 7,6455963$ |
| | $l\,$tang. $\omega = 8,5368175$ | $l\,$tang. $\psi = 9,8805158$ |
| hinc $\frac{\Delta X}{u^3} = 7,103$ | $l\,\frac{\Delta y}{v^3} = 9,3472384$ | $l\,\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 7,5261121$ |
| et $\frac{\Delta Y}{u^3} = 0$ | ergo $\frac{\Delta x}{v^3} = 6,463$ | ergo $\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 0,004$ |
| | et $\frac{\Delta y}{v^3} = 0,222$ | et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 0,003$ |

hinc igitur colligitur

| | |
|---|---|
| $ddX = -7,099\,d\tau^2$ | $ddx = -6,467.\,d\tau^2$ |
| $ddY = +0,003\,d\tau^2$ | $ddy = -0,225.\,d\tau^2$ |

quocirca habebimus

$$X' = 24000 + 0.\,d\tau - 3,549.\,d\tau^2$$

$$Y' = 0 + 412,896.\,d\tau + 0,001.\,d\tau^2$$

$$x' = 25139,328 - 570,036.\,d\tau - 3,233.\,d\tau^2$$

$$y' = 865,296 - 19,621.\,d\tau - 0,112.\,d\tau^2$$

deinde

deinde

$$dX' = 0,00.\,d\tau - 7,099.\,d\tau^2$$
$$dY' = 412.896.\,d\tau + 0,003.\,d\tau^2$$
$$dx' = -570,036.\,d\tau - 6,467.\,d\tau^2$$
$$dy' = -19,621.\,d\tau - 0,225.\,d\tau^2.$$

## Calculus pro tempore $\tau = 1\,d$ poſt epocham.

§. 24. Sumto igitur $d\tau = 1$ elementa huius calculi erunt

| | |
|---|---|
| $X = 23996,451$ | $Y = 412,897$ |
| $x = 24566,059$ | $y = 845,563$ |
| $x - X = 569,608$ | $y - Y = 432,666$ |
| $dX = -7,099\,d\tau$ | $dY = 412,899\,d\tau$ |
| $dx = -576,503\,d\tau$ | $dy = -19,846\,d\tau$ |

ſuper his igitur elementis calculus ita inſtituatur

| | | |
|---|---|---|
| $a\,l\,Y = 2,6158417$ | $a\,l\,y = 2,9271460$ | $a\,l(y-Y) = 2,6361527$ |
| ſubtr $l\,X = 4,3801469$ | ſ. $l\,x = 4,3903354$ | ſ. $l\,(x-X) = 2,7555761$ |
| $l$ tang. $\Phi = 8,2356948$ | $l$ tang. $\omega = 8.5368106$ | $l$ tang. $\psi = 9,8805766$ |
| ergo $\Phi = 59'.\ 8''$ | ergo $\omega = 1^\circ.\ 58'.\ 17$ | ergo $\psi = 37^\circ.\ 13\frac{1}{5}'$ |
| ad $l\,X = 4,3801469$ | ad $l\,x = 4,3903354$ | ad $l(x-X) = 2,7555761$ |
| $l$ ſec. $\Phi = 10,0000642$ | $l$ ſec. $\omega = 10,0002571$ | $l$ ſec. $\psi = 10,0989130$ |
| $l\,u = 4,3802111$ | $l\,v = 4,3905925$ | $l\,w = 2,8544891$ |
| ergo $u = 24000$ | ergo $v = 24580,600$ | ergo $w = 715,302$ |

| | | |
|---|---|---|
| ad $l\,\Delta = 9,6118924$ | ad $l\,\Delta = 9,6118924$ | ad $l\,\delta = 4,0555899$ |
| $l\,X = 4,3801469$ | $l\,x = 4,3903354$ | $l\,(x-X) = 2,7555761$ |
| $3,9920393$ | $4,0022278$ | $6,8111660$ |
| ſ $l\,u^3 = 3,1406333$ | ſ. $l\,v^3 = 3,1717775$ | $l\,w^3 = 8,5634673$ |
| $l\,\frac{\Delta X}{u^3} = 0,8514060$ | $l\,\frac{\Delta x}{v^3} = 0,8304503$ | $l\,\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 8,2476987$ |
| $l$ tang. $\Phi = 8,2356948$ | $l$ tang. $\omega = 8,5368106$ | $l$ tang. $\psi = 9,8805766$ |
| $l\,\frac{\Delta Y}{u^3} = 9,0871008$ | $l\,\frac{\Delta y}{v^3} = 9,3672609$ | $l\,\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 8,1282753$ |
| ergo $\frac{\Delta X}{u^3} = 7,102$ | ergo $\frac{\Delta x}{v^3} = 6,768$ | ergo $\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 0,018$ |
| et $\frac{\Delta Y}{u^3} = 0,122$ | et $\frac{\Delta y}{v^3} = 0,233$ | et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 0,013.$ |

*Annotatio.* Membra poſtrema litera $\delta$ affecta continent perturbationem ex actione mutua ortam, quatenus ſcilicet naſcitur ex diſtantia cometae a terra tempore $\tau = 1$ diei. Quod ſi ergo hinc progrediamur per tempus $\frac{1}{2}d$, ſtatuendo $d\tau = \frac{1}{2}$, in fine huius temporis diſtantia illa ad ſemiſſem reducetur, vnde quadruplo maior perturbatio naſceretur. Quamobrem cum labente hoc interuallo $d\tau = \frac{1}{2}d$ perturbatio continuo fiat maior, conuenit medium ſumere, quod quadruplo maius erit quam inuentum, ſicque ſtatuamus

$$\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 0,036 \text{ et } \frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 0,026$$

quocirca habebimus

$$ddX = -7,066.\,d\tau^2 \quad ddx = -6,804.\,d\tau^2$$
$$ddY = -0,096.\,d\tau^2 \quad ddy = -0,259.\,d\tau^2$$

hincque oriuntur ſequentes valores:

$$X' = 23996,451 - 7,090.\,d\tau - 3,533.\,d\tau^2$$
$$Y' = 412,897 + 412,899.\,d\tau - 0,048.\,d\tau^2$$
$$x' = 24566,059 - 576,503.\,d\tau - 3,402.\,d\tau^2$$
$$y' = 845,563 - 19,846.\,d\tau - 0,129.\,d\tau^2$$

porro

porro

$$dX' = -7,099 . d\tau - 7,066 . d\tau^2$$
$$dY' = +412,899 . d\tau - 0,096 . d\tau^2$$
$$dx' = -576,503 . d\tau - 6,804 . d\tau^2$$
$$dy' = -19,846 . d\tau - 0,259 . d\tau^2$$

hinc autem ſumi debet $d\tau = \frac{1}{2}$, vnde producitur.

## Calculus pro tempore $\tau = 1\frac{1}{2}\, d$ poſt epocham.

§. 25. Sumto igitur $d\tau = \frac{1}{2}$ et $d\tau^2 = \frac{1}{4}$, ſequentia habebuntur elementa:

| | |
|---|---|
| $X = 23992,019$ | $Y = 619,334$ |
| $x = 24276,957$ | $y = 835,608$ |
| $x - X = 284,938$ | $y - Y = 216,274$ |
| $dX = -10,632 . d\tau$ | $dY = +412,850 . d\tau$ |
| $dx = -579,904 . d\tau$ | $dy = -19,976 . d\tau$ |

et hinc calculus vti ſupra ſequenti modo inſtituitur:

| | | |
|---|---|---|
| a $l\,Y = 2,7919249$ | a $l\,y = 2,9220026$ | a $l(y - Y) = 2,3350043$ |
| $l\,X = 4,3800669$ | ſubtr. $l\,x = 4,3851942$ | ſ. $l(x - X) = 2,4547504$ |
| $l$ tang. $\Phi = 8,4118580$ | $l$ tang. $\omega = 8,5368084$ | $l$ tang. $\psi = 9,8802539$ |
| ergo $\Phi = 1^\circ. 28'. 43''$ | ergo $\omega = 1^\circ. 58'. 17''$ | ergo $\psi = 37^\circ. 12'$ |
| ad $l\,X = 4,3800669$ | ad $l\,x = 4,3851942$ | ad $l(x - X) = 2,4547504$ |
| $l$ ſec. $\Phi = 10,0001429$ | $l$ ſec. $\omega = 10,0002569$ | $l$ ſec. $\psi = 10,0987979$ |
| $l\,u = 4,3802098$ | $l\,v = 4,3854511$ | $l\,\omega = 2,5535483$ |
| ergo $u = 24000$ | ergo $v = 24291,320$ | ideoque $w = 357,724$ |

ad $l\,\Delta$

| | | |
|---|---|---|
| ad $l\Delta = 9,6118924$ | ad $l\Delta = 9,6118924$ | ad $l\delta = 4,0555899$ |
| $l\mathrm{X} = 4,3800969$ | $l\,x = 4,3854511$ | $l(x-\mathrm{X}) = 2,4544700$ |
| $3,9919593$ | $3,9973435$ | $+ = 6,5100599$ |
| ſubtr. $lu^3 = 3,1406294$ | ſ. $l\,v^3 = 3,1563533$ | ſ. $l\,u^3 = 7,6606449$ |
| $l\,\frac{\Delta \mathrm{X}}{u^3} = 0,8513299$ | $l\,\frac{\Delta x}{v^3} = 0,8409902$ | $l\,\frac{\delta(x-\mathrm{X})}{w^3} = 8,8494150$ |
| $l$tang. $\Phi = 8,4118588$ | $l$tang. $\omega = 8,5368084$ | $l$ tang. $\psi = 9,8802539$ |
| $l\,\frac{\Delta \mathrm{Y}}{u^3} = 9,2631887$ | $l\,\frac{\Delta \mathrm{Y}}{v^3} = 9,3777986$ | $l\,\frac{\delta(y-\mathrm{Y})}{w^3} = 8,7296689$ |
| ergo $\frac{\Delta \mathrm{X}}{u^3} = 7,101$ | ergo $\frac{\Delta x}{v^3} = 6,934$ | ergo $\frac{\delta(x-\mathrm{X})}{w} = 0,071$ |
| et $\frac{\Delta \mathrm{Y}}{u^3} = 0,183$ | et $\frac{\Delta y}{v^3} = 0,239$ | et $\frac{\delta(y-\mathrm{Y})}{w^3} = 0,054$ |

iſta ergo perturbatio reſpondet tempori $\tau = 1\frac{1}{2}\,d$: at vero tempori $\tau = 1\frac{1}{4}\,d$ ſumendo $d\tau = \frac{1}{4}$, perturbatio fiet quadruplo maior, vnde medium ſumendo iſtos valores duplicemus ſtatuendo

$$\frac{\delta(x-\mathrm{X})}{w^3} = 0,142 \text{ et } \frac{\delta(y-\mathrm{Y})}{w^3} = 0,108$$

vnde colligimus

$$dd\mathrm{X} = -6,957.\,d\tau^2 \qquad ddx = -7,076.\,d\tau^2$$
$$dd\mathrm{Y} = -0,075.\,d\tau^2 \qquad ddy = -0,347.\,d\tau^2$$

quocirca oriuntur

$$\mathrm{X}' = 23992,019 - 10,632.\,d\tau - 3,478.\,d\tau^2$$
$$\mathrm{Y}' = 619,334 + 412,850.\,d\tau - 0,037.\,d\tau^2$$
$$x' = 24276,957 - 579,904.\,d\tau - 3,538.\,d\tau^2$$
$$y' = 835,608 - 19,976.\,d\tau - 0,173.\,d\tau^2$$

deinde

$$d\mathrm{X}' = -10,632.\,d\tau - 6,957.\,d\tau^2$$
$$d\mathrm{Y}' = +412,850.\,d\tau - 0,075.\,d\tau^2$$
$$dx' = -579,904.\,d\tau - 7,076.\,d\tau^2$$
$$dy' = -19,976.\,d\tau - 0,347.\,d\tau^2$$

vbi

vbi iam ſumi debet $d\tau = \frac{1}{4}$, vnde oritur

## Calculus pro tempore $\tau = 1\frac{1}{4}\, d$ poſt epocham.

§. 26. Sumto igitur $d\tau = \frac{1}{4}$ et $d\tau^2 = \frac{1}{16}$ ſequentia habebuntur elementa:

| | |
|---|---|
| $X = 23989,144$ | $Y = 722,544$ |
| $x = 24131,760$ | $y = 830,603$ |
| $x - X = 142,616$ | $y - Y = 108,059$ |
| $dX = -\ 12,371.\, d\tau$ | $dY = +\ 412,831.\, d\tau$ |
| $dx = -581,673\ d\tau$ | $dy = -\ 20,063.\, d\tau$ |

hincque ſequens calculus

| | | |
|---|---|---|
| $aly = 2,8588643$ | $aly = 2,9193935$ | $al(y-Y) = 2,0336609$ |
| $lX = 4,3800147$ | $lx = 4,3825890$ | $l(x-X) = 2,1541683$ |
| $l\,\text{tang.}\,\Phi = 8,4788496$ | $l\,\text{tang.}\,\omega = 8,5368045$ | $l\,\text{tang.}\,\psi = 9,8794926$ |
| ergo $\Phi = 1^\circ.\,43'.\,31''$ | ergo $\omega = 1^\circ.\,58'.\,17''$ | ergo $\psi = 37^\circ.\,9'$ |
| ad $lX = 4,3800147$ | ad $lx = 4,3825890$ | ad $l(x-X) = 2,1541683$ |
| $l\,\text{ſec.}\,\Phi = 10,0001976$ | $l\,\text{ſec.}\,\omega = 10,0002569$ | $l\,\text{ſec.}\,\psi = 10,0985105$ |
| $lu = 4,3802123$ | $lv = 4,3828459$ | $lw = 2,2526788$ |
| hinc $u = 24000$ | hinc $v = 24146,00$ | hinc $w = 178,928$ |
| ad $l\Delta = 9,6118924$ | ad $l\Delta = 9,6118924$ | ad $l\delta = 4,0555899$ |
| $lX = 4,3800147$ | $lx = 4,3825890$ | $l(x-X) = 2,1541683$ |
| $3,9919071$ | $3,9944814$ | $6,2097582$ |
| ſ. $lu^3 = 3,1406369$ | ſ. $lv^3 = 3,1485377$ | ſ. $lw^3 = 6,7580364$ |
| $l\frac{\Delta X}{u^3} = 0,8512702$ | $l\frac{\Delta x}{v^3} = 0,8459437$ | $l\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 9,4517218$ |
| $l\,\text{tang.}\,\Phi = 8,4788496$ | $l\,\text{tang.}\,\omega = 8,5368045$ | $l\,\text{tang.}\,\psi = 9,8794926$ |
| $l\frac{\Delta Y}{u^3} = 9,3301198$ | $l\frac{\Delta y}{v^3} = 9,3827482$ | $l\delta(y-Y) = 9,3312144$ |

 ergo

| | | |
|---|---|---|
| ergo $\frac{\Delta X}{u^3} = 7,100$ | ergo $\frac{\Delta x}{v^3} = 7,014$ | ergo $\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 0,283$ |
| et $\frac{\Delta Y}{u^3} = 0,214$ | et $\frac{\Delta y}{v^3} = 0,241$ | et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 0,214.$ |

Nunc iterum valores tertiae columnae $\frac{\delta(x-X)}{w^3}$ et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3}$ duplicentur, ſiquidem ponatur $d\tau = \frac{1}{8}$, hincque habebimus

| | |
|---|---|
| $ddX = -6,534.\,d\tau^2$ | $ddx = -7,666.\,d\tau^2$ |
| $ddY = +0,213.\,d\tau^2$ | $ddy = -0,669.\,d\tau^2$ |

hincque nanciſcimur

$$X' = 23989,144 - 12,371.\,d\tau - 3,267.\,d\tau^2$$
$$Y' = 722,544 - 412,831.\,d\tau + 0,106.\,d\tau^2$$
$$x' = 24131,760 - 581,673.\,d\tau - 3,833.\,d\tau^2$$
$$y' = 830,603 - 20,063.\,d\tau - 0,334.\,d\tau^2$$

deinde

$$dX' = -12,371.\,d\tau - 6,534.\,d\tau^2$$
$$dY' = +412,831.\,d\tau - 0,213.\,d\tau^2$$
$$dx' = -581,673.\,d\tau - 7,666.\,d\tau^2$$
$$dy' = -20,063.\,d\tau - 0,669.\,d\tau^2$$

vnde iam aggrediamur ſequentem calculum.

## Calculus pro tempore $\tau = 1\frac{7}{8}d$ poſt epocham.

§. 27. Sumto igitur $d\tau = \frac{1}{8}$ et $d\tau^2 = \frac{1}{64}$ ſequentia elementa prodibunt:

| | |
|---|---|
| $X = 23987,546$ | $Y = 774,146$ |
| $x = 24058,992$ | $y = 828,090$ |
| $x - X = 71,446$ | $y - Y = 53,944$ |
| $dX = -13,188.\,d\tau$ | $dY = +412,804.\,d\tau$ |
| $dx = -582,631.\,d\tau$ | $dy = -20,147\,d\tau$ |

calcu-

calculus igitur ad modum praecedentis ita procedit

| | | |
|---|---|---|
| $a\,l\,Y = 2,8888229$ | $a\,l\,y = 2,9180775$ | $a\,l(y\text{-}Y) = 1,7319431$ |
| $l\,X = 4,3799857$ | $l\,x = 4,3812774$ | ſ. $l\,(x\text{-}X) = 1,8539799$ |
| $l$tang. $\Phi = 8,5088372$ | $l$tang. $\omega = 8,5368001$ | $l$ tang. $\psi = 9,8779632$ |
| ideoque $\Phi = 1^\circ.50'.54''$ | ideoque $\omega = 1^\circ.58'.17''$ | ergo $\psi = 37^\circ.\ 3'.\ 9''$ |
| ad $l\,X = 4,3799857$ | ad $l\,x = 4,3812774$ | ad $l(x\text{-}X) = 1,8539799$ |
| $l$ ſec. $\Phi = 10,0002260$ | $l$ ſec. $\omega = 10,0002569$ | $l$ ſec. $\psi = 10,0979467$ |
| $l\,u = 4,3802117$ | $l\,v = 4,3815343$ | $l\,w = 1,9519266$ |
| hinc $u = 24000,03$ | hinc $v = 24073,23$ | hinc $w = 89,521$ |
| ad $l\,\Delta = 9,6118924$ | ad $l\,\Delta = 9,6118924$ | ad $l\,\delta = 4,0555899$ |
| add. $l\,X = 4,3799857$ | $l\,x = 4,3812774$ | $l\,(x-X) = 1,8539799$ |
| $3,9918781$ | $3,9931698$ | $5,9095698$ |
| ſ. $l\,u^3 = 3,1406351$ | ſ. $l\,v^3 = 3,1446029$ | ſ. $l\,w^3 = 5,8557798$ |
| $l\,\frac{\Delta X}{u^3} = 0,8512430$ | $l\,\frac{\Delta x}{v^3} = 0,8485669$ | $l\,\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 0,0537900$ |
| $l$tang. $\Phi = 8,5088372$ | $l$tang. $\omega = 8,5368001$ | $l$tang. $\psi = 9,8779632$ |
| $l\,\frac{\Delta Y}{u^3} = 9,3600802$ | $l\,\frac{\Delta y}{v^3} = 9,3853670$ | $l\,\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 9,9317532$ |
| ergo $\frac{\Delta X}{u^3} = 7,100$ | ergo $\frac{\Delta x}{v^3} = 7,056$ | ergo $\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 1,132$ |
| et $\frac{\Delta Y}{u^3} = 0,229$ | et $\frac{\Delta y}{v^3} = 0,243$ | et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 0,854$ |

Nunc adhuc duplicentur valores $\frac{\delta(x-X)}{w^3}$ et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3}$ vt ſit

| | |
|---|---|
| $ddX = -4,836.\,d\tau^2$ | $ddx = -9,320\,d\tau^2$ |
| $ddY = +1,479.\,d\tau^2$ | $ddy = -1,951\,d\tau^2$ |

hincque colligimus

$$X' = 23987,546 - 13,188.\,d\tau - 2,418.\,d\tau^2$$
$$Y' = 774,146 + 412,804.\,d\tau + 0,739.\,d\tau^2$$
$$x' = 24058,992 - 582,631.\,d\tau - 4,660.\,d\tau^2$$
$$y' = 828,090 - 20,147.\,d\tau - 0,975.\,d\tau^2$$

 deinde

deinde

$$dX' = -13,188.\,d\tau - 4,836.\,d\tau^2$$
$$dY' = +412,804.\,d\tau + 1,479.\,d\tau^2$$
$$dx' = -582,631.\,d\tau - 9,320.\,d\tau^2$$
$$dy' = -20,147.\,d\tau - 1,951.\,d\tau^2$$

vbi pro calculo ſequente ſumi debet $d\tau = \frac{1}{16}$.

## Calculus pro tempore $\tau = 1\frac{15}{16}\,d$ poſt epocham.

§. 28. Elementa igitur huius calculi ita ſe habebunt

| | |
|---|---|
| $X = 23986,713$ | $Y = 799,943$ |
| $x = 24022,560$ | $y = 826,837$ |
| $x - X = 35,847$ | $y - Y = 26,884$ |
| $dX = -13,490.\,d\tau$ | $dY = +412,896.\,d\tau$ |
| $dx = -583,213.\,d\tau$ | $dy = -20,269.\,d\tau$ |

quibus inuentis calculum ſequenti modo proſequamur

| | |
|---|---|
| $a\,l\,Y = 2,9030590$ | $a\,l\,y = 2,9174147$ |
| ſubtr. $l\,X = 4,3796707$ | ſubtr. $l\,x = 4,3806092$ |
| $l$ tang. $\Phi = 8,5230883$ | $l$ tang. $\omega = 8,5368055$ |
| ideoque $\Phi = 1^\circ\,54'.36''$ | ideoque $\omega = 1^\circ.\,58'.\,17''$ |
| $l$ ſec. $\Phi = 10,0002413$ | $l$ ſec. $\omega = 10,0002569$ |
| ad $l\,X = 4,3799707$ | ad $l\,x = 4,3806092$ |
| $l\,u = 4,3802120$ | $l\,v = 4,3808661$ |
| hinc $u = 24000,04$ | hinc $v = 24036,22$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ad $l\,\Delta$ | $=9,6118924$ | ad $l\,\Delta$ | $=9,6118924$ |
| add. $l\,X$ | $=4,3799707$ | add. $l\,X$ | $=4,3806092$ |
| | $3,9918631$ | | $3,9925016$ |
| ſ. $l\,u^3$ | $=3,1406360$ | ſ. $l\,v^3$ | $=3,1425983$ |
| $l\,\frac{\Delta X}{u^3}$ | $=0,8512271$ | $l\,\frac{\Delta x}{v^3}$ | $=0,8499033$ |
| $l$ tang. $\Phi$ | $=8,5230883$ | $l$ tang. $\omega$ | $=8,5368055$ |
| $l\,\frac{\Delta Y}{u^3}$ | $=9,3743154$ | $l\,\frac{\Delta y}{v^3}$ | $=9,3867088$ |
| ergo $\frac{\Delta X}{u}$ | $=7,099$ | ergo $\frac{\Delta x}{v^3}$ | $=7,078$ |
| et $\frac{\Delta Y}{u^3}$ | $=0,237$ | et $\frac{\Delta y}{v^3}$ | $=0,243.$ |

Si hinc vlterius progredientes ſumeremus $d\tau=\frac{1}{32}$, termini litera $\delta$ affecti fierent quadruplo maiores; at ſi ſumeremus $d\tau=\frac{1}{16}$ hi termini adeo in immenſum excreſcerent. Verum ſi minimum $d\tau$ vlterius augeamus, hi termini adeo euaderent negatiui, et effectus in contrarium vergeret; vnde ſi ſumamus $d\tau=\frac{1}{8}$, vt fiat $\tau+d\tau=2\frac{1}{16}$, iſti termini modo inuentis aequales prodibunt, ſed ſigno contrario affecti. Quamobrem poſito $d\tau=\frac{1}{8}$ totus effectus actionis mutuae ad nihilum redigetur, vnde pro ſequente calculo hos terminos penitus negligere opportebit, quam ob cauſam in hoc calculo tertiam columnamne quidem adiecimus; erit autem

| | |
|---|---|
| $ddX=-7,099.\,d\tau^2$ | $ddx=-7,078.\,d\tau^2$ |
| $ddY=-0,237.\,d\tau^2$ | $ddy=-0,243.\,d\tau^2$ |

ex quibus valoribus eliciuntur ſequentes:

$$X'=23986,713-13,490.\,d\tau-3,549.\,d\tau^2$$
$$Y'=\quad 799,943+412,896.\,d\tau-0,118.\,d\tau^2$$

 $x'=9$

$$x' = 24022,560 - 583,213.\,d\tau - 3,539.\,d\tau^2$$
$$y' = 826,827 - 20,269.\,d\tau - 0,121.\,d\tau^2$$
$$dX' = -13,490.\,d\tau - 7,099.\,d\tau^2$$
$$dY' = +412,896.\,d\tau - 0,237.\,d\tau^2$$
$$dx = -583,213.\,d\tau - 7,078.\,d\tau^2$$
$$dy = -20,269.\,d\tau - 0,243.\,d\tau^2.$$

## Calculus pro tempore $\tau = 2\frac{1}{10}d$ poſt epocham.

§. 29. Nunc igitur in praecedentibus valoribus ſtatui debet $d\tau = \frac{1}{8}$ et prodibunt ſequentia elementa:

| | |
|---|---|
| $X = 23984,972$ | $Y = 851,552$ |
| $x = 23949,603$ | $y = 824,291$ |
| $x - X = -35,369$ | $y - Y = -27,261$ |
| $dX = -14,377.\,d\tau$ | $dY = +412,867.\,d\tau$ |
| $dx = -584,098.\,d\tau$ | $dy = -20,298.\,d\tau$ |

hinc ſequens calculus

| | | |
|---|---|---|
| a $l\,y = 2,9302112$ | ad $l\,y = 2,9160805$ | $l(y-Y) = (-)\,1,4355418$ |
| ſ. $l\,X = 4,3799391$ | ſ. $l\,x = 4,3792983$ | ſ. $l(x-X) = (-)\,1,1548622$ |
| $l$tang. $\phi = 8,5502721$ | $l$tang. $\omega = 8,5367822$ | $l$tang. $\psi = (+)\,9,8869190$ |
| ergo $\phi = 2^\circ.\,2'.\,0''$ | ergo $\omega = 1^\circ.\,58'\,17$ | ergo $\psi = 37^\circ.\,37'.\,23''$ |
| ad $l\,X = 4,3799391$ | ad $l\,x = 4,3792983$ | ad $l(x-X) = (-)\,1,5486229$ |
| $l$ ſec. $\phi = 10,0002735$ | $l$ ſec. $\omega = 10,0002569$ | $l$ſec. $\psi = (+)\,10,1012458$ |
| $l\,u = 4,3802126$ | $l\,v = 4,3795552$ | $l\,w = (-)\,1,6498686$ |
| hinc $u = 24000,07$ | hinc $v = 23963,77$ | hinc $w = 44,654$ |

ad $l\,\Delta$

| | | |
|---|---|---|
| ad $l\Delta = 9{,}6118924$ | ad $l\Delta = 9{,}6118924$ | ad $l\delta = (+)\,4{,}0555899$ |
| $lX = 4{,}3799391$ | $lx = 4{,}3792983$ | $l(x-X) = (-)\,1{,}5486228$ |
| $3{,}9918315$ | $3{,}9911907$ | $(-)\,5{,}6042127$ |
| ſ. $lu^3 = 3{,}1406378$ | ſ. $lv^3 = 3{,}1386656$ | ſ. $lw^3 = (+)\,4{,}9496058$ |
| $l\frac{\Delta X}{u^3} = 0{,}8511937$ | $l\frac{\Delta x}{v^3} = 0{,}8525251$ | $l\frac{(x-X)}{w^3}\ (-)\ 0{,}6546069$ |
| $l\,\text{tang.}\,\Phi = 8{,}5502771$ | $l\,\text{tang.}\,\omega = 8{,}5367822$ | $l\,\text{tang.}\,\psi = 9{,}8869190$ |
| $l\frac{\Delta Y}{u^3} = 9{,}4014708$ | $l\frac{\Delta y}{v^3} = 9{,}3893073$ | $l\frac{(y-Y)}{w^3} = (-)\,0{,}5415259$ |
| ergo $\frac{\Delta X}{u^3} = 7{,}099$ | ergo $\frac{\Delta x}{v^3} = 7{,}121$ | ergo $\frac{\delta(x-X)}{w^3} = -4{,}514$ |
| et $\frac{\Delta Y}{u^3} = 0{,}252$ | et $\frac{\Delta y}{v^3} = 0{,}245$ | et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = -3{,}479.$ |

Vti hic effectus in tertia columna inuenti labente tempore continuo fiunt minores, et ſumto interuallo $d\tau = \frac{1}{16}$ adeo fiunt quadruplo minores, pro hoc interuallo hos effectus ad dimidium reduci conueniet, ita vt fiat

$$\frac{\delta(x-X)}{w^3} = -2{,}257 \quad \text{et} \quad \frac{\delta(y-Y)}{w^3} = -1{,}739$$

vnde nanciſcimur

$$ddX = -9{,}356\,d\tau^2 \qquad ddx = -4{,}864.\,d\tau^2$$
$$ddY = -1{,}991\,d\tau^2 \qquad ddy = +1{,}494.\,d\tau^2$$

vnde deducuntur ſequentes

$$X' = 23984{,}972 - 14{,}377.\,d\tau - 4{,}678\,d\tau^2$$
$$Y' = 851{,}552 + 412{,}867.\,d\tau - 0{,}996.\,d\tau^2$$
$$x' = 23949{,}603 - 584{,}098.\,d\tau - 2{,}423.\,d\tau^2$$
$$y' = 824{,}291 - 20{,}298.\,d\tau + 0{,}747.\,d\tau^2$$

$dX'$

$$dX' = -14,377\, d\tau - 9,356.\, d\tau^2$$
$$dY' = +412.867.\, d\tau + 1,991.\, d\tau^2$$
$$dx' = -584,089.\, d\tau - 4,864.\, d\tau^2$$
$$dy' = -\ 20,298.\, d\tau - 1,494.\, d\tau^2.$$

## Calculus pro tempore $\tau = 2\frac{1}{8}\, d$ poſt epocham.

§. 30. In vltimis igitur formulis inuentis ſumamus $d\tau = \frac{1}{18}$ et obtinebimus

| | |
|---|---|
| $X = 23984,055$ | $Y = 877,352$ |
| $x = 23913,088$ | $y = 823,026$ |
| $x-X = -70,967$ | $y-Y = -54,326$ |
| $dX = -14,961\, d\tau$ | $dY = +412,743\, d\tau$ |
| $dx = -584,402\, d\tau$ | $dy = -20,205\, d\tau$ |

hinc ſequens calculus

| | | |
|---|---|---|
| $a\,l\,Y = 2,9431739$ | $a\,l\,y = 2,9154135$ | $a\,l(y-Y) = 1,7340077$ |
| ſubtr. $l\,X = 4,3799226$ | ſ. $l\,x = 4,3786356$ | ſ. $l\,(x-X) = 1,8510564$ |
| $l$ tang. $\Phi = 8,5632513$ | $l$ tang. $\omega = 8,5367779$ | $l$ tang. $\psi = 9,8829513$ |
| ergo $\Phi = 2°.\ 5'.\ 42''$ | ergo $\omega = 1°.\ 58'.\ 17$ | ergo $\psi = 37°.\ 22'.\ 16''$ |
| ad $l\,X = 4,3799226$ | ad $l\,x = 4,3786356$ | ad $l(x\ X) = 1,8510564$ |
| $l$ ſec. $\Phi = 10,0002904$ | $l$ ſec. $\omega = 10,0002569$ | $l$ ſec. $\psi = 10,0997838$ |
| $l\,u = 4,3802130$ | $l\,v = 4,3788925$ | $l\,w = 1,9508402$ |
| hinc $u = 24000,10$ | hinc $v = 32927,24$ | hinc $w = 89,298$ |

ad $l\,\Delta$

| | | |
|---|---|---|
| ad $l\,\Delta = 9,6118924$ | ad $l\,\Delta = 9,6118924$ | ad $l\,\delta = 4,0555899$ |
| add. $l\,X = 4,3799226$ | add. $l\,x = 4,3786356$ | $l\,(x-X) = 1,8510564$ |
| $3,9918150$ | $3,9905280$ | $5,9066463$ |
| ſ. $l\,u^3 = 3,1406390$ | ſ. $l\,v^3 = 3,1366775$ | $l\,w^3 = 5,8525206$ |
| $l\,\frac{\Delta X}{u^3} = 0,8511760$ | $l\,\frac{\Delta x}{v^3} = 0,8538505$ | $l\,\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 0,0541257$ |
| $l$ tang. $\Phi = 8,5632513$ | $l$ tang. $\omega = 8,5367779$ | $l$ tang. $\psi = 9,8829513$ |
| $l\,\frac{\Delta Y}{u^3} = 9,4144273$ | $l\,\frac{\Delta y}{v^3} = 9,3906284$ | $l\,\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 9,9370770$ |
| ergo $\frac{\Delta X}{u^3} = 7,099$ | ergo $\frac{\Delta x}{v^3} = 7,142$ | ergo $\frac{\delta(x-X)}{w^3} = -1,133$ |
| et $\frac{\Delta Y}{u^3} = 0,260$ | et $\frac{\Delta y}{v^3} = 0,246$ | et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = -0,865$ |

quod ſi iam ſumamus interuallum $d\tau = \frac{1}{8}$, effectus tertiae columnae ad ſemiſſem redigi opportet, vnde fiet:

$$ddX = -7,665.\,d\tau^2 \quad ddx = -6,576.\,d\tau^2$$
$$ddY = -0,692.\,d\tau^2 \quad ddy = +0,186.\,d\tau^2$$

vnde colliguntur ſequentes valores;

$$X' = 23984,055 - 14,961.\,d\tau - 3,832.\,d\tau^2$$
$$Y' = 877,352 + 412,743.\,d\tau - 0,346.\,d\tau^2$$
$$x' = 23913,088 - 584,402.\,d\tau - 3,288.\,d\tau^2$$
$$y' = 823,026 - 20,205.\,d\tau + 0,093.\,d\tau^2$$
$$dX' = -14,961.\,d\tau - 7,665.\,d\tau^2$$
$$dY' = +412,743.\,d\tau - 0,692.\,d\tau^2$$
$$dx' = -584,402.\,d\tau - 6,576.\,d\tau^2$$
$$dy' = -20,205.\,d\tau + 0,186.\,d\tau^2$$

## Calculus pro tempore $\tau = 2\frac{1}{4}\,d$ poſt epocham.

§ 31. Poſito igitur $d\tau = \frac{1}{8}$ ſequentia elementa prodibunt:

| | |
|---|---|
| $X = 23982,125$ | $Y = 928,940$ |
| $x = 23839,987$ | $y = 820,501$ |
| $x - X = -142,138$ | $y - Y = -108,439$ |
| $dX = -15,919.d\tau$ | $dx = +585,224.d\tau$ |
| $dY = +412,656.d\tau$ | $dy = -20,182.d\tau$ |

quibus inuentis ſequens calculus inſtituatur

| | | |
|---|---|---|
| $a\,l\,Y = 2,9679877$ | $a\,l\,y = 2,9140791$ | $a\,l(y-Y) = 2,0351856$ |
| ſ. $l\,X = 4,3798876$ | ſubtr. $l\,x = 4,3773059$ | ſ. $l(x-X) = 2,1527102$ |
| $l$ tang. $\Phi = 8,5881001$ | $l$ tang. $\omega = 8,5367732$ | $l$ tang. $\psi = 9,8824754$ |
| ergo $\Phi = 2°.13'.6''$ | ergo $\omega = 1°.58'.17''$ | ergo $\psi = 37°.20'.25''$ |
| ad $l\,X = 4,3798876$ | ad $l\,x = 4,3773059$ | ad $l(x-X) = 2,1527102$ |
| $l$ ſec. $\Phi = 10,0003256$ | $l$ ſec. $\omega = 10,0002569$ | $l$ ſec. $\psi = 10,0996069$ |
| $l\,u = 4,3802132$ | $l\,v = 4,3775628$ | $l\,w = 2,2523171$ |
| hinc $u = 24000,11$ | hinc $v = 23854,04$ | hinc $w = -178,780$ |
| ad $l\,\Delta = 9,6118924$ | ad $l\,\Delta = 9,6118924$ | ad $l\,\delta = 4,0555899$ |
| $l\,X = 4,3798876$ | $l\,x = 4,3773059$ | $l(x-X) = 2,1527102$ |
| $3,9917800$ | $3,9891983$ | $6,2083001$ |
| ſubtr. $l\,u^3 = 3,1406396$ | ſ. $l\,v^3 = 3,1326884$ | ſ. $l\,w^3 = 6,7569513$ |
| $l\,\frac{\Delta X}{u^3} = 0,8511404$ | $l\,\frac{\Delta x}{v^3} = 0,8565099$ | $l\,\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 9,4513488$ |
| $l$ tang. $\Phi = 8,5881001$ | $l$ tang. $\omega = 8,5367732$ | $l$ tang. $\psi = 9,8824754$ |
| $l\,\frac{\Delta Y}{u^3} = 9,4392405$ | $l\,\frac{\Delta y}{v^3} = 9,3932861$ | $l\,\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 9,3338242$ |
| ergo $\frac{\Delta X}{u^3} = 7,098$ | ergo $\frac{\Delta x}{v^3} = 7,186$ | ergo $\frac{\delta(x-X)}{w^3} = -0,283$ |
| et $\frac{\Delta Y}{u^3} = 0,275$ | et $\frac{\Delta y}{v^3} = 0,247$ | et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = -0,215.$ |

Effectus

Effectus tertiae columnae iam iterum ad ſemiſſem reducantur, ſiquidem deinceps ponere velimus $d\tau = \frac{1}{4}$, ſicque obtinebimus

$$ddX = -7,239.\, d\tau^2 \quad ddx = -7,045.\, d\tau^2$$
$$ddY = -0,382.\, d\tau^2 \quad ddy = -0,140.\, d\tau^2$$

vnde obtinebimus ſequentes valores:

$$X' = 23982,125 - 15,919.\, d\tau - 3,619.\, d\tau^2$$
$$Y' = 928,940 + 412,656.\, d\tau - 0,191.\, d\tau^2$$
$$x' = 23839,987 - 585,224.\, d\tau - 3,522.\, d\tau^2$$
$$y' = 820,501 - 20,182.\, d\tau - 0,070.\, d\tau^2$$
$$dX' = -15,919.\, d\tau - 7,239.\, d\tau^2$$
$$dY' = +412,656.\, d\tau - 0,382.\, d\tau^2$$
$$dx' = -585,224.\, d\tau - 7,045.\, d\tau^2$$
$$dy' = -20,182.\, d\tau - 0,140.\, d\tau^2.$$

## Calculus pro tempore $\tau = 2\frac{1}{2}d$ poſt epocham.

§. 32. Ponendo in formulis modo inuentis $d\tau = \frac{1}{4}$ hoſce obtinebimus valores:

| | |
|---|---|
| $X = 23977,919$ | $Y = 1032,092$ |
| $x = 23693,461$ | $y = 815,452$ |
| $(x-X) = -284,458$ | $y-Y = -216,640$ |
| $dX = -17,792.\, d\tau$ | $dY = +412,561.\, d\tau$ |
| $dx = -586,685.\, d\tau$ | $dy = -20,216.\, d\tau$ |

ſuper his igitur elementis calculus ita inſtituatur

| | | |
|---|---|---|
| $a\,l\,Y = 3,0137383$ | $a\,l\,y = 2,9113985$ | $a\,l(y-Y) = (-)2,3357386$ |
| $\text{ſ.}\,l\,X = 4,3798113$ | $\text{ſ.}\,l\,x = 4,3746285$ | $\text{ſ.}\,l(x-X) = (-)2,4540181$ |
| $l\,\text{tang.}\,\Phi = 8,6339270$ | $l\,\text{tang.}\,\omega = 8,5367700$ | $l\,\text{tang.}\,\psi = 9,8817205$ |
| ergo $\Phi = 2^\circ.\,27'.\,52''$ | ergo $\omega = 1^\circ.\,58'.\,17''$ | ergo $\psi = 37^\circ.\,17'.\,10''$ |

 ad $l\,X$

| | | |
|---|---|---|
| ad $l\,X = 4,3798113$ | ad $l\,x = 4,3746285$ | $l\,(x-X) = 2,4546181$ |
| $l$ ſec. $\Phi = 10,0004025$ | $l$ ſec. $\omega = 10,0002569$ | $l$ ſec. $\psi = 10,0989420$ |
| $l\,u = 4,3802138$ | $l\,v = 4,3748854$ | $l\,w = 2,5529601$ |
| ergo $u = 24000,14$ | ergo $v = 23707,511$ | ergo $w = -357,240$ |
| ad $l\,\Delta = 9,6118924$ | ad $l\,\Delta = 9,6118924$ | ad $l\,\delta = 4,0554899$ |
| $l\,X = 4,3798113$ | $l\,x = 4,3746285$ | $l\,(x-X) = 2,4540181$ |
| 3,9917037 | 3,9865209 | 6,5095080 |
| ſ. $l\,u^3 = 3,1406414$ | $l\,v^3 = 3,1246562$ | $l\,w^3 = 7,6588803$ |
| $l\,\frac{\Delta X}{u^3} = 0,8510623$ | $l\,\frac{\Delta x}{v^3} = 0,8618647$ | $l\,\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 8,8506277$ |
| $l$ tang. $\Phi = 8,6339270$ | $l$ tang. $\omega = 8,5367700$ | $l$ tang. $\psi = 9,8817205$ |
| $l\,\frac{\Delta Y}{u^3} = 9,4849893$ | $l\,\frac{\Delta y}{v^3} = 9,3986347$ | $l\,\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 8,7323482$ |
| ergo $\frac{\Delta X}{u^3} = 7,097$ | ergo $\frac{\Delta x}{v^3} = 7,276$ | ergo $\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 0,071$ |
| et $\frac{\Delta Y}{u^3} = 0,305$ | et $\frac{\Delta y}{v^3} = 0,250$ | et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 0,054$ |

hinc ſumto dimidio valorum $\frac{\delta(x-X)}{w^3}$ et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3}$ obtinebimus

$$ddX = -7,132.\,d\tau^2 \quad\Big|\quad ddx = -7,241.\,d\tau^2$$
$$ddY = -0,332.\,d\tau^2 \quad\Big|\quad ddy = -0,223.\,d\tau^2$$

vnde etiam ſequentes deducuntur

$$X' = 23977,919 - 17,792.\,d\tau - 3,566.\,d\tau^2$$
$$Y' = 1032,092 + 412,561.\,d\tau - 0,166.\,d\tau^2$$
$$x' = 23693,461 - 586,685.\,d\tau - 3,620.\,d\tau^2$$
$$y' = 815,452 - 20,216.\,d\tau - 0,111.\,d\tau^2$$
$$dX' = -17,792.\,d\tau - 7,132.\,d\tau^2$$
$$dY' = +412,561.\,d\tau - 0,332.\,d\tau^2$$
$$dx' = -586,685.\,d\tau - 7,241.\,d\tau^2$$
$$dy' = -20,216.\,d\tau - 0,223.\,d\tau^2.$$

Calcu-

## Calculus pro tempore $\tau = 3\,d$ poſt epocham.

§. 33. Poſito $d\tau = \frac{1}{2}$ huius calculi elementa ita ſe habebunt

| | |
|---|---|
| $X = 23968,132$ | $Y = 1238,331$ |
| $x = 23399,214$ | $y = 805,316$ |
| $x - X = -568,918$ | $y - Y = -433,015$ |
| $dX = -21,358.\,d\tau$ | $dY = +412,395.\,d\tau$ |
| $dx = -590,305.\,d\tau$ | $dy = -20,372.\,d\tau$ |

quibus inuentis calculum ita proſequamur

| | | |
|---|---|---|
| $a\; l\,Y = 3,0928368$ | $a\; l\,y = 2,9059663$ | $l(y-Y) = (-)2,6365020$ |
| ſ. $l\,X = 4,3796341$ | ſ. $l\,x = 4,3692012$ | ſ. $l(x-X) = (-)2,7550497$ |
| $l$tang. $\phi = 8,7132027$ | $l$tang. $\omega = 8,5367651$ | $l$ tang. $\psi = 9,8814523$ |
| ergo $\phi = 2°.\,57'.\,27''$ | ergo $\omega = 1°.\,58'.\,16''$ | ergo $\psi = 37°.\,16'.\,32''$ |
| ad $l\,X = 4,3796341$ | ad $l\,x = 4,3692012$ | ad $l\,(x-X) = 2,7550497$ |
| $l$ ſec. $\phi = 10,0005790$ | $l$ ſec. $\omega = 10,0002569$ | $l$ ſec. $\psi = 10,0992300$ |
| $l\,u = 4,3802131$ | $l\,v = 4,3694581$ | $l\,w = 2,8542797$ |
| ergo $u = 24000,11$ | ergo $v = 23413,05$ | ergo $w = -714,957$ |
| ad $l\,\Delta = 9,6118924$ | ad $l\,\Delta = 9,6118924$ | ad $l\,\delta = 4,0555899$ |
| $l\,X = 4,3796341$ | $l\,x = 4,3692012$ | $l\,(x-X) = 2,7550497$ |
| $3,9915265$ | $3,9810936$ | $6,8106396$ |
| ſ. $l\,u^3 = 3,1406511$ | ſ. $l\,v^3 = 3,1083743$ | ſubtr. $l\,w^3 = 8,5628391$ |
| $l\,\frac{\Delta X}{u^3} = 0,8508754$ | $l\,\frac{\Delta x}{v^3} = 0,8727193$ | $l\,\frac{(x-X)}{w^3} = 8,2478005$ |
| $l$tang. $\phi = 8,7132027$ | $l$ tang $\omega = 8,5367651$ | $l$ tang. $\psi = 9,8814528$ |
| $l\,\frac{\Delta Y}{u^3} = 9,5640781$ | $l\,\frac{\Delta y}{v^3} = 9,4094844$ | $l\,\frac{(y-Y)}{w^3} = 8,1292533$ |
| ergo $\frac{\Delta X}{u^3} = 7,094$ | ergo $\frac{\Delta x}{v^3} = 7,460$ | ergo $\frac{\delta(x-X)}{w^3} = -0,017$ |
| et $\frac{\Delta Y}{u^3} = 0,366$ | et $\frac{\Delta y}{v^3} = 0,257$ | et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = -0,013$ |

 vbi

vbi iterum effectus actionis mutuae ad ſemiſſem reducuntur, quo obſeruato fit

$$ddX = -7,102\, d\tau^2 \quad ddx = -7,452.\, d\tau^2$$
$$ddY = -0,372\, d\tau^2 \quad ddy = -0,251.\, d\tau^2$$

vnde ſequentes nanciſcimur valores

$$X' = 23968,132 - 21,358.\, d\tau - 3,551\, d\tau^2$$
$$Y' = 1238,331 + 412,395.\, d\tau - 0,186.\, d\tau^2$$
$$x' = 23399,214 - 590,305.\, d\tau - 3,726.\, d\tau^2$$
$$y' = 805,316 - 20,372.\, d\tau - 0,125.\, d\tau^2$$
$$dX' = -21,358.\, d\tau - 7,102.\, d\tau^2$$
$$dY' = +412,395.\, d\tau - 0,372.\, d\tau^2$$
$$dx' = -590,305.\, d\tau - 7,452.\, d\tau^2$$
$$dy' = -20,372.\, d\tau - 0,251.\, d\tau^2.$$

## Calculus pro tempore $\tau = 4\, d$ poſt epocham.

§. 34. Calculi huius elementa poſito $d\tau = 1$ ita erunt comparata

| | |
|---|---|
| $X = 23943,223$ | $Y = 1650,540$ |
| $x = 22805,183$ | $y = 784,819$ |
| $x - X = -1138,040$ | $y - Y = -865,721$ |
| $dX = -28,450.\, d\tau$ | $dY = +412,023.\, d\tau$ |
| $dx = -597,757\, d\tau$ | $dy = -20,623.\, d\tau$ |

hincque calculum ſequenti modo proſequamur. Et quia actio mutua penitus ceſſare eſt cenſenda, tantum ſupereſt, vt valores $\Phi$, $u$, $\omega$, $v$, $\psi$, $w$ definiamus

$alY$

| | | |
|---|---|---|
| a $lY = 3,2176260$ | a $ly = 2,8947694$ | a $l(y-Y) = 2,9373780$ |
| ſubtr $lX = 4,3791826$ | ſ. $lx = 4,3580335$ | ſ. $l(x-X) = 3,0561576$ |
| $l$tang. $\Phi = 8,8384434$ | $l$tang. $\omega = 8,5367359$ | $l$ tang. $\psi = 9,8812204$ |
| ergo $\Phi = 3^\circ. 56'. 37''$ | ergo $\omega = 1^\circ. 58'. 16$ | ergo $\psi = 37^\circ. 15'. 40''$ |
| ad $lX = 4,3791826$ | ad $lx = 4,3580335$ | ad $l(x-X) = 3,0561576$ |
| $l$ ſec. $\Phi = 10,0010287$ | $l$ ſec. $\omega = 10,0002581$ | $l$ ſec. $\psi = 10,0991489$ |
| $lu = 4,3802113$ | $lv = 4,3582916$ | $lw = 3,1553065$ |
| hinc $u = 24000,01$ | hinc $v = 22818,74$ | hinc $w = -1429,903.$ |

§. 35. Quo haec quae his calculis inuenimus clarius ob oculos ponamus, omnia in ſequenti tabella referamus in ſeptem diſtributa columnas. I$^a$. Columna continet tempora ab epocha elapſa in diebus et horis expreſſa, ſcilicet valores literae $\tau$. II$^a$. Longitudinem terrae ex ſole viſam, ſeu angulum $\Phi$. III. Diſtantiam terrae a ſole in ſemidiametris terrae expreſſam, ſeu literam $u$. IV. Longitudinem cometae heliocentricam, ſeu angulam $\omega$. V. Diſtantiam cometae a ſole, ſeu literam $v$. VI. longitudinem cometae geocentricam, ſeu angulum $\psi$. VII. Diſtantiam cometae a terra itidem in ſemidiametris terrae ſeu literam $w$.

Tabula

## Tabula

motum tam terrae quam cometae exhibens

| $\tau$ | $\phi$ | $u$ | $\omega$ | $v$ | $\psi$ | $w$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| D. h. | g. m. s. | | g. m. s. | | S. g. m. f. | |
| 0. 0 | 0. 0. 0 | 24000,00 | 1.58.17 | 25154, 08 | 1. 7.12.57 | 1430,697 |
| 1. 0 | 0.59. 8 | 24000,01 | 1.58.17 | 24580, 60 | 1. 7.13.11 | 715,302 |
| 1.12 | 1.28.43 | 24000,02 | 1.58.17 | 24291, 32 | 1. 7.11.57 | 357,724 |
| 1.18 | 1.43.31 | 24000,03 | 1.58.17 | 24146, 00 | 1. 7. 9. 3 | 178,928 |
| 1.21 | 1.50.54 | 24000,04 | 1.58.17 | 24073, 23 | 1. 7. 3. 9 | 89,521 |
| 1.22½ | 1.54.36 | 24000,04 | 1.58.17 | 24036, 22 | 1. 7. 0. 3 | 44,808 |
| 2. 1½ | 2. 2. 0 | 24000,06 | 1.58.17 | 23963, 77 | 7. 7.37.23 | 44,657 |
| 2. 3 | 2. 5.42 | 24000,10 | 1.58.17 | 23927, 24 | 7.17.22.16 | 89,298 |
| 2. 6 | 2.13. 6 | 24000,12 | 1.58.17 | 23854, 04 | 7. 7.20.25 | 178,780 |
| 2.12 | 2.27.52 | 24000,14 | 1.58.17 | 23707, 51 | 7. 7.17.10 | 357,240 |
| 3. 0 | 2.57.27 | 24000,10 | 1.58.16 | 23413, 05 | 7. 7.16.32 | 714,957 |
| 4. 0 | 3.56.37 | 24000,01 | 1.58.16 | 22818, 74 | 7. 7.15.40 | 1429,903 |

§. 36. Non obſtantibus leuiuſculis erroribus, quos in talibus calculis euitare non licet, concluſiones maximi momenti hinc tuto deducere poſſumus. Primo enim motus cometae reſpectu terrae manifeſto diſtingui debet in acceſſum et receſſum. Acceſſus durat vsque ad dies 2 quo cometa continuo propius ad terram accedit, ac fortaſſe vsque ad contactum appropinquaret, quo caſu vtique colliſio contingeret effectum maxime funeſtum producens. Verum aſſumamus cometam non prorſus ad contactum vsque appropinquaſſe, id quod quam minima facta mutatione in noſtra hypotheſi eueniſſet. Semota igitur colliſione intelligimus, cometam fere pari motu

tu iterum a terra recedere quo acceſſerat, neque adeo in curſu ſuo multum turbari. Vnde ſtatim eorum opinio manifeſto reuellitur, qui putarunt, talem cometam ad terram proxime accedentem in ſatellitem vel lunam abire poſſe. Quin potius euidens eſt, neque terram neque cometam in motu ſuo hinc enormem perturbationem perpeti, ſed potius vtrumque curſum ſuum ſine admodum notabili mutatione eſſe proſecuturum. Interim tamen nullum eſt dubium, quin ob maximam vicinitatem phaenomena ſatis notabilia tam in aeſtu maris quam in ſtatu Atmoſphaerae ſe ſint oblatura. Sed quoniam iſta vicinitas quaſi tantum per momentum durat, vix vllum inde periculum metuendum videtur.

§. 37. Deinde etiam ex hoc calculo patet, omnem effectum qui in acceſſu cometae ad terram fuerit productus in receſſu fere maximam partem iterum deſtrui; quandoquidem tam ſitus quam motus terrae et cometae poſtquam actio mutua ceſſavit non multum diſcrepat ab eo qui remota actione mutua locum habuiſſet. Quo autem hanc ipſam mutationem accuratius determinemus, comparemus vtriusque ſtatum, quo tam terra quam cometa quarto die vbi actio mutua ceſſaſſe eſt cenſenda verſabantur cum eo ſtatu in quo remota actione mutua fuiſſent reperti, vt hinc deinceps motum vtriusque futurum determinare queamus.

§. 38. Primo igitur ſi terra motum ſuum ſine vlla alteratione continuaſſet, etiamnunc foret $u = 24000$,

 et

et elapſo tempore $\tau = 4$ foret angulos $\Phi = 3^\circ.\ 56'.\ 33'$ vnde prodit

$$X = 24000 \operatorname{coſ.}\Phi \text{ et } Y = 24000 \operatorname{ſin.}\Phi \text{ h. e.}$$

$$X = 23943,733 \text{ et } Y = 1650,239.$$

Pro celeritatibus vero habebimus

$$dX = -24000\, d\Phi \operatorname{ſin.}\Phi \text{ et } dY = +24000\, d\Phi \operatorname{coſ.}\Phi.$$

Supra autem vidimus eſſe $d\Phi = 0,017204\, d\tau$, ſicque erit

$$\frac{dX}{d\tau} = -0,017204.\ 24000 \operatorname{ſin.}\Phi = -28,391$$

$$\frac{dY}{d\tau} = +0,017204.\ 24000 \operatorname{coſ.}\Phi = +411,928$$

qui valores quo facilius cum iis quos vltimus calculus ſuppeditauit conferri queant hic coniunctim repraeſentemus

| Remota actione mutua | Accedente actione mutua |
|---|---|
| $X = 23943,733$ | $X = 23943,223$ |
| $Y = 1650,239$ | $Y = 1650,540$ |
| $\frac{dX}{d\tau} = -28,391$ | $\frac{dX}{d\tau} = -28,460$ |
| $\frac{dY}{d\tau} = +411,928$ | $\frac{dY}{d\tau} = +412,023.$ |

§. 39. Pro motu autem cometae ſupra inuenimus hanc aequationem

$$\frac{dv}{d\vartheta} = -\sqrt{\frac{2a^3}{v}} \text{ et } \vartheta = \frac{2c\sqrt{c} - 2v\sqrt{v}}{3\sqrt{2a^3}}$$

vbi inuenimus eſſe

$$c\sqrt{c} = \frac{(3\alpha + \sqrt{2})}{\sqrt{2}} a\sqrt{a}.$$

Quare cum ſumſerimus

$$a = 24000 \text{ et } \alpha = 1^\circ.\ 58'.\ 17'' = 0,034408$$

nunc

nunc vero ſit

$$2v\sqrt{v} = (3\alpha\sqrt{2}+2)a\sqrt{a} - 3\vartheta\sqrt{2a^3}$$

hic capiamus pro quatuor diebus

$\vartheta = 2\alpha$ erit $2v\sqrt{v} = 2a\sqrt{a} - 2\alpha a\sqrt{2a}$

vnde in numeris fit $v\sqrt{v} = 3446680$, hincque porro $l\sqrt{v} = 2,1791337$ et $lv = 4,3582674$ hincque $v = 22817,470$ vnde colligitur

$x = v\,\text{coſ.}\,\alpha = 22803,963$ et $y = v\,\text{ſin.}\,\alpha = 784,925$.

Tum vero pro celeritatibus ob

$\frac{dv}{d\vartheta} = \sqrt{\frac{2a^3}{v}} = 34809,532$ erit $l\frac{dv}{d\tau} = 2,7773275$

fietque

$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dv}{d\tau}\,\text{coſ.}\,\alpha = -598,512$

$\frac{dy}{d\tau} = \frac{dv}{d\tau}\,\text{ſin.}\,\alpha = -20,601$.

Quod ſi igitur iſtos valores comparemus cum iis quos cometa habuiſſet eodem tempore ſublata actione mutua, comparatio ita ſe habebit.

| Sublata actione mutua | Accedente actione mutua |
|---|---|
| $x = 22803,963$ | $x = 22805,180$ |
| $y = 784,925$ | $y = 784,819$ |
| $\frac{dx}{d\tau} = -598,512$ | $\frac{dx}{d\tau} = -597,757$ |
| $\frac{dy}{d\tau} = -20,601$ | $\frac{dy}{d\tau} = -20,623$. |

§. 40. Nunc igitur quaeſtio huc redit, quanam lege tam terra quam cometa motum ſuum deinceps ſint proſecuturi, poſtquam actio mutua ceſſauit. Quae quaeſtio cum latiſſime pateat, eam generatim in ſequenti problemate complectamur.

 Pro-

## Problema.

*Si ad datum tempus cognitus fuerit tam locus quam motus ſiue planetae ſiue cometae, determinare eius orbitam et motum quo deinceps circa ſolem reuoluetur.*

## Solutio.

T. XXIV. Fig 4. §. 41. Elapſo tempore $\tau$ dierum planeta ſiue cometa verſatur in Y, vnde ad rectam S ♈ ex ſole ad initium arietis ductam demittatur perpendiculum Y X et vocentur coordinatae

$$SX = x \quad \text{et} \quad XY = y.$$

Praeterea vero ponatur diſtantia a Sole $SY = u$ et angulus ♈ $SY = \Phi$, ita vt ſit $uu = xx + yy$ et tang. $\Phi = \frac{y}{x}$; tum vero viciſſim $x = u \cos. \Phi$, $y = u \sin. \Phi$. Quibus poſitis principia motus ſequentes ſuppeditant aequationes:

$$\text{I. } \frac{ddx}{d\tau^2} = -\frac{\Delta x}{u^3} \quad \text{et II. } \frac{ddy}{d\tau^2} = -\frac{\Delta y}{u^3}$$

vbi ſi omnes diſtantiae in ſemidiametris terrae exprimantur inuenitur litera $\Delta$ ita vt ſit $l\Delta = 9{,}6118924$ ſiquidem diſtantia media terrae a ſole aſſumatur 24000 ſemidiametris terrae.

§. 42. Iam pro ſtatu planetae initiali qui ad datum tempus vt cognitus ſpectatur fuerit $x = a$, $y = b$; tum vero pro motu $\frac{dx}{d\tau} = \alpha$, $\frac{dy}{d\tau} = \beta$; vnde pro eodem initio erat $u = \sqrt{aa + bb}$ et tang. $\Phi = \frac{b}{a}$. Statuamus autem breuitatis gratia pro initio $u = f$ et $\Phi = \vartheta$, ita vt ſit $f = \sqrt{aa + bb}$ et tang. $\vartheta = \frac{b}{a}$. Hinc porro fiat

$$\frac{dx^2 + dy^2}{d\tau^2} = \alpha\alpha + \beta\beta = \zeta\zeta.$$

Dein-

Deinde cum ſit

$$udu = xdx + ydy \text{ erit } \frac{udu}{d\tau} = a\alpha + b\beta = g;$$

vbi notetur eſſe

$$dx^2 + dy^2 = du^2 + uud\Phi^2.$$

§. 43. Nunc aggrediamur aequationes noſtras differentiales ſecundi gradus et haec combinatio I. $2dx$ + II. $2dy$ dat

$$\frac{2dxddx + 2dyddy}{d\tau^2} = -\frac{2\Delta(xdx + ydy)}{u^3} = -\frac{2\Delta du}{uu}$$

cuius integrale eſt

$$\frac{dx^2 + dy^2}{d\tau^2} = \frac{2\Delta}{u} + C.$$

Pro quae conſtante determinanda quia in ſtatu initiali ſit

$$\frac{dx^2 + dy^2}{d\tau^2} = \zeta\zeta \text{ et } u = f \text{ erit } C = \zeta\zeta - \frac{2\Delta}{u}$$

ita vt habeamus

$$\frac{dx^2 + dy^2}{d\tau^2} = \zeta\zeta - \frac{2\Delta}{f} + \frac{2\Delta}{u}.$$

§. 44. Conſideretur nunc iſta combinatio: I. $x$ + II. $y$, quae dat

$$\frac{xddx + yddy}{d\tau^2} = -\frac{\Delta(xx + yy)}{v^3} = -\frac{\Delta}{u};$$

cui addatur aequatio modo inuenta integralis, eritque

$$\frac{xddx + dx^2 + yddy + dy^2}{d\tau^2} = \zeta\zeta - \frac{2\Delta}{f} + \frac{\Delta}{u}.$$

Cum autem ſit

$$xddx + dx^2 = d.\,xdx \text{ et } yddy + dy^2 = d.\,ydy$$

habebimus

$$\frac{d.\,xdx + d.\,ydy}{d\tau^2} = \frac{d.\,udu}{d\tau^2} = \zeta\zeta - \frac{2\Delta}{f} + \frac{\Delta}{u}$$

quae multiplicata per $2\,u\,d\,u$ et integrata praebet

$$\frac{u\,u\,d\,u^2}{d\,\tau^2} = C + 2\,\Delta\,u - \frac{2\,\Delta\,u\,u}{f} + \zeta\,\zeta\,u\,u$$

vbi cum initio fuerit $u = f$ et $\frac{u\,d\,u}{d\,\tau} = g$, conſtans ita definitur vt ſit $C = g\,g - \zeta\,\zeta\,f\,f$, vnde obtinebimus

$$\frac{u\,u\,d\,u^2}{d\,\tau^2} = g\,g - \zeta\,\zeta\,f\,f + 2\,\Delta\,u - \frac{2\,\Delta\,u\,u}{f} + \zeta\,\zeta\,u\,u$$

quae eſt altera aequatio integralis duas tantum continens variabiles.

§. 45. In hac formula notetur fore

$$g\,g - \zeta\,\zeta\,f\,f = -(a\,\beta - b\,\alpha)^2\ .$$

vnde ſi ſtatuamus $a\,\beta - b\,\alpha = h$, aequatio inuenta, poſito adhuc breuitatis ergo $\frac{2\,\Delta}{f} - \zeta\,\zeta = F$, hanc induet formam:

$$\frac{u\,u\,d\,u^2}{d\,\tau^2} = -h\,h + 2\,\Delta\,u - F\,u\,u$$

vnde radice extracta reperitur

$$d\,\tau = \frac{\pm\,u\,d\,u}{\sqrt{-h\,h + 2\,\Delta\,u - F\,u\,u}}.$$

Vbi notari oportet, ſignorum ambiguorum valere ſuperius ſi planeta a ſole remoueatur, ſiue ſi motus a perihelio computetur: ſin autem ad ſolem accedat, ſiue ſi motus ab aphelio computetur vti moris eſt pro Planetis, inferius ſignum capi debebit. Notum autem eſt huius formulae integrale partim algebraice partem per arcum circuli exprimi poſſe, ita vt hinc ad quoduis tempus $\tau$ diſtantia $u$ per notas tabulas aſtronomicas aſſignari poſſit.

§. 46. Quoniam ex hac aequatione ratio $\frac{d\,u}{d\,\tau}$ conſtat ex aequatione integrali primum inuenta, ob

$$d\,x^2 + d\,y^2 = d\,u^2 + u\,u\,d\,\Phi^2$$

etiam

etiam ratio $\frac{d\Phi}{d\tau}$ colligi poſſet. Verum hoc facilius ex iſta combinatione I $y$ — II $x$ fieri poteſt, ex qua fit $\frac{yddx - xddy}{d\tau^2} = 0$ cuius integrale eſt $\frac{ydx - xdy}{d\tau} = C$ ex ſtatu autem initiali concluditur $= b\alpha - a\beta = -b$ ita vt ſit $\frac{xdy - ydx}{d\tau} = b$. Cum vero ſit

$$x = u \operatorname{coſ.} \Phi \text{ et } y = u \operatorname{ſin.} \Phi$$

hincque

$$dx = du \operatorname{coſ.}\Phi - ud\Phi \operatorname{ſin.}\Phi \text{ et } dy = du \operatorname{ſin.}\Phi + ud\Phi \operatorname{coſ.}\Phi$$

erit $xdy - ydx = uud\Phi$

ſicque aequatio noſtra erit

$$\frac{uud\Phi}{d\tau} = b \text{ ſiue } d\Phi = \frac{bd\tau}{uu}$$

quare loco $d\tau$ valore ſubſtituto habebimus

$$d\Phi = \frac{\pm bdu}{u\sqrt{-bb + 2\Delta u - Fuu}}.$$

§. 47. Ad hanc formulam ſimpliciorem reddendam ponamus $u = \frac{1}{z}$ vt fiat $\frac{du}{u} = -\frac{dz}{z}$ ac reperietur

$$d\Phi = \frac{\pm bdz}{\sqrt{-bbzz + 2\Delta z - F}}.$$

Nunc poſt ſignum radicale ſecundum membrum $2\Delta z$ elidamus, ponendo $z = s + \frac{\Delta}{bb}$ ac prodibit

$$d\Phi = \frac{\mp bds}{\sqrt{-bbss + \frac{\Delta\Delta}{bb} - F}}$$

vbi ponatur

$$\frac{\Delta\Delta}{bb} - F = nnbb \text{ ita vt}$$

$$n = \sqrt{\frac{\Delta\Delta}{b^4} - \frac{F}{bb}} = \frac{1}{bb}\sqrt{\Delta\Delta - Fbb}$$

et

et impetremus

$d\Phi = \frac{\mp ds}{\sqrt{nn - ss}}$ cuius integrale manifeſto eſt

$\Phi = C \mp A \,\text{ſin.}\, \frac{s}{n}$, vel etiam $\Phi = C \pm A \,\text{coſ.}\, \frac{s}{n}$

vbi iterum conſtans ex ſtatu initiali determinari debet, pro quo ſit $\Phi = \vartheta$. Deinde ob $u = f$ erit $z = \frac{1}{f}$ et $s = \frac{1}{f} - \frac{\Delta}{bb}$, vnde pro initio ſit

$\vartheta = C \pm A \,\text{coſ.}\, \frac{bb - \Delta f}{nfbb}$, ideoque $C = \vartheta \mp A \,\text{coſ.}\, \frac{bb - \Delta f}{nfbb}$.

Quare ſi iſte arcus cuius coſinus $\frac{bb - \Delta f}{nfbb}$ ponatur $= \eta$ erit

$C = \vartheta \mp \eta$, ideoque $\Phi = \vartheta \mp \eta \pm A \,\text{coſ.}\, \frac{s}{n}$.

Quare cum ſit $z = \frac{1}{u}$ et $s = \frac{1}{u} - \frac{\Delta}{bb}$ erit

$\Phi = \vartheta \mp \eta \pm A \,\text{coſ.}\, \frac{bb - \Delta u}{nbbu}$.

§. 48. Sumamus hic ſignum ſuperius valere, quia caſu contrario mutatio facile inſtituitur, et cum ſit

$\Phi - \vartheta + \eta = A \,\text{coſ.}\, \frac{bb - \Delta u}{nbbu}$

ponamus breuitatis gratia

$\Phi - \vartheta + \eta = \omega$ eritque $\text{coſ.}\, \omega = \frac{bb - \Delta u}{nbbu}$

vnde colligitur $u = \frac{bb}{nbb \,\text{coſ.}\, \omega + \Delta}$. Fiat nunc $\frac{bb}{\Delta} = c$ vt prodeat $u = \frac{c}{1 + nc \,\text{coſ.}\, \omega}$; fiat porro $nc = -e$, vt ſit $e = -\frac{1}{\Delta} \sqrt{\Delta^2 - Fbb}$, ſicque habebitur $u = \frac{c}{1 - e \,\text{coſ.}\, \omega}$, ex qua formula intelligitur orbitam eſſe ellipſin cuius ſemiparameter $= c$ et excentricitas $= e$, angulus vero $\omega$ anomalia vera.

§. 49.

§. 49. Quodſi ergo ſumamus $\omega = 0$, reperietur diſtantia aphelii a ſole $= \frac{c}{1-e}$: at ſumto $\omega = 180°$ fit diſtantia perihelii a ſole $= \frac{c}{1+e}$, vnde axis transverſus orbitae colligitur $= \frac{2c}{1-ee}$, et ſemiaxis transverſus $= \frac{c}{1-ee} = \frac{\Delta}{f}$. Tum vero erit $\Phi = \vartheta + \eta - \omega$, vbi eſt $\text{coſ.}\, \omega = \frac{u-c}{eu}$; vnde cum initio vbi $u = f$ fiebat $\omega = \eta$, hic angulus $\eta$ commodius ita definietur, vt ſit

$$\text{coſ.}\, \eta = \frac{f-c}{ef}, \text{ exiſtente } c = \frac{bb}{\Delta} \text{ et } e = -\frac{1}{\Delta} V(\Delta^2 - Fbb).$$

§. 50. Supereſt autem adhuc vt poſitionem lineae adſidum reſpectu axis S ♈ determinemus. Hunc in finem ſtatuamus planetam in ſuo aphelio, vbi vt vidimus fit $u = \frac{c}{1-e}$, et angulus $\Phi$ ipſam dabit inclinationem lineae abſidum ad rectam S ♈. Poſito autem $u = \frac{c}{1-e}$ fiet $\text{coſ.}\, \omega = 1$, ideoque $\omega = 0$, vnde fit $\Phi = \vartheta - \eta$.

§. 51. Colligamus nunc breuiter omnia quae ad determinationem orbitae ſunt inuenta, et ex datis quantitatibus principalibus $a, b$ et $\alpha, \beta$, quaeramus primo angulum $\vartheta$, vt ſit $\text{tang.}\, \vartheta = \frac{b}{a}$, hincque porro diſtantia

$$f = V\overline{aa + bb} = a \,\text{ſec.}\, \vartheta. \text{ Praeterea capiatur}$$

$$b = a\beta - b\alpha \text{ et } \zeta\zeta = \alpha\alpha + \beta\beta$$

vnde definiatur $F = \frac{2\Delta}{f} - \zeta\zeta$. Quibus elementis conſtitutis erit orbitae ellipticae ſemi-axis transuerſus $= \frac{\Delta}{F}$, ſemiparameter $c = \frac{bb}{\Delta}$ et excentricitas

$$e = -\frac{1}{\Delta} V\Delta^2 - Fbb.$$

Deinde quaeratur angulus $\eta$, vt ſit coſ. $\eta = \frac{f-c}{ef}$, hincque erit longitudo lineae abſidum ſiue angulus ſub quo ea ad rectam fixam ♈ S inclinatur $= \vartheta - \eta$; ſicque omnia innoteſcunt quae ad nouam orbitam determinandam requiruntur.

## Determinatio orbitae terrae poſt cometae actionem.

§. 52. Ex §. 38. poſtquam actio cometae ceſſauit habebimus

$a = 23943,223 \qquad \alpha = - 28,460$

$b = 1650,540 \qquad \beta = + 412,023$

vnde ſupra iam inuenimus

$\vartheta = 3^\circ. 56'. 37''$ et $f = 24000,01$

Hinc erit

$h = a\beta - b\alpha = 9912134,37$ ideoque

$lh = 6,9961672$ et $lhh = 13,9923344$.

Porro quaeratur

$\zeta\zeta = \alpha\alpha + \beta\beta = 170572,97$ denique

$\frac{\Delta}{f} = 170483,04$ vnde colligitur

$F = \frac{2\Delta}{f} - \zeta\zeta = 170393,11$ et $lF = 5,2314519$.

Praeterea

$c = \frac{hh}{\Delta} = 24012,76$ et $e = + \sqrt{1 - \frac{Fhh}{\Delta\Delta}} = +0,0044$

ſiue excentricitas tam eſt parua, vt ob errores calculi ineuitabiles ne definiri quidem queat; ita vt terra etiamnunc in circulo moueri ſit cenſenda, vnde

etiam

etiam nulla datur linea abſidum, cuius poſitionem inueſtigari oportet. Poſtremo autem erit ſemiaxis transuerſus $\frac{\Delta}{F} = 24012,70$.

§. 53. Poſtquam igitur actio mutua ceſſauit, terra adhuc in circulo reuoluetur, cuius radius $= \frac{\Delta}{F} = 24012,70$, cum ante aſſumſerimus circulum cuius radius $= 24000$ ſemidiametris terrae. Nunc igitur tempus periodicum aliquantillum augebitur in ratione ſesquiplicata axium transuerſorum: hoc eſt in ratione $1 : \frac{24015}{24000}$ ſeu vt $1 : 1\frac{30}{48000}$. Augebitur igitur tempus periodicum ſui parte $\frac{1}{1231}$, quod eſt augmentum circiter 7 horar., quod diſcrimen profecto ſatis eſt exiguum, dum ex tali occurſu ſubuerſio totalis metuenda videretur.

## Determinatio orbitae cometae poſt actionem mutuam.

§. 54. Applicemus nunc etiam noſtrum problema generale ad determinationem motus cometae, quo ceſſante actione mutua deinceps feretur, atque ex §. 39. habebimus pro hoc caſu

$$a = 22805,180 : b = 784,819$$
$$\alpha = -597,757 : \beta = -20,623$$

vnde iam in poſtremo calculo deduximus $f = 22818,74$ et angulum $\vartheta = 1^\circ.\ 58'.\ 16''$. Porro vero reperimus

$$h = a\beta - b\alpha = -1180,33, \text{ ideoque } lh = (-)3,0720034$$

et $lhh = 6,1440068$. Porro $\zeta\zeta = \alpha\alpha + \beta\beta = 357738,64$ et $\frac{\Delta}{f} = 179308,45$, vnde fit $F = \frac{2\Delta}{f} - \zeta\zeta = 878,26$

 hinc-

hincque fit $\frac{\Delta}{F} = 4658750,00$. Praeterea vero

$$c = \frac{bb}{\Delta} = 0,0003405 \text{ et } e = +\sqrt{(1 - \frac{Fbb}{\Delta\Delta})} = 1$$

tam parum enim ab vnitate diſcrepat, vt error vltra decimam figuram fractionis decimalis demum occurrat. Denique fiet

$$\text{coſ. } \eta = \frac{f - c}{ef} = 1 \text{ ideoque } \eta = 0.$$

§. 55. Hinc igitur patet, poſt actionem mutuam orbitae cometae ſemiaxem transuerſum fore

$$\frac{\Delta}{F} = 4658750$$

cum ante fuiſſet infinitus. Sicque cometa nunc habebit tempus periodicum, quod reperietur diuidendo iſtum ſemiaxem transuerſum per 24000 vnde prodit 194; quocirca periodus cometae erit $= 194\sqrt{194}$ annis $= 2716$. Deinde cum ſit ſemiparameter $c = 0,0003405$ patet, hanc orbitam a linea recta vix diſcrepare, id quod etiam inde intelligitur quod ſit excentricitas $e = 1$. Denique cum prodierit $\eta = 0$ linea abſidum cometae inclinabitur ad directionem fixam S ♈ ſub angulo $\vartheta = 1^\circ. 58'. 17''$ prorſus vt ante actionem mutuam. Secundum hypotheſin autem quam fecimus hic cometa recta in Solem ſe eſſet immerſurus rediturus igitur nunquam inde foret. Hoc igitur modo omnia ſunt expedita quae ſuper caſu propoſito deſiderarii poſſunt. Hinc igitur manifeſtum eſt id quod iam ſupra innuimus, ambos effectus actionis mutuae cum in acceſſu tum in receſſu ortos ſe mutuo fere penitus deſtruere.

DE

# DE DIFFERENTIA INTER PARALLELVM LVNAE VERVM ET APPARENTEM.

Auctore

*AND. IOH. LEXELL.*

§. 1.

Ad determinandam differentiam aſcenſionum rectarum pro duobus aſtris extra meridianum, Aſtronomi ita procedere conſueuerunt, vt duorum filorum micrometri vel reticuli Tubo cuidam applicati, normaliter ſe decuſſantium, vnum verſus Polum aequatoris dirigant, alterum vero ita conſtituant, vt ab aſtro praecedente deſcribi videatur; tum enim ſi ad pendulum notentur momenta, quibus haec aſtra ad filum quod Polum reſpicit, adpellunt, et interuallum temporis quod haec momenta intercedit, in angulum horarium debite conuertatur, inuenietur differentia aſcenſionum rectarum pro binis aſtris. Verum enimuero in hac procedendi Methodo ſupponitur, quod aſtrum praecedens, motu ſuo circulum parallelum circa Polum aequatoris deſcribere videatur, quod quidem perfecte locum habere nequit, niſi huius aſtri eadem maneat declinatio, tumque hoc aſtrum Parallaxi et refractione pla-

 ne

ne nihil adficiatur. Dum igitur comparatio inſtituitur Lunae cum aliqua ſtella fixa et Luna ſtellam praecedit, ſi filum micrometri ita diſponatur, vt Luna alterutro ſuo limbo hoc filum radere videatur; tenendum eſt directionem hanc fili reſpici debere vt tangentem lineae quam Luna motu ſuo diurno deſcribere videtur, neque tamen hanc lineam eſſe parallelam illi quae circulum parallelum a ſtella deſcriptum tangit. Hinc autem etiam fit, vt filum parallelo apparenti Lunae normale non ad ipſum Polum dirigatur, ſeu quod idem eſt non tangat circulum declinationis per punctum quo bina fila Micrometri ſe decuſſant, ductum; quam ob cauſſam appulſui ſtellae ad filum hoc verticale aliqua adplicanda eſt correctio, vt habeatur momentum quo ſtella in eodem circulo horario erat ac centrum Lunae pro certo momento adnotato. Quum autem motus apparens Lunae ob tres diuerſas adficiatur cauſſas, variabilitatem nimirum Parallaxis, declinationis et refractionis, de ſingulis ſeorſim agamus, vbi quidem a Parallaxi initium ducendum eſſe videtur, tum quia eius effectus maxime notabilis eſſe ſolet, cum quod ſatis concinne et eleganter exprimi poſſit.

2. Ad differentiam inter parallelum Lunae verum et adparentem, inter Aſtronomos primus animum aduertit Celeb. *Mayerus*, qui in ſuis Diſſertationibus Coſmographicis formulam tradidit, pro angulo, quem linea motu apparenti diurno Lunae deſcripta facit cum circulo minori, cuius diſtantia a Polo aequatoris aequalis eſt declinationi Lunae apparen-

parenti pro tempore obſeruationis. Quum vero *Mayerus* in ſatis perplexam et diffuſam huius formulae demonſtrationem incidiſſet, eandem penitus ſupprimendam eſſe ratus eſt; hinc autem factum eſt vt Cel. *de la Lande*, dum in ſua Aſtronomia Tom. III. §. 2539. huius formulae mentionem facit, eandem vitii et erroris cuiusdam ſuſpicetur et in eius locum aliam ſubſtituat, quae ipſi exacta videbatur. Atqui re bene penſitata facile perſpicitur, formulam *Mayeri* ſi non rigore Geometrico veram eſſe, ſaltem quam proxime ad veritatem accedere, cum contra formula Cel. *de la Lande* toto coelo a veritate aberret. Licet autem iam alii quoque vindicias formulae *Mayerianae* ſuſceperint, tamen et quae mihi hac de re ſe obtulerunt meditationes, communicare conſtitui; imprimis quum explicationem huius quaeſtionis ita perficiam, vt nihil omnino quod ad ſummum pertinet rigorem, deſideretur.

3. Dum motum Lunae apparentem ob mutabilitatem Parallaxeos contemplaturi erimus, conuenit vt animum primo abſtrahamus a varabilitate declinationis et effectu, quem refractio in Lunam exſerit, ſupponamus nimirum Lunam declinatione vera quam certo tempore habet, circulum parallelum deſcribere circa Polum aequatoris et inueſtigabimus, quamnam directionem Luna ob parallaxin qua afficitur, motu ſuo apparente ſequi videatur, declinatione vera Lunae pro inuariabili ſpectata et effectu refractionis plane neglecto. Sit igitur P Z meridianus loci in T. XXIV. quo obſeruatio inſtituta eſt, P polus aequatoris, Z Fig. 5. punctum

punctum meridiani, quod cum centro telluris et loco obſeruatoris in directum iacet, certo autem momento obſeruato, ſit L locus centri Lunae verus et M locus eius apparens ob parallaxin, vbi puncta M, L inuenientur ſita ſuper circulo maximo per Z tranſeunte; tum vero minimo temporis interuallo elapſo, ſit *l* locus Lunae verus et *m* locus apparens, ductis igitur arcubus circulorum maximorum P L, P M, P *l*, P *m* et M *m*, liquet id nobis propoſitum eſſe, vt quantitas anguli P M *m* inveſtigetur; facile enim patet filum Micrometri, quod a limbo Lunae raderetur, ſi Lunae declinatio inuariabilis foret et effectus refractionis in cenſum non veniret, eſſe tangentem arcus M *m*, ideoque hoc filum cum circulo declinationis apparente P M conſtituere angulum $=$ P M *m*.

4. In genere autem ſi in triangulo Sphaerico M P *m*, data ſupponuntur latera P M, P *m* cum angulo intercepto M P *m*, conſtat eſſe

$$\cot. PMm = \frac{\cos. Pm \,\sin. PM - \sin. Pm \,\cos. PM \,\cos. MPm}{\sin. Pm \,\sin. MPm}$$

quare ſi angulus M P *m* ſupponatur euaneſcens, ita vt eius Coſinus fiat $= 1$ et pro ſinu ſcribere liceat ipſum hunc angulum, praetereaque differentia arcuum P M et P *m* ſit euaneſcens, transmutabitur noſtra formula pro cot. P M *m* in hanc ſequentem:

$$\cot. PMm = \frac{\sin.(PM - Pm)}{\sin. Pm \,\sin. MPm},$$ ſiue in iſtam

$$\cot. PMm = \frac{PM - Pm}{MPm \,\sin. PM},$$

tenendum autem eſt, hanc formulam eſſe exacte veram,

ram, eamque ex principiis calculi differentialis omnino rigoroſe demonſtrari poſſe, quod tamen a noſtro praeſenti inſtituto alienum eſt. Facilitatis autem gratia in triangulis Z P L, Z P M deſignemus P Z, P L, P M, Z L, Z M reſpectiue per litteras $b$, $a$, $a'$, $c$, $c'$, tumque angulos Z P L, Z P M, Z L P, Z M P exprimamus litteris A, A′, C, C′, quo notato fiet

$$\text{cot. } P\,M\,m = \frac{d\,a'}{d\,A'\,\text{ſin.}\,a'}.$$

5. Vt formulae pro cot. P M $m$ propoſitae euolutio rite inſtitui queat, ex doctrina parallaxium quaedam ad hoc negotium ſpectantia praemittenda erunt. Parallaxi igitur Lunae horizontali aequatorea per $\pi$ expreſſa, denotet $\varepsilon$ rationem diametri telluris pro loco ſpectatoris ad diametrum aequatoris, eritque vt conſtat ſin. M L $= \varepsilon$ ſin. $\pi$ ſin. M Z. Quare quum habeatur

$$\text{ſin. } M\,L = \frac{\text{ſin. } P\,L\,\text{ſin. } M\,P\,L}{\text{ſin. } P\,M\,Z}, \text{ fiet}$$

$\varepsilon$ ſin. $\pi$ ſin. M Z ſin. P M Z $=$ ſin. P L ſin. M P L, et quia eſt ſin. M Z ſin. P M Z $=$ ſin. P Z ſin. Z P M, conſequemur $\varepsilon$ ſin. $\pi$ ſin. P Z ſin Z P M $=$ ſin. P L ſin. M P L, ſeu introductis ſymbolis

(I.) $\varepsilon\,\text{ſin.}\,\pi\,\text{ſin.}\,b\,\text{ſin.}\,A' = \text{ſin.}\,a\,\text{ſin}\,(A'-A)$, hinc ob

$$A' = A' - A + A$$

$$\varepsilon\,\text{ſin.}\,\pi\,\text{ſin.}\,b\,(\text{ſin.}\,(A'-A)\,\text{coſ.}\,A + \text{coſ.}\,(A'-A)\,\text{ſin.}\,A) = \text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,(A'-A)$$

vnde deducitur

(II.) $$\text{Tang.}\,(A'-A) = \frac{\varepsilon\,\text{ſin.}\,\pi\,\text{ſin.}\,b\,\text{ſin.}\,A}{\text{ſin.}\,a - \varepsilon\,\text{ſin.}\,\pi\,\text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,A}.$$

 Porro

Porro ex triangulis Z P L, Z P M habemus:

$$\cot. PZL = \frac{\sin. PZ \cos. PL - \cos. PZ \sin. PL \cos. ZPL}{\sin. PL \sin. ZPL}$$
$$= \frac{\sin. PZ \cos. PM - \cos. PZ \sin. PM \cos. ZPM}{\sin. PM \sin. ZPM}$$

quibus valoribus aequatis fiet:

$$\cot. PZ \sin. (ZPM - ZPL) + \cot. PM \sin. ZPL$$
$$= \cot. PL \sin. ZPM, \text{ ſeu}$$

$\cot. b \sin. (A' - A) = \cot. a \sin. A' - \cot. a' \sin. A$, hincque

$$\cot. a' = \cot. a \frac{\sin. A'}{\sin. A} - \cot. b' \frac{\sin. (A' - A)}{\sin. A},$$

eſt vero per formul. (I.)

$$\sin (A' - A) = \varepsilon \sin. \pi \frac{\sin. b \sin. A'}{\sin. a},$$

quare facta ſubſtitutione prodit

$$\cot. a' = \frac{\sin. A'}{\sin. A} \left(\cot. a - \frac{\varepsilon \sin. \pi \cos. b}{\sin. a}\right), \text{ ſiue}$$
$$\cot. a' = \cot. a \frac{\sin. A'}{\sin. A} \left(1 - \frac{\varepsilon \sin. \pi \cos. b}{\cos. a}\right) \text{ (III.)}.$$

6. Si pro formula hac tertia differentialia vtrinque ſumantur conſequemur:

$$- \frac{d a'}{\sin. a'^2} = \cot. a \left(1 - \frac{\varepsilon \sin. \pi \cos. b}{\cos. a}\right) \left(\frac{d A' \cos. A'}{\sin. A} - \frac{d A \sin. A' \cos. A}{\sin. A^2}\right)$$

tumque ob

$$\cot. a \left(1 - \frac{\varepsilon \sin. \pi \cos. b}{\cos. a}\right) \frac{\sin. a'}{\sin. A} = \frac{\cos. a'}{\sin. A'} \text{ fiet}$$
$$- \frac{d a'}{\sin. a'} = \cos. a' \left(\frac{d A' \cos. A'}{\sin. A'} - \frac{d A . \cos. A}{\sin. A}\right); \text{ vnde prodit}$$
$$\frac{d a'}{d A' \sin. a'} = \cos. a' \left(\frac{d A}{d A'} \cot. A - \cot. A'\right).$$

Atqui per formul. (I.) habemus:

$$(d A' - d A) \cos. (A' - A) = d A' . \frac{\varepsilon \sin. \pi \sin. b \cos. A'}{\sin. a}, \text{ hincque}$$
$$d A' - d A = d A' \,\text{Tang.}\, (A' - A) \cot. A', \text{ et}$$
$$\frac{d A}{d A'} = 1 - \text{Tang.}\, (A' - A) \cot. A', \text{ nec non}$$

$\frac{d A}{d A'}$

$\frac{dA}{dA'}$ cot. A - cot. A' = cot A - Tang. (A' - A) cot. A cot. A' - cot. A',

quae expreſſio manifeſto aequalis eſt ipſi Tang. (A' - A), eſt enim

$$\text{Tang.}(A' - A)(1 + \cot. A \cot. A') = \cot. A - \cot. A'.$$

Conſequemur itaque

$$\frac{d\,a'}{d\,A' \text{ſin.}\, a'} = \text{Tang.}\,(A' - A)\,\text{coſ.}\, a', \text{ ideoque}$$

$$\cot.\, P\,M\,m = \text{Tang.}\,(A' - A)\,\text{coſ.}\, a',$$

quae formula hanc regulam valde concinnam ſuppeditat, quod ſit Cotangens anguli quaeſiti, aequalis Tangenti parallaxeos aſcenſionis rectae pro Luna, ductae in Sinum declinationis apparentis; eſt autem haec expreſſio rigore etiam Geometrico vera. Si pro Tang. (A' - A) introducatur eius valor formula (II.) allatus habebimus, deſignato breuitatis gratia angulo $90^\circ - P\,M\,m$ per $\psi$;

$$\text{Tang.}\,\psi = \frac{\varepsilon\, \text{ſin.}\,\pi\, \text{ſin.}\, b.\, \text{ſin.}\, A\, \text{coſ.}\, a'}{\text{ſin.}\, a - \varepsilon\, \text{ſin.}\,\pi\, \text{ſin.}\, b.\, \text{coſ.}\, A}.$$

In qua formula, quum denominatoris poſterius membrum prae priori eſſe ſoleat valde paruum, ſi illud plane negligatur, adproximando fiet

$$\text{Tang.}\,\psi = \frac{\varepsilon\, \text{ſin.}\,\pi\, \text{ſin.}\, b.\, \text{ſin.}\, A\, \text{coſ.}\, a'}{\text{ſin.}\, a},$$

ſiue etiam ſi placet

$$\text{Tang.}\,\psi = \varepsilon\, \text{ſin.}\,\pi\, \text{ſin.}\, b.\, \text{ſin}\, A \cot.\, a',$$

vel etiam ob angulum $\psi$ valde paruum

$$\psi = \varepsilon\,\pi\, \text{ſin.}\, b.\, \text{ſin.}\, A \cot.\, a,$$

quae formula eſt illa ipſa quam pro hoc inſtituto Celeb. *Mayerus* exhibuit. Si tamen ſcrupuloſius ad-

 proxi-

proximationem quis inſtitutere velit, quod quidem in praxi valde ſuperfluum eſſet, ſtatuere debebit

$$\text{Tang.}\,\psi = \varepsilon\,\text{ſin.}\,\pi\,\text{ſin}\,b.\,\text{ſin.}\,A\,\frac{\text{coſ.}\,a'}{\text{ſin.}\,a}\left(1 + \frac{\varepsilon\,\text{ſin.}\,\pi\,\text{ſin.}\,b.\,\text{coſ.}\,A}{\text{ſin.}\,a}\right)$$

et quum proxime ſit

$$\text{coſ.}\,a' = \text{coſ.}\,a - \varepsilon\,\text{ſin.}\,\pi\,\text{ſin.}\,a\,(\text{coſ.}\,b\,\text{ſin.}\,a - \text{coſ.}\,a\,\text{ſin.}\,b.\,\text{coſ.}\,A)$$

prodibit:

$$\text{Tang.}\,\psi = \varepsilon\,\text{ſin.}\,\pi\,\text{ſin.}\,b.\,\text{ſin.}\,A\,\text{cot.}\,a\,\Big(1 - \varepsilon\,\text{ſin.}\,\pi\Big(\text{coſ.}\,b\,\frac{\text{ſin.}\,a^2}{\text{coſ.}\,a} - \Big(\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,b + \frac{\text{ſin.}\,b}{\text{ſin.}\,a}\Big)\,\text{coſ.}\,A\Big)\Big)$$

eſt tamen haec formula magis perplexa, quam vt commode eius vſus adhiberi queat. Interim tamen eadem aliqua attentione digna eſt, quia valorem Tang. $\psi$ exhibet pro caſu quo declinatio Lunae ſupponitur $= 0$, ſeu $a = 90$, tum enim fiet ex formula hac

$$\text{Tang.}\,\psi = -\varepsilon^2\,\text{ſin.}\,\pi^2\,\text{ſin.}\,b.\,\text{coſ.}\,b.\,\text{ſin.}\,A = -\frac{\varepsilon^2\,\text{ſin.}\,\pi^2}{2}\,\text{ſin.}\,2\,b\,\text{ſin.}\,A.$$

7. Quoniam angulus $A' - A$ pro Luna vix vnquam 60 minuta prima ſuperare poterit, ideoque tanto magis angulus $\psi$ infra 60 minuta ſubſiſtat, arcus angulo $\psi$ reſpondens ipſius Sinui vel tangenti poni poteſt aequalis; facile patet ſi in triangulis Z P L, Z P M praeter P Z cognitus ſupponatur, alteruter arcuum P L et P M, cum alterutro angulorum Z P L, Z P M, pro angulo $\psi$ ſequentem formulam ſemper proxime veram eſſe

$$\psi = \varepsilon\,\pi\,\text{ſin.}\,b.\,\text{ſin.}\,A\,\text{cot.}\,a,$$

vbi quidem pro A ſcribere licebit $A'$ et pro $a$, $a'$. Porro quia eſt

Tang.

Tang. $\psi =$ Tang. $(A' - A)$ coſ. $a' =$ Tang. MPL coſ. PM, ſi pro Tang. M P L adhibeatur ſin. M P L, tumque perpendatur eſſe

ſin. M P L : ſin. M L :: ſin. P L Z : ſin. P M,

fiet proxime

$\psi =$ ML ſin. PLZ cot. PM, eſt vero ML $= \varepsilon \pi$ ſin. ZM, quare obtinebimus

$\psi = \varepsilon \pi$ ſin. M Z ſin. P L Z cot. P M,

ſiue introductis ſymbolis

$\psi = \varepsilon \pi$ ſin. $c'$ ſin. C cot. $a'$,

in qua formula etiam ſine vllo errore ſenſibili loco C adhiberi poterit C', quin etiam loco ipſorum $c'$ $a'$, in vſum vocari poſſunt $c$ et $a$. Vltima haec formula inſeruit determinando angulo $\psi$, quando altitudo Lunae vel apparens vel vera, et angulus eius parallacticus ſiue apparens, ſeu verus pro cognitis habentur.

8. Si productus concipiatur arcus P L vsque dum arcui circuli maximi, qui parallelum Lunae apparentem in M tangit, occurrat in $m$, liquet ex praecedentibus eſſe T. XXIV. Fig. 6.

cot. P M $m$ cot. M P $m =$ coſ. P M,

quam ob cauſſam erit omnino angulus P$m$M $= 90°$, ſiue arcus P$m$ ad M$m$ erit normalis. Quum itaque ſit

ſin. $\psi =$ coſ. P M $m =$ ſin. M P $m$ coſ. P $m$, fiet

ſin. $\psi =$ ſin. $(A' - A)$ coſ. $a'$

 proxi-

proxime, quum P $m$ a P M vix ſenſibiliter diffe-rat; interim ſi valorem ipſius ſin ψ adhuc accuratius expreſſum quis deſideret, perpendet eſſe

$$\text{coſ. P}\, m = \frac{\text{coſ. P M}}{\text{coſ. M}\, m} = \text{coſ. P M}\left(1 + \frac{\text{ſin. M}\, m^2}{2}\right)$$

proxime, eſt vero

$$\text{ſin. M}\, m^2 = \text{ſin. P M}^2\, \text{ſin. M P}\, m^2 \text{, ideoque prodibit:}$$

$$\text{ſin.}\, \psi = \text{ſin.}\, (A' - A)\, \text{coſ.}\, a' \left(1 + \tfrac{1}{2}\, \text{ſin.}\, a'^2\, \text{ſin.}\, (A' - A)^2\right)$$

quae formula ne in decimis quidem partibus ſcrupuli ſecundi a vero aberrare poterit. Denique ex conſideratione trianguli Sphaerici rectanguli L $m$ M, elicitur

$$\text{Tang. L M}\, m = \frac{\text{cot. M L}\, m}{\text{coſ. M L}} \text{, quum itaque ſit}$$

$$\frac{1}{\text{coſ. L M}} = \sqrt{(1 + \text{Tang. M L}^2)} = 1 + \tfrac{1}{2}\, \text{Tang. M L}^2,$$

quando M L eſt arcus valde paruus, fiet

$$\text{Tang. L M}\, m = \text{cot. P L Z}\, (1 + \tfrac{1}{2}\, \text{Tang. M L}^2)$$

proxime, ex quo ſequens habetur formula

$$\text{Tang. L M}\, m = \text{cot. C}\, (1 + \tfrac{1}{2}\, \varepsilon^2\, \text{ſin.}\, \pi^2\, \text{ſin.}\, c^2)$$

cuius ope ex data diſtantia vera Lunae a puncto Z, cum angulo parallactico C facile elicitur angulus L M $m$, cuius ope porro inuenietur angulus ψ, at commodius tamen idem negotium perfici videtur, per formulam in §. ſuperiori traditam.

9. Formulae in ſuperioribus allatae abunde quidem ſufficiunt pro vſu Aſtronomico ad exhibendum valorem anguli ψ, at tamen operae pretium erit, paulo altius hanc inueſtigationem repetere; ita vt in indolem lineae curuae, quam Luna parallaxi

adfecta,

adfecta, motu diurno deſcribere videtur, inquiramus, vbi tamen ſuppoſituri erimus declinationem veram Lunae conſtantem. Iſta autem inueſtigatio eo magis curioſa videtur, quod non ſolum haec linea curva admodum facile conſtrui queat, ſed etiam vix tantillum diſcrepet a circulo quodam minori, qui certo quodam puncto meridiani pro Polo aſſumto deſcribitur. Ante omnia igitur in id erimus intenti, vt aequationem quandam pro hac curua exhibeamus, quae aequatio commodiſſime adornari poteſt, ſi adhibeatur ad exprimendam relationem inter quantitates variabiles angulum Z P M et arcum P M, tumque quantitates conſtantes, arcus Z P, P L et $\varepsilon$ ſin. $\pi$. Ex formula autem (I.) § 5. ſequitur eſſe

$$\text{ſin. } A' \text{ coſ. } A = \frac{\varepsilon \text{ ſin. } \pi \text{ ſin. } b. \text{ ſin. } A'}{\text{ſin. } a} + \text{ſin. } A \text{ coſ. } A',$$

vnde ſi breuitatis gratia ſtatuatur

$$\frac{\varepsilon \text{ ſin. } \pi \text{ ſin. } b}{\text{ſin. } a} = \lambda, \text{ fiet ſin. } A'^2 \text{ coſ. } A^2 = \lambda^2 \text{ ſin. } A'^2$$
$$+ 2\lambda \text{ ſin. } A \text{ ſin. } A' \text{ coſ. } A' + \text{ſin. } A^2 \text{ coſ. } A'^2, \text{ hincque}$$
$$\text{ſin. } A'^2 = \lambda^2 \text{ ſin. } A'^2 + 2\lambda \text{ ſin. } A \text{ ſin. } A' \text{ coſ. } A' + \text{ſin. } A^2,$$

nec non

$$1 = \lambda^2 + 2\lambda \frac{\text{ſin. } A}{\text{ſin. } A'} \text{ coſ. } A' + \frac{\text{ſin. } A^2}{\text{ſin. } A'^2}.$$

Deinde quum ſit per formul. (III.) § 5.

$$\text{cot. } a' = \frac{\text{ſin. } A'}{\text{ſin. } A} \left(\frac{\text{coſ. } a - \varepsilon \text{ ſin. } \pi \text{ coſ. } b}{\text{ſin. } a}\right) \text{ poſito } \frac{\text{coſ. } a - \varepsilon \text{ ſin. } \pi \text{ coſ. } b}{\text{ſin. } a} = \mu$$

erit $\frac{\text{ſin. } A}{\text{ſin. } A'} = \mu$ Tang. $a'$, introducto igitur pro $\frac{\text{ſin. } A}{\text{ſin. } A'}$ hoc valore; obtinebimus

$$1 = \lambda^2 + 2\lambda\mu \text{ coſ. } A' \text{ Tang. } a' + \mu^2 \text{ Tang. } a'^2,$$

qua

qua aequatione relatio inter quantitates noſtras variabiles angulum $A'$ et arcum $a'$ definitur, vnde haec aequatio naturam curuae a Luna deſcribendae exprimere cenſenda eſt. Caeterum loco anguli Z P M et arcus P M, quaeri poſſet relatio inter alias partes trianguli Z P M, vti angulum P Z L et arcum Z M, vel binos arcus Z M, P M, cuiusmodi tamen aequationibus recenſendis, nihil eſt vt heic immoremur.

10. Si ex aequatione pro curua noſtra, eius conſtructionem quisquam deducere vellet, eadem
T. XXIV. Fig. 7. omnino parum elegans emergeret, quae tamen aliunde admodum concinna deducitur. Quum enim ſit

$$\text{ſin. } LM = \varepsilon \text{ ſin. } \pi \text{ ſin. } ZM \text{, erit}$$

$$\text{ſin. } ZM - \text{ſin. } LM : \text{ſin. } ZM + \text{ſin. } LM :: 1 - \varepsilon \text{ ſin. } \pi : 1 + \varepsilon \text{ ſin. } \pi \text{, ſeu}$$
$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}(ZM - LM) : \text{Tang. } \tfrac{1}{2}(ZM + LM) :: 1 - \varepsilon \text{ ſin. } \pi : 1 + \varepsilon \text{ ſin. } \pi.$$

Concipiamus nunc productum eſſe arcum Z M in $l$, vt ſit $Ml = ML$, et Polo P interuallo P L deſcribi circulum minorem A L B, fiet omnino

$$ZM - LM = ZL \text{ et } ZM + LM = ZM + Ml = Zl,$$

ex quo erit

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} ZL : \text{Tang. } \tfrac{1}{2} Zl = 1 - \varepsilon \text{ ſin. } \pi : 1 + \varepsilon \text{ ſin. } \pi$$

ſeu in ratione conſtanti. Similiter ſi arcus L Z ad alteram partem meridiani productus concipiatur vsque dum circulo minori A L B in Λ occurrit ſitque Λ μ effectus parallaxeos, eiusque duplum Λ λ; demonſtrabitur eſſe

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2} Z\Lambda : \text{Tang. } \tfrac{1}{2} Z\lambda :: 1 - \varepsilon \text{ ſin. } \pi : 1 + \varepsilon \text{ ſin. } \pi,$$

quare

quare erit quoque

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}ZL.\text{Tang.}\tfrac{1}{2}Z\Lambda : \text{Tang.}\tfrac{1}{2}Zl.\text{Tang.}\tfrac{1}{2}Z\lambda$$

in ratione conſtanti. Atqui eſt productum

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}ZL\,\text{Tang.}\tfrac{1}{2}Z\Lambda$$

conſtans, quippe quod aequatur

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}AZ.\text{Tang.}\tfrac{1}{2}BZ,$$

cuius propoſitionis veritatem tamquam aliunde cognitam heic praeſupponere licebit; erit igitur quoque productum

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}Zl.\,\text{Tang.}\tfrac{1}{2}Z\lambda$$

conſtans, ex quo omnino inferri poteſt omnia puncta $l$ reperiri in circulo minori $alb$, cuius polus incidit in meridianum A Z P. Ipſe autem hic circulus minor facile deſcribetur, dum in ipſo meridiano definiuntur parallaxes $A\alpha$, $B\beta$, earumque duplis $Aa$, $Bb$ ſumtis, biſecetur arcus $aPb$ in $p$, polo enim $p$ et interuallo $pa = pb$ deſcribendus eſt ille circulus $alb$. Caeterum infra quoque oſtendemus, quo modo per calculum exhiberi queant tangentes arcuum $Pp$ et $pa$, quibus cognitis deſcriptio circuli $alb$ eſt in poteſtate. Deſcriptis vero circulis minoribus A L B, $alb$, quodcunque punctum M curuae $\alpha M\beta$ facile determinatur, ducto enim circulo $ZLl$ ſi arcus interceptus $Ll$ biſecetur in M, erit hoc punctum M ad curuam quaeſitam $\alpha M\beta$. In noſtra figura arcum $Z\Lambda\lambda$ non quidem expresſimus, quum tamen ipſa res conceptu ſit facillima, vnusquisque hunc arcum nullo negotio, imaginatione ſibi repraeſentare poterit.

 II.

11. Quamuis ſupra quidem ſatis fuſe oſtenderimus, quomodo ducenda ſit tangens lineae noſtrae curuae $\alpha$ M $\beta$, quippe quum haec imprimis res ad quaeſtionem noſtram Aſtronomicam pertinebat; haud tamen praeter rem erit exponere, quomodo haec tangentis inuentio ex ipſa aequatione fundamentali pro linea noſtra curua, deducatur. Pro tangente igitur curuae $\alpha$ M $\beta$ ad punctum M inueſtigando, quaeri debet huius expreſſionis $\frac{d\,a'}{d\,A'\,ſin.\,a'}$ valor, quippe quum haec quantitas aequalis ſit cotangenti anguli, quem Tangens curuae ad punctum M cum arcu P M facit, vel etiam ſi per M ductus concipiatur arcus circuli maximi M N normalis ipſi P M in M et arcus M $m$, qui curuam tangit erit

T. XXIV. Fig. 6.

$$\text{Tangens N M } m = \text{Tang. } \psi = \frac{d\,a'}{d\,A'\,ſin.\,a'}.$$

Ex aequatione autem noſtra

$$1 = \lambda^2 + 2\lambda\mu\,\text{Tang.}\,a'\,\text{coſ.}\,A' + \mu^2\,\text{Tang.}\,a'^2 \text{ elicitur}$$

$$\frac{d\,a'}{d\,A'\,ſin.\,a'} = \frac{\lambda\,ſin.\,A'\,coſ.\,a'}{\mu\,Tang.\,a' + \lambda\,coſ.\,A'},$$

de qua expreſſione iam facile oſtendi poteſt, eam cum formula noſtra in ſuperioribus tradita plane conuenire; ſcilicet id agitur vt demonſtremus eſſe

$$\text{Tang.}\,(A' - A) = \frac{\lambda\,ſin.\,A'}{\mu\,Tang.\,a' + \lambda\,coſ.\,A'}; \text{ quum vero ſit}$$

$$\mu\,\text{Tang.}\,a' = \frac{ſin.\,A}{ſin.\,A'}$$

erit

$$\frac{\lambda\,ſin.\,A'}{\mu\,Tang.\,a' + \lambda\,coſ.\,A'} = \frac{\lambda\,ſin.\,A'^2}{ſin.\,A + \lambda\,ſin.\,A'\,coſ.\,A'} = \frac{\lambda}{ſin.\,A\,(1 + cot.\,A'^2) + \lambda\,cot.\,A'}.$$

Atqui eſt

$$\text{Tang.}\,A' = \frac{ſin.\,A}{coſ.\,A - \lambda}, \text{ hinc cot.}\,A' = \frac{coſ.\,A - \lambda}{ſin.\,A} \text{ et}$$

$$1 + \text{cot.}\,A'^2 = \frac{1 - 2\lambda\,coſ.\,A + \lambda^2}{ſin.\,A^2}, \qquad \text{vnde}$$

vnde obtinetur

$$\frac{\lambda\, ſin.\, A'}{\mu\, Tang.\, a' + \lambda\, coſ.\, A'} = \frac{\lambda\, ſin.\, A}{1 - \lambda\, coſ.\, A}$$

eſt vero vti ſupra demonſtrauimus §. 5.

$$\text{Tang.}\,(A' - A) = \frac{\lambda\, ſin.\, A}{1 - \lambda\, coſ.\, A},$$

vnde liquet propoſitum, ſeu quod ſit

$$\frac{d\,a'}{d\,A'\, ſin.\, a'} = \text{Tang.}\,\psi = \text{Tang.}\,(A' - A)\, coſ.\, a'.$$

Si euaneſcat angulus Z P L, quo caſu etiam euaneſcit angulus Z P M ſeu fit ſin. $A' = 0$, expreſſio noſtra $\frac{d\,a'}{d\,A'\, ſin.\, a'}$ quoque euaneſcet, ſeu curua $\alpha$ M $\beta$ in punctis $\alpha$, $\beta$ ad Meridianum erit normalis.

12. Si quaeratur valor anguli Z P L, pro quo angulus N M $m$ euadat maximus, ad hanc quaeſtionem ſoluendam, ſequenti modo procedere licet. Quum eſſe debeat Tang. $(A' - A)$ coſ. $a'$ maximum, differentiando elicietur;

$$\frac{d\,A' - d\,A}{coſ.\,(A' - A)} = d\,a'\ \text{Tang.}\ a'\ ſin.\ (A' - A),$$

at ſupra §. 6. vidimus eſſe

$$d\,a' = d\,A'\ ſin.\ a'\ coſ.\ a'\ \text{Tang.}\ (A' - A),$$

facta itaque ſubſtitutione fiet

$$d\,A' - d\,A = d\,A'\ ſin.\ a'^2\ ſin.\ (A' - A)^2,\ \text{hinc}$$

$$1 - \frac{d\,A}{d\,A'} = ſin.\ a'^2\ ſin.\,(A' - A)^2 = \text{Tang.}\,(A' - A)\ cot.\,A',$$

itidem per §. 6. Hinc deducimus

$$1 + cot.\ a'^2 = \text{Tang.}\ A'\ ſin.\,(A' - A)\, coſ.\,(A' - A)\ \text{et ob}$$

$$cot.\ a' = \frac{\mu\, ſin.\, A'}{ſin.\, A},\ \frac{1}{ſin.\, A'^2} + \frac{\mu^2}{ſin.\, A^2} = \frac{ſin.\,(A' - A)\, coſ.\,(A' - A)}{ſin.\, A'\, coſ.\, A'};\ \text{ſiue}$$

$$1 + cot.\ A'^2 + \frac{\mu^2}{ſin.\, A^2} = \frac{ſin.\,(A' - A)\, coſ.\,(A' - A)}{ſin.\, A'\, coſ.\, A'}.$$

Quum igitur ſit

$$\text{coſ.}\,(A' - A) = \text{ſin.}\,(A' - A)\,\frac{(1 - \lambda\,\text{coſ.}\,A)}{\lambda\,\text{ſin.}\,A};$$

$$\text{coſ.}\,A' = \text{ſin.}\,A'\,\frac{(\text{coſ.}\,A - \lambda)}{\text{ſin.}\,A} \quad \text{et} \quad \text{ſin.}\,(A' - A) = \lambda\,\text{ſin.}\,A';$$

fiet per debitam reductionem

$$\frac{1 + \lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\,\text{coſ.}\,A}{\text{ſin.}\,A^2} = \frac{\lambda(1 - \lambda\,\text{coſ.}\,A)}{\text{coſ.}\,A - \lambda},$$

qua aequatione euoluta peruenitur ad aequationem tertii gradus ſequentem:

$$\text{coſ.}\,A^3 + \tfrac{1}{\lambda}\,\text{coſ.}\,A^2 - \frac{(1 + 4\lambda^2 + \mu^2)}{\lambda^2}\,\text{coſ.}\,A + \frac{2 + \lambda^2 + \mu^2}{\lambda} = 0,$$

cuius aequationis ſaltem vnam radicem realem eſſe oportet; valde autem probabile videtur non niſi vnicam radicem realem fore; verum vlterius examen huius aequationis calculos omnino requireret operoſiores, quam vt hic adferri mereantur. Interim tamen haud obſcure liquet angulum A proxime ad 90° accedere, ſeu eſſe valorem coſ. A quam minimum.

13. Si per puncta $\alpha$, $\beta$ deſcriptus concipiatur circulus minor, is quidem cum linea noſtra curua $\alpha\,M\,\beta$ proxime coincidet, nihilo tamen minus ex ipſa aequatione pro linea $\alpha\,M\,\beta$ intelligitur eandem a circulo minori differre, quod luculentius patebit, ſi quaeratur circulus minor qui cum curua noſtra, ad datum punctum M eandem habet curuaturam. Nam ſi arcus circuli maximi inter hunc circulum minorem et eius polum dicatur radius curuedinis pro noſtra curua, et in expreſſione huius arcus ſeu radii curuaturae ex indole noſtrae curuae deducenda, quantitates tantum conſtantes reperiantur, id indicio

erit,

erit, curuam noſtram reapſe eſſe circulum minorem; quod ſi vero valor huius radii curuaturae quantitates variabiles inuoluat, inde cognoſcetur curvam propoſitam cum circulo minori non prorſus conuenire. Heic autem tamquam ex doctrina calculi differentialis cognitam aſſumere licebit expreſſionem pro radio curuaturae curuae in ſuperficie ſphaerica deſcriptae; ſi ſcilicet hic radius curuaturae dicatur $r$, angulus vero $90° - PM\alpha$ indicetur per $\psi$, erit retentis reliquis denominationibus ſupra adhibitis:

$$\text{Tang.}\, r = \frac{d\,a' \,\text{ſin.}\, a'}{d\,(\text{coſ.}\,\psi\,\text{ſin.}\,a')} \text{ vel}$$

$$\text{cot.}\, r = \text{coſ.}\,\psi\,(\text{cot.}\,a' - \tfrac{d\psi}{d\,a'}\,\text{Tang.}\,\psi)$$

vbi ex §. 11. notare iuuat eſſe

$$\text{Tang.}\,\psi = \frac{\lambda\,\text{ſin.}\,A'\,\text{coſ.}\,a'}{\mu\,\text{Tang.}\,a' + \lambda\,\text{coſ.}\,A'} = \frac{d\,a'}{d\,A'\,\text{ſin.}\,a'}.$$

Hinc itaque elicitur:

$$\frac{1}{\text{coſ.}\,\psi^2} = 1 + \text{Tang.}\,\psi^2 = \frac{\mu^2\,\text{Tang.}\,a'^2 + 2\lambda\mu\,\text{Tang.}\,a'\,\text{coſ.}\,A' + \lambda^2\,\text{coſ.}\,A'^2 + \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{coſ.}\,a'^2}{(\mu\,\text{Tang.}\,a' + \lambda\,\text{coſ.}\,A')^2}$$

et quum ſit per aequationem noſtrae curuae

$$1 = \mu^2\,\text{Tang.}\,a'^2 + 2\,\lambda\,\mu\,\text{Tang.}\,a'\,\text{coſ.}\,A' + \lambda^2$$

expreſſio iſta in hanc abit

$$\frac{1}{\text{coſ.}\,\psi^2} = \frac{1 - \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2 + \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{coſ.}\,a'^2}{1 - \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2} = \frac{1 - \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{ſin.}\,a'^2}{1 - \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2},$$

ex quo colligitur

$$2\,L\,\text{coſ.}\,\psi = L(1 - \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2) - L(1 - \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{ſin.}\,a'^2),$$

hincque ſumtis differentialibus prodibit:

$$d\psi\,\text{Tang.}\,\psi = \frac{\lambda^2\,d\,A'\,\text{ſin.}\,A'\,\text{coſ.}\,A'}{1 - \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2} - \frac{\lambda^2\,d\,A'\,\text{ſin.}\,A'\,\text{coſ.}\,A'\,\text{ſin.}\,a'^2}{1 - \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{ſin.}\,a'^2} - \frac{\lambda^2\,d\,a'\,\text{ſin.}\,a'\,\text{coſ.}\,a'\,\text{ſin.}\,A'^2}{1 - \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{ſin.}\,a'^2}$$

ſiue

$$\frac{d\psi}{da'}\,\text{Tang.}\,\psi = \frac{\lambda^2\, dA'\,\text{ſin.}\,A'\,\text{coſ.}\,A'}{da'(1-\lambda^2\,\text{ſin.}\,A')(1-\lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{ſin.}\,a'^2)} - \frac{\lambda^2\,\text{ſin.}\,a'\,\text{coſ.}\,a'\,\text{ſin.}\,A'^2}{1-\lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{ſin.}\,a'^2}$$

$$= \frac{\lambda\,\text{coſ.}\,A'\,\text{coſ.}\,a'}{\text{ſin.}\,a'(1-\lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{ſin.}\,a'^2)(\mu\,\text{Tang.}\,a'+\lambda\,\text{coſ.}\,A')} - \frac{\lambda^2\,\text{ſin.}\,a'\,\text{coſ.}\,a'\,\text{ſin.}\,A'^2}{1-\lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{ſin.}\,a'^2}.$$

Tum vero fiet

$$\text{cot.}\,a' - \frac{d\psi}{da'}\,\text{Tang.}\,\psi = \text{cot.}\,a'\Big(1 + \frac{\lambda^2\,\text{ſin.}\,a'^2\,\text{ſin.}\,A'^2}{1-\lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{ſin.}\,a'^2}$$

$$- \frac{\lambda\,\text{coſ.}\,A'}{(1-\lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{ſin.}\,a'^2)(\mu\,\text{Tang.}\,a'+\lambda\,\text{coſ.}\,A')}\Big) = \frac{\mu}{(1-\lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{ſin.}\,a'^2)(\mu\,\text{Tang.}\,a'+\lambda\,\text{coſ.}\,A')},$$

denuoque

$$\text{cot.}\,r = \text{coſ.}\,\psi\,(\text{cot.}\,a' - \frac{d\psi}{da'}\,\text{Tang.}\,\psi)$$

$$= \frac{\mu}{(1-\lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{ſin.}\,a'^2)^{\frac{3}{2}}}\ \text{ob coſ.}\,\psi = \frac{\mu\,\text{Tang.}\,a' + \lambda\,\text{coſ.}\,A'}{\sqrt{(1-\lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{ſin.}\,a'^2)}}.$$

Euidens itaque eſt radium curuaturae pro noſtra curva non eſſe conſtantem, quippe quum ſit

$$\text{Tang.}\,r = \frac{(1-\lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{ſin.}\,a'^2)^{\frac{3}{2}}}{\mu};$$

at caſibus quo $\lambda$ eſt quantitas valde parua, aſſumi poteſt $\text{Tang.}\,r = \frac{1}{\mu}$ vel etiam exactius ſi placet

$$\text{Tang.}\,r = \frac{1}{\mu}(1 - \tfrac{3}{2}\lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{ſin.}\,a'^2).$$

Pro punctis vero $\alpha$, $\beta$ vbi curua meridianum ſecat, ob $\text{ſin.}\,A' = 0$ fiet

$$\text{Tang.}\,r = \frac{1}{\mu} = \frac{\text{ſin.}\,a}{\text{coſ.}\,a - \varepsilon\,\text{ſin.}\,\pi\,\text{coſ.}\,b}\ \text{ſeu cot.}\,r = \text{cot.}\,a\Big(1 - \frac{\varepsilon\,\text{ſin.}\,\pi\,\text{coſ.}\,b}{\text{coſ.}\,a}\Big)$$

pro vtroque igitur puncto $\alpha$, $\beta$ radius curuaturae eiusdem habetur magnitudinis, neque tamen ideo arcus $r$, dimidio ipſius $\alpha P \beta$ aequalis habetur, vti infra videbimus.

14.

14. Quoniam conſtructio curuae $\alpha M \beta$ ita perficitur, vt ducto per Z quocunque arcu circuli maximi, qui circulos minores A L B, *a l b* in L et *l* interſecat, arcus interceptus L *l* biſecetur in puncto M, quod continuo reperietur in curua $\alpha M \beta$; iam omnino operae pretium erit inueſtigare, tum polum *p* circuli minoris *a l b* ſiue quantitatem arcus P*p*, cum etiam arcum *p a* ſeu diſtantiam poli *p* a circulo minori *a l b*. Eſt vero ex proprietatibus parallaxeos: T. XXIV. Fig. 7.

$$\text{Tang. } A\alpha = \frac{\varepsilon\,\text{ſin.}\,\pi\,\text{ſin.}\,ZA}{1 - \varepsilon\,\text{ſin.}\,\pi\,\text{coſ.}\,ZA} \text{ et Tang. } B\beta = \frac{\varepsilon\,\text{ſin.}\,\pi\,\text{ſin.}\,ZB}{1 - \varepsilon\,\text{ſin.}\,\pi\,\text{coſ.}\,ZB},$$

vbi breuitatis gratia pro $\varepsilon$ ſin. $\pi$ ſcribamus $\gamma$, et quum ſit

$$pa = PA + Pp + Aa \text{ tumque } pb = PA - Pp + Bb$$

obtinebimus

$$pa = PA + \tfrac{1}{2}(Aa + Bb) = PA + A\alpha + B\beta, \text{ nec non}$$

$$Pp = \tfrac{1}{2}(Bb - Aa) = B\beta - A\alpha.$$

Conſequemur proinde

$$\text{Tang.}(B\beta + A\alpha) = \frac{\gamma\,\text{ſin.}\,ZB\,(1 - \gamma\,\text{coſ.}\,ZA) + \gamma\,\text{ſin.}\,ZA\,(1 - \gamma\,\text{coſ.}\,ZB)}{1 - \gamma(\text{coſ.}\,ZA + \text{coſ.}\,ZB) + \gamma^2(\text{coſ.}\,ZA\,\text{coſ.}\,ZB - \text{ſin.}\,ZA\,\text{ſin.}\,ZB)}$$

ſiue

$$\text{Tang.}(B\beta + A\alpha) = \frac{2\gamma\,\text{ſin.}\,PA\,(\text{coſ.}\,PZ - \gamma\,\text{coſ.}\,PA)}{1 - 2\gamma\,\text{coſ.}\,PA\,\text{coſ.}\,PZ + \gamma^2(\text{coſ.}\,PA^2 - \text{ſin.}\,PA^2)}$$

tumque

$$\text{Tang. } pa = \text{Tang.}(PA + B\beta + A\alpha) = \frac{(1 - \gamma^2)\,\text{ſin.}\,PA}{(1 + \gamma^2)\,\text{coſ.}\,PA - 2\gamma\,\text{coſ.}\,PZ}.$$

Similiter fiet

$$\text{Tang.}\,Pp = \text{Tang.}(B\beta - A\alpha) = \frac{\gamma\,\text{ſin.}\,ZB\,(1 - \gamma\,\text{coſ.}\,ZA) - \gamma\,\text{ſin.}\,ZA\,(1 - \gamma\,\text{coſ.}\,ZB)}{1 - \gamma(\text{coſ.}\,ZA + \text{coſ.}\,ZB) + \gamma^2(\text{coſ.}\,ZA\,\text{coſ.}\,ZB + \text{ſin.}\,ZA\,\text{ſin.}\,ZB)}$$

$$= \frac{2\gamma\,\text{ſin.}\,PZ\,(\text{coſ.}\,PA - \gamma\,\text{coſ.}\,PZ)}{1 - 2\gamma\,\text{coſ.}\,PZ\,\text{coſ.}\,PA + \gamma^2(\text{coſ.}\,PZ^2 - \text{ſin.}\,PZ^2)}.$$

Vel

Vel etiam hoc modo idem negotium abſolui poteſt, ob

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,Z\,a : \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,Z\,A :: 1+\gamma : 1-\gamma \text{ et}$$

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,Z\,b : \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,Z\,B :: 1+\gamma : 1-\gamma$$

habebimus

$$\text{Tang.}\,p\,a = \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(Z\,b+Z\,a) = \frac{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}(\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,ZB+\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,ZA)}{1-(\frac{1+\gamma}{1-\gamma})^2\,\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,ZB\,\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,ZA} =$$

$$\frac{(1-\gamma^2)(\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,ZB\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,ZA+\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,ZB\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,ZA)}{(1+\gamma^2)(\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}ZB\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}ZA-\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}ZB\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}ZA)-2\gamma(\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}ZB\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}ZA+\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}ZB\,\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}ZA)}$$

$$= \frac{(1-\gamma^2)\,\text{ſin.}\,PA}{(1+\gamma^2)\,\text{coſ.}\,PA-2\gamma\,\text{coſ.}\,PZ}.$$

Porro vero fiet

$$\text{Tang}\,p\,Z = \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(Z\,b-Z\,a) = \frac{(1-\gamma^2)\,\text{ſin.}\,PZ}{(1+\gamma^2)\,\text{coſ.}\,PZ-2\gamma\,\text{coſ.}\,PA}.$$

Ex quo pro $\text{Tang.}\,P\,p = \text{Tang.}\,(p\,Z - P\,Z)$ prorſus idem deducitur valor quem ſupra inuenimus.

15. Praeterea vtile forſan quoque erit valores arcuum $P\,a$, $P\,b$, vel $P\,\alpha$, $P\,\beta$ cognoſcere, fiet vero

$$\text{Tang.}\,P\,\alpha = \text{Tang.}\,(P\,A + A\,\alpha) = \frac{\text{ſin.}\,PA - \gamma\,\text{ſin.}\,PZ}{\text{coſ.}\,PA - \gamma\,\text{coſ.}\,PZ}$$

$$\text{Tang.}\,P\,\beta = \text{Tang.}\,(P\,B + B\,\beta) = \frac{\text{ſin.}\,PA + \gamma\,\text{ſin.}\,PZ}{\text{coſ.}\,PA - \gamma\,\text{coſ.}\,PZ}$$

$$\text{Tang.}\,P\,a = \text{Tang.}\,(P\,\alpha + A\,\alpha) = \frac{\text{ſin.}\,PA - 2\gamma\,\text{ſin.}\,PZ + \gamma^2\,\text{ſin.}\,(2\,PZ - PA)}{\text{coſ.}\,PA - 2\gamma\,\text{coſ.}\,PZ + \gamma^2\,\text{coſ.}\,(2\,PZ - PA)}$$

$$\text{Tang.}\,P\,b = \text{Tang.}\,(P\,\beta + B\,\beta) = \frac{\text{ſin.}\,PA + 2\gamma\,\text{ſin.}\,PZ - \gamma^2\,\text{ſin.}\,(2\,PZ - PA)}{\text{coſ.}\,PA - 2\gamma\,\text{coſ.}\,PZ + \gamma^2\,\text{coſ.}\,(2\,PZ - PA)}.$$

Denique iam liquet radium curuaturae pro puncto $\alpha$ vel $\beta$ non eſſe aequalem ipſi $\tfrac{1}{2}(P\,\alpha + B\,\beta)$, nam ſi hoc ponatur, eſſet quoque

$$\text{Tang.}\,(P\,\alpha + P\,\beta) = \text{Tang.}\,2\,r\text{, atqui eſt}$$

Tang.

$$\text{Tang.}(P\alpha + P\beta) = \frac{2\,\text{ſin.}\,PA\,(\text{coſ.}\,PA - \gamma\,\text{coſ.}\,PZ)}{\text{coſ.}\,PA^2 - \text{ſin.}\,PA^2 - 2\gamma\,\text{coſ.}\,PA\,\text{coſ.}\,PZ + \gamma^2}$$ et

$$\text{Tang.}\,2r = \frac{2\,\text{ſin.}\,PA\,(\text{coſ.}\,PA - \gamma\,\text{coſ.}\,PZ)}{\text{coſ.}\,PA^2 - \text{ſin.}\,PA^2 - 2\gamma\,\text{coſ.}\,PA\,\text{coſ.}\,PZ + \gamma^2\,\text{coſ.}\,PZ^2},$$

hincque colligitur

$$\text{cot.}(P\alpha + P\beta) = \text{cot.}\,2r + \frac{\gamma^2\,\text{ſin.}\,PZ^2}{2\,\text{ſin.}\,PA\,(\text{coſ.}\,PA - \gamma\,\text{coſ.}\,PZ)},$$

vbi cot. $(P\alpha + P\beta)$ erit maior vel minor quam cot. $2r$, prouti fuerit coſ. $PA - \gamma$ coſ. $PZ$ quantitas poſitiua vel negatiua. Caſu, quo coſ. $PA - \gamma$ coſ. $PZ$ euaneſcit, euaneſcet quoque tam Tang. $(P\alpha + P\beta)$ quam Tang. $2r$, ſeu erit $\frac{1}{2}(P\alpha + P\beta) = r = 90°$.

16. Miſſis vero iam his contemplationibus, quae ad Geometriam quidem ſpectant, in Aſtronomicis autem exigui ſunt vſus; examinemus nunc formulam a Celeb. *de la Lande* allatam, de qua ſupra diximus, quod cum veritate conſiſtere nequeat. Formula autem haec per denominationes a nobis adhibitas ita habetur expreſſa $\psi = \pi\,\text{coſ.}\,c'\,\text{ſin.}\,C'\,\text{coſ.}\,C'$, de qua quidem ſtatim liquet eam nequaquam convenire cum formula noſtra §. 7. exhibita, $\psi = \pi\,\text{ſin.}\,c'\,\text{ſin.}\,C'\,\text{cot.}\,a'$; quippe quum eſſe nequeat cot. $a' = \text{cot.}\,c'\,\text{coſ.}\,C'$, niſi pro caſu ſpeciali quo ſtatuitur angulus $PZL = 90°$. Ratiocinium vero quo Celeb. *de la Lande* ſuam formulam ſtabilire voluit, hunc fere in modum procedit: Si $ZLM$ fuerit circulus verticalis, deſignante $L$ locum Lunae verum et $M$ apparentem, tumque ducantur arcus $M\mu$, $Mm$ deſignantes parallelos Lunae apparentem et verum, vbi puncta $\mu$, $m$ ſita ſupponuntur in circulo verticali $Z\mu m$ priori $ZLM$ proximo; id heic propoſitum T. XXIV. Fig. 8.


ſitum

ſitum eſt vt inueſtigetur angulus $\mu M m$. At in triangulo $\mu M m$ eſt

ang. $\mu M m : \mu m :: ſin. M \mu m : M m$ ideoque ob

ſin. $M \mu m =$ coſ. Z M P quam proxime,

$\mu M m = \frac{\mu m}{M m}$ coſ. Z M P,

hinc vero ſi Polo Z interuallo Z M deſcribatur arcus circuli paralleli $M \nu$ ob

$M m : m \nu :: 1 :$ ſin. Z M P colligitur

$\mu M m = \frac{\mu m}{m \nu}$ ſin. Z M P coſ. Z M P.

Porro exiſtimat Celeb. Vir eſſe $\frac{\mu m}{m \nu} = \pi$ coſ. Z M, contendit enim $\mu m$ aequari variationi parallaxeos in altitudinem, quod etiamſi falſum eſt, haud forſan inutile erit perſpexiſſe, quomodo quis in huiusmodi paralogismum incidere queat. Deſcriptis igitur Polo P et interuallo P L arcu circuli minoris $L l$, nec non Polo Z et interuallo Z L, arcu $L \lambda$, et ductis arcubus P L, P M, liquet eſſe differentiale parallaxeos

$= d. ZM - d. ZL = \mu \nu - l \lambda$, at ob $LM = \pi$ ſin. ZM

proxime, fiet

$d. LM = \mu \nu . \pi$ coſ. ZM, hinc $\mu \nu . \pi$ coſ. $ZM = \mu \nu - l \lambda$,

quod ſi nunc quis ſibi perſuadeat eſſe $l \lambda = m \nu$, inde quoque concludet fore

$\mu \nu - l \lambda = \mu m = \mu \nu . \pi$ coſ. Z M,

hincque angulum

$\mu M m = \frac{m \mu}{\mu \nu}$ ſin. Z M P coſ. Z M P $= \pi$ coſ. ZM ſin. Z MP. coſ. ZMP.

Praeci-

Praecipuum igitur vitium huius demonſtrationis in eo latet, quod ſuppoſitum fuerit $\mu\, m$ aequalem eſſe variationi parallaxeos altitudinis, quod nequaquam verum eſſe poteſt niſi ſtatuatur $l\lambda = m\nu$, qui tamen arcus haud parum inter ſe differunt, eſt enim

$$l\lambda : m\nu :: \text{cot. } ZPM : \text{cot. } ZPL,$$

quod hunc in modum demonſtratur: ob

$$\text{coſ. } ZL = \text{coſ. } ZP . \text{coſ. } PL + \text{ſin. } ZP . \text{ſin. } PL . \text{coſ. } ZPL$$

fiet

$$l\lambda\, \text{ſin. } ZL = d.\, ZPL . \text{ſin. } PZ . \text{ſin. } PL . \text{ſin. } ZPL,$$

ideoque

$$l\lambda = d.\, ZPL . \text{ſin. } PL . \text{ſin. } PLZ,$$

ſimili vero modo ſi habeatur arcus P M pro inuariabili fiet

$$m\nu = d.\, ZPM . \text{ſin. } PM . \text{ſin. } PMZ, \text{ hincque } \frac{l\lambda}{m\nu} = \frac{d.\, ZPL}{d.\, ZPM},$$

at per formulam noſtram (III.) §. 5. conſtat eſſe

$$\text{ſin. } ZPL = \delta\, \text{ſin. } ZPM,$$

vbi $\delta$ quantitatem prorſus inuariabilem deſignabit, modo P M fuerit conſtans, hinc itaque deducetur

$$d.\, ZPL . \text{cot. } ZPL = d.\, ZPM . \text{cot. } ZPM,$$

ex quo fiet

$$\frac{l\lambda}{m\nu} = \text{cot. } ZPM . \text{Tang. } ZPL.$$

Praeterea nec id omnino cum veritate conciliari poteſt, quod ſupponatur in demonſtratione Celeb. *de la Lande*

$$Mm : \mu m :: \text{coſ. } ZMP : \mu Mm,$$

 nam

nam exactius habetur

$$\mu\, M\, m : \mu\, m :: \text{coſ. } Z\, M\, P : M\, \mu.$$

17. Nunc vero videamus quomodo ratiociniis rite ſubductis, ad formulam noſtram ſupra commemoratam pertingere liceat. Ob

$d.\, L\, M = \mu\nu - l\lambda$, tumque $\text{ſin. } L\, M = \varepsilon\, \text{ſin. } \pi\, \text{ſin. } Z\, M$ fiet $d.\, L\, M.\, \text{cot. } L\, M = d.\, Z\, M.\, \text{cot. } Z\, M$, vnde

$\mu\nu - l\lambda = \mu\nu\, \text{cot. } Z\, M\, \text{Tang. } L\, M$ nec non

$l\lambda = \mu\nu \frac{\text{ſin. } Z\, L}{\text{ſin. } Z\, M\, \text{coſ. } L\, M}$. Porro fiet

$$\text{Tang. } \mu\, M\, \nu = \frac{\mu\nu}{M\nu} = \frac{\mu\nu}{l\lambda} \cdot \frac{l\lambda}{L\lambda} \cdot \frac{L\lambda}{M\nu} = \frac{\text{ſin. } Z\, M\, \text{coſ. } L\, M.\, \text{Tang. } Z\, L\, P\, \text{ſin. } Z\, L}{\text{ſin. } Z\, L\, \text{ſin. } Z\, M}$$

$= \text{Tang. } Z\, L\, P.\, \text{coſ. } L\, M$, hincque deducitur

$$\text{Tang. } \mu\, M\, m = \text{Tang.} (\mu\, M\, \nu - m\, M\, \nu) = \text{Tang.} (\mu\, M\, \nu - Z\, M\, P)$$

$$= \frac{\text{Tang. } Z\, L\, P\, \text{coſ. } L\, M - \text{Tang. } Z\, M\, P}{1 + \text{Tang. } Z\, L\, P\, \text{Tang. } Z\, M\, P\, \text{coſ. } L\, M} = \frac{\text{ſin. } Z\, M\, P.\, \text{coſ. } P\, L\, M + \text{ſin. } P\, L\, M.\, \text{coſ. } Z\, M\, P.\, \text{coſ. } L\, M}{\text{ſin. } Z\, M\, P.\, \text{ſin. } P\, L\, M.\, \text{coſ. } L\, M - \text{coſ. } Z\, M\, P.\, \text{coſ. } P\, L\, M}$$

cuius expreſſionis denominator $= \text{coſ. } L\, P\, M$, numerator vero

$$= \text{cot. } P\, M.\, \text{ſin. } L\, M.\, \text{ſin. } P\, L\, M = \text{ſin. } L\, P\, M.\, \text{coſ. } P\, M,$$

ideoque conſequimur vt antea

$$\text{Tang. } \mu\, M\, m = \text{Tang. } \psi = \text{Tang. } L\, P\, M.\, \text{coſ. } P\, M.$$

18. Vt conſtet quantum formula a Celeb. *de la Lande* allata, a veritate aberrare poſſit, adhibeamus exemplum ab ipſo ad illuſtrationem ſuae formulae adductum, quo ſtatuebatur parallaxis Lunae $54'.\ 2''$, eius diſtantia a meridiano ſeu angulus horarius $= 75°$, et declinatio borealis $= 5°.\ 36'$. Calculo igitur facto pro Pariſiis inueni Parallaxin aſcenſionis rectae pro Luna $34'.\ 37''$ et parallaxin declinationis

nationis $39'. 45''$, ſeu declinationem Lunae apparentem $4^\circ.56'.15''$, vnde obtinetur angulus $\psi = 2'.59''$, quem Celeb. *de la Lande* per ſuam formulam inuenerat $6'.28''$ adeoque plus quam duplo maiorem vera, niſi ſi forſan in ipſum calculum Celeb. Viri aliquis irrepſerit error. Hinc vero facile quoque intelligitur Tabellam a Celeb. hoc Aſtronomo allatam pro valoribus anguli $\psi$ nequaquam conſiſtere poſſe, dum pro diſtantia Lunae a meridiano $90^\circ$, angulum $\psi$ exhibeat euaneſcentem, quum tamen certum ſit, eius valorem hoc caſu ad maximum proxime accedere.

19. Examinemus nunc quoque quaenam diverſitas oriatur inter parallelum Lunae verum et apparentem propter variabilitatem in declinatione Lunae. Et quidem ſi ſupponamus Lunam parallaxi omnino non adfici, facillimum erit angulum quem parallelus verus cum apparente conſtituit aſſignare, nam ſi ratio inter variationem horariam Lunae in declinationem et angulum horarium Lunae exprimatur littera $\delta$, ita vt ſit $\frac{d\,a}{d\,A} = \delta$, fiet hic angulus $= \frac{d\,a}{d\,A\,ſin.\,a} = \frac{\delta}{ſin.\,a}$. Si igitur ſupponere velimus eſſe quoque $\frac{d\,a'}{d\,A'} = \delta$, fiet ſimiliter $\frac{d\,a'}{d\,A'.ſin.\,a'} = \frac{\delta}{ſin.\,a'}$, at tamen rigoroſe non ſtatui poteſt $d\,a' = d\,a$, neque $d\,A = d\,A'$, quam ob rem, haud abs re erit vt inquiramus in valorem anguli $\psi$, pro caſu quo non ſolum angulus $Z\,P\,L = A$, ſed etiam declinatio $= 90 - P\,L$ ſupponitur variabilis. Quia igitur habemus

$\varepsilon \sin. \pi \sin. b. \sin. A' = \sin. a. \sin. (A' - A)$ erit

$$L. \sin. A' + L. \varepsilon \sin. \pi \sin. b = L \sin. a + L. \sin. (A' - A),$$

hincque differentiando

$$d A'. \cot. A' = d a \cot. a + (d A' - d A) \cot. (A' - A),$$

vnde poſito $d a = \delta. d A$ conſequitur fore

$$\frac{d A}{d A'} = \frac{\sin. A}{\sin. A' (\cos. (A' - A) - \delta \cot. a \sin. (A' - A))}.$$

Tum autem quum ſit

$$\cot. a' = \sin. (A' - A) \frac{(\cos. a - \varepsilon \sin. \pi \cos. b)}{\varepsilon \sin. \pi \sin. b. \sin. A}, \text{ fiet}$$

$$L \cot a' = L \sin. (A' - A) - L \sin. A + L (\cos. a - \varepsilon \sin. \pi \cos. b) - L \varepsilon \sin. \pi \sin. b$$

et ſumtis differentialibus

$$- \frac{d a'}{\sin. a' \cos. a'} = (d A' - d A) \cot. (A' - A) - d A. \cot. A - \frac{d a \sin. a}{\cos. a - \varepsilon \sin. \pi \cos. b}$$

ex quo colligitur

$$- \frac{d a'}{d A' \sin. a'} = \cos. a' \left(\cot. (A' - A) - \frac{d A}{d A'} \left(\frac{\sin. A'}{\sin. A. \sin. (A' - A)} + \frac{\delta \sin. a}{\cos. a - \varepsilon \sin. \pi \cos. b}\right)\right)$$

$$= \cos. a' \left(\cot. (A' - A) - \frac{d A}{d A'} \left(\frac{\sin. A'}{\sin. A. \sin. (A' - A)} + \frac{\delta \sin. A'. \mathrm{Tang.} a'}{\sin. A}\right)\right).$$

Subſtituto igitur pro $\frac{d A}{d A'}$ valore ipſius, prodibit

$$- \frac{d a'}{d A' \sin. a'} = \cos. a' \left(\cot. (A' - A) - \frac{1 + \delta \mathrm{Tang.} a' \sin. (A' - A)}{\sin. (A' - A) (\cos. (A' - A) - \delta \cot. a \sin. (A' - A))}\right)$$

quae ad hanc concinniorem reducitur formam

$$- \frac{d a'}{d A' \sin. a'} = \cos. a' \left(\frac{\sin. (A' - A) + \delta (\cot. a \cos. (A' - A) + \mathrm{Tang.} a')}{\cos. (A' - A) - \delta \cot. a \sin. (A' - A)}\right)$$

vbi quidem ſponte liquet poſito $\delta = 0$, fore

$$- \frac{d a'}{d A' \sin. a'} = \mathrm{Tang.} (A' - A) \cos. a'.$$

Si

Si vero ab angulo $\psi$ ſupra inuento, eam ſubtrahamus partem quae a variabilitate parallaxeos reſultat, inuenietur pars ex variabilitate declinationis oriunda, pro cuius tangente omnino ſine ſenſibili errore adhiberi poterit $\frac{\delta}{\text{ſin.}\ \alpha'}$, ſaltem pro vſu Aſtronomico hic valor ſatis exactus haberi debet.

20. Denique ſi ratio habenda ſit mutationis quam refractio aſtri ſubit, ob quam parallelus eius apparens a vero aliquantum differre poteſt; angulum quem parallelus apparens cum vero conſtituit, ſequentem in modum definire licebit. Ante omnia vero monendum eſt, nos heic per parallelum aſtri verum, non eum intelligere, quem deſcriberet ſi nulla plane adficeretur refractione, ſed iſtum, quem deſcripturum eſſet ab aliquo puncto, ſi effectus refractionis eſſet conſtans; praeterea vero iam mentem omnino abſtrahimus a mutationibus ex Parallaxi et declinatione oriundis, ita vt ſupponamus aſtrum nullam plane agnoſcere Parallaxin et eandem conſtanter retinere declinationem. His ſuppoſitis deſignet P Z meridianum alicuius loci, Z M L, Z $m\,\lambda$ circulos verticales ſibi proximos, in quibus L, $l$ exhibent loca quaecunque aſtri vera et M, $m$ adparentia ob effectum ſcilicet refractionis, tum autem polo Z interuallis Z M, Z L deſcribantur arcus circulorum minorum M $n$, L $\lambda$, ſumatur $n\,\mu = l\,\lambda$ et ducantur arcus circulorum maximorum $m$ M, $\mu$ M, $l$ L, nec non P M, P L; quo facto omnino liquet angulum paralleli veri, cum apparente eum eſſe, quem arcus $\mu$ M cum $m$ M conſtituit, ſi nimirum refra- T. XXIV. Fig. 9.

ctio

ctio fuiſſet conſtans, locus aſtri in verticali $Z m \lambda$ fuiſſet $\mu$, quum iam ob mutatam refractionem aſtrum reperiatur in $m$.

21. Ob $\text{coſ.}\, ZL = \text{coſ.}\, ZP\, \text{coſ.}\, PL + \text{ſin.}\, ZP.\, \text{ſin.}\, PL.\, \text{coſ.}\, ZPL$, fiet retentis denominationibus antea adhibitis

$$l\lambda\, \text{ſin.}\, c = d\,A.\, \text{ſin.}\, b\, \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, A \quad \text{hincque}$$

$$l\lambda = d\,A.\, \text{ſin.}\, a.\, \text{ſin.}\, C. \quad \text{Porro fiet}$$

$$\text{ang.}\, L Z \lambda = d\,A.\, \frac{\text{ſin.}\, a\, \text{coſ.}\, C}{\text{ſin.}\, c},$$

ita vt ſit

$$L\lambda = \text{ang.}\, L Z \lambda.\, \text{ſin.}\, c = d A.\, \text{ſin.}\, a.\, \text{coſ.}\, C \text{ et } \frac{l\lambda}{L\lambda} = \text{Tang.}\, C,$$

hinc vero obtinetur

$$\frac{\mu n}{M n} = \frac{\mu n}{L\lambda}.\, \frac{L\lambda}{M n} = \frac{l\lambda}{L\lambda}.\, \frac{L\lambda}{M n} \text{ ob } \mu n = l\lambda,$$

ideoque fiet

$$\frac{\mu n}{M n} = \text{Tang.}\, \mu M n = \frac{\text{Tang.}\, C.\, \text{ſin.}\, c}{\text{ſin.}\, c'}, \text{ eſt enim } \frac{L\lambda}{M n} = \frac{\text{ſin.}\, ZL}{\text{ſin.}\, ZM}.$$

At vero ſi variabilitas refractionis $= \mu m$ exprimatur per $dr$, fiet

$$m n = \mu n - \mu m = l\lambda - \mu m = d A\, \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, C - dr,$$

hincque

$$\frac{m n}{M n} = \text{Tang.}\, m M n = \frac{(d A\, \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, C - d r)\, \text{ſin.}\, c}{d A.\, \text{ſin.}\, a\, \text{coſ.}\, C.\, \text{ſin.}\, c'}$$

ex quo prodit

$$\text{cot.}\, \mu M m = \text{cot.}\, (\mu M n - m M n) =$$

$$\frac{d A}{d r}\, \frac{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, c'\, \text{coſ.}\, C}{\text{ſin.}\, c} \left(1 + \frac{\text{Tang.}\, C^2\, \text{ſin.}\, c^2}{\text{ſin.}\, c'^2}\right) - \frac{\text{ſin.}\, c.\, \text{Tang.}\, C}{\text{ſin.}\, c'} =$$

$$\frac{d A}{d r}\, \frac{\text{ſin.}\, a.\, \text{coſ.}\, C}{\text{ſin.}\, c.\, \text{ſin.}\, c'} (\text{ſin.}\, c'^2 + \text{Tang.}\, C^2\, \text{ſin.}\, c^2) - \frac{\text{ſin.}\, c.\, \text{Tang.}\, C}{\text{ſin.}\, c'}.$$

Quod

Quod ſi in hac aequatione loco ſin. $c'$ ſubſtituatur ſin. $c - r$ coſ. $c$, deſignante $r$ refractionem, ita vt ſit

$$\text{ſin.}\, c'^2 = \text{ſin.}\, c^2 - 2\, r\, \text{ſin.}\, c\, \text{coſ.}\, c \text{ proxime, fiet}$$

$$\text{cot.}\, \mu\, M\, m = \frac{d\,A}{d\,r} \left(\frac{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, c}{\text{ſin.}\, c'\, \text{coſ.}\, C} - 2\, r \frac{\text{ſin.}\, a\, \text{coſ.}\, C.\, \text{coſ.}\, c}{\text{ſin.}\, c'}\right) - \frac{\text{ſin.}\, c\, \text{Tang.}\, C}{\text{ſin.}\, c'}$$

et ſi in denominatoribus loco ſin. $c'$ ſubſtituatur ſin. $c - r$ coſ. $c$, vel ſi expreſſio multiplicetur per $\frac{1 + r\, \text{cot.}\, c}{\text{ſin.}\, c}$, negligendo altiores poteſtates ipſius $r$ conſequemur:

$$\text{cot.}\, \mu\, M\, m = \frac{d\,A}{d\,r} \left(\frac{\text{ſin.}\, a}{\text{coſ.}\, C} + r \frac{\text{ſin.}\, a\, \text{cot.}\, c}{\text{coſ.}\, C} - 2 r\, \text{ſin.}\, a\, \text{cot.}\, c\, \text{coſ.}\, C\right) - \text{Tang.}\, C\, (1 + r\, \text{cot.}\, c)$$

$$= \frac{d\,A}{d\,r} \left(\frac{\text{ſin.}\, a}{\text{coſ.}\, C} - r \frac{\text{ſin.}\, a\, \text{cot.}\, c\, \text{coſ.}\, 2\, C}{\text{coſ.}\, C}\right) - \text{Tang.}\, C\, (1 + r\, \text{cot.}\, c),$$

quae expreſſio ſine dubio proxime ad veritatem accedit. Interim tamen ſi in hac formula quoque terminum per $r$ affectum negligere vellemus, prodiret

$$\text{Tang.}\, \mu\, M\, m = \frac{d\, r\, \text{coſ.}\, C}{d\, A\, \text{ſin.}\, a - d\, r\, \text{ſin.}\, C}.$$

Ex his autem formulis intelligitur, eam quam pro hoc inſtituto propoſuit Celeb. *de la Lande* in ſua Aſtronomia §. 2547. nequaquam cum veritate conſiſtere poſſe.

22. Pro computo formularum modo allatarum ſufficit quidem, ſi ratio ipſius $d\, r$ ad $d\, A$ ex Tabulis refractionum aſſignari queat, quaerendo enim rationem ipſius $d\, c$ ad $d\, A$, Tabulae hae exhibebunt rationem ipſius $d\, r$ ad $d\, c$, vti notum eſt; interim tamen pro inuenienda ratione $d\, r : d\, A$ in vſum vocari poterit hypotheſis a *Bradleyo* adoptata, qua ſup-

 poni-

ponitur $r = \mu$ Tang. $(c - \beta r)$, deſignantibus $\mu$, $\beta$ numeros conſtantes et $c$ diſtantiam veram aſtri a Zenith. Quia autem arcus $r$ eſt valde paruus etiam ſtatuere licebit Tang. $r = \nu$ Tang. $(c - \beta r)$, hinc vero colligitur ſumtis differentialibus

$$\frac{d\,r}{\text{ſin.}^{2}\, r} = \frac{d\,c - \beta\, d\,r}{\text{ſin.}^{2}\,(c - \beta\, r)}\text{, vnde conſit}$$

$$\frac{\text{ſin.}^{2}\,(c - \beta\, r) + \beta\,\text{ſin.}^{2}\, r}{\text{ſin.}^{2}\, r\;\text{ſin.}^{2}\,(c - \beta\, r)}\, d\,r = d\,c\text{, eſt vero}$$

$$d\,c = d\,\text{A. ſin. } a \text{ ſin. C ex quo fiet}$$

$$\frac{d\,\text{A}}{d\,r} = \frac{\text{ſin.}^{2}\,(c - \beta\, r) + \beta\,\text{ſin.}^{2}\, r}{\text{ſin. } a\text{. ſin. C. ſin.}^{2}\, r\;\text{ſin.}^{2}\,(c - \beta\, r)}$$

qui valor iam in formulis pro cot $\mu$ M $m$ exhibitis ſubſtitui poteſt. Interim quum ſic in formulas valde intricatas incideremus praeſtabit omnino pro vſu Aſtronomico, rationem ipſius $d\,r$ ad $d$ A immediate ex Tabulis eruere.

23. Cognito angulo $\psi$ quem parallelus aſtri verus, cum adparente conſtituit, facillime aſſignari poteſt correctio, qua vera differentia aſcenſionum rectarum pro aſtris, ex obſeruata deducitur. Sit enim P M circulus horarius verus, tempore quo praecedens aſtrum obſeruatum fuit in filo horario tangente circulum maximum M Q S, qui cum P L M facit angulum $= \psi$, ponamus vero aſtrum ſequens tranſire hoc filum in Q et polo P interuallo P Q deſcribatur arcus Q R, erit igitur $\frac{\text{R Q}}{\text{ſin. P Q}}$ correctio differentiae aſcenſionum rectarum pro aſtris, atqui eſt R Q $=$ M Q ſin. $\psi$ ex quo colligitur angulus R P Q $= \frac{\text{M Q. ſin. }\psi}{\text{ſin. P Q}}$. Hinc ſi differentia declinationum

T. XXIV. Fig. 10.

tionum pro aſtris obſeruata, id eſt arcus M Q dicatur D et declinatio aſtri ſequentis $= \alpha$, fiet R P Q $= \frac{D.\,ſin.\,\psi}{coſ.\,\alpha}$, ex circumſtantiis autem facile colligitur vtrum haec correctio pro differentia aſcenſionum rectarum adfirmatiue an negatiue adhiberi debeat. At vero differentia declinationum vera habebitur $=$ R M $=$ Q M coſ. $\psi =$ D coſ. $\psi$, ideoque ob angulum $\psi$ ſemper quam minimum, differentia declinationum vera ab obſeruata vix ſenſibiliter diſcrepabit.

# NONNVLLA LOCA LVNAE
## EX OBSERVATIONIBVS CIRCA OCCVLTATIONES FIXARVM A LVNA, ANNO 1774. PETROPOLI ET ALIBI INSTITVTIS, DETERMINATA.

Auctore

*AND. IOH. LEXELL.*

Quum coniunctionem Lunae cum ſtellis fixis, quae Hyades appellantur, anno 1774. heic Petropoli et alibi, ſaepius accurate obſeruare licuerit; operae pretium duxi, harum obſeruationum calculum inſtituere, vt inde vera momenta coniunctionum Lunae cum fixis occultatis eruerem, ſicque loca Lunae quantum fieri poteſt, exacte determinarem. Dum igitur concluſiones ex his calculis deductas heic expoſiturus ſum, primum breuem expoſitionem ipſarum obſeruationum praemittam, vbi quidem pro Petropoli omnes obſeruationes circa occultationes fixarum hoc anno a me factas recenſebo, licet nonnullae earum computo ſubiectae non fuerint, quem tamen laborem ſuſcipere non detractabo, dum his obſeruationibus correſpondentes alibi factae mihi innotuerint.

*Obſerua-*

## *Obſeruationes circa occultationes fixarum a Luna, Anno 1774. Petropoli factae.*

| St. Nou. | Temp. ver. obſ. |
|---|---|
| Die 22. Ian. Immerſio α Tauri circa partem Lunae obſcuram. - - | $7^h. 2'. 52''$ |
| Obſeruatio haec videtur certiſſima. Stella interuallo circiter $5''$ limbo Lunae adhaerere viſa eſt. | |
| Emerſio eiusdem Stellae ad limbum Lunae lucidum. - - - | 8. 20. 44 |
| Haec quoque obſeruatio mihi ſatis certa videbatur, ſaltem plusquam trium ſecundorum errorem ipſi ineſſe non ſuſpicor. | |
| Die 14. Apr. Immerſio Stellae α Tauri in regione Lunae obſcura. - - | 8. 28. 34 |
| Obſeruatio certiſſima, ſtella quinque ſecundis limbo Lunae adhaerebat. | |
| Emerſio ſtellae ad limbum Lunae lucidum. - - - - - - | 9. 3. 20 |
| Pro emerſione heic illud momentum exhibeo, quo ſtella primum mihi ſe conſpicienda praebuit, licet limbo Lunae adhuc erat coniuncta, a quo momento ad plenam emerſionem, tria effluxere ſcrupula ſecunda. | |
| Die 15. Apr. Occultatio ſtellae *ni fallor* 115 Flamſtedii in Tauro ad limbum Lunae obſcurum. - - - - | 9. 32. 0 |

| St. Nou. | Temp. ver. obſ. |
|---|---|
| Ad ſemiſſem ſecundi certa. Stella circa immerſionem ſaltem 12 aut 15 ſcrupulis ſecundis limbo inhaeſit, et quaſi per ipſum limbum conſpiciebatur. | |
| Emerſio obſeruata eſt. - - - | $10^h. 25'. 3''$ |
| Erat autem ſtella a limbo Lunae iam aliquantum remota, ita vt veram emerſionem ſemiminuto primo citius contigiſſe ſuſpicer. | |
| Die 16. Apr. Occultatio ſtellae 7 magnitudinis in ♊ a Luna. | |
| Immerſio ſtellae contigit. - - | 10. 21. 33 |
| Stella antequam penitus diſpareret, in ipſum limbum quaſi intrare, et quaſi per ipſum limbum perlucere videbatur. A momento quo limbo Lunae iungebatur ad totalem immerſionem ſemiminutum primum fere effluxit. | |
| Circa emerſionem ſtellam videre non potui, ante. - - - - | $10^h. 53'. 44''$ |
| Tum autem ab ipſo limbo Lunae tantum diſtabat, vt veram emerſionem fere minuto primo ante contigiſſe aeſtimauerim. | |
| Maii d. 22. Stellam *m* Virginis in limbum Lunae obſcurum immergentem vidi. - - - - - - | 13. 2. 20 |

| St. Nou. | Temp. ver. obſ. |
|---|---|
| Emerſio contigit ad limbum lucidum, et Luna horizonti valde propinqua, ideoque ei non inuigilaui. | |
| Die 28. Aug. Stella 2 θ Tauri circa limbum Lunae lucidum immergebat. | $11^h. 48'. 45''\frac{1}{2}$ |
| Licet haec immerſio ad limbum lucidum fieret, tamen valde certa mihi videtur, nec ad ſummum plusquam trium ſcrupulorum ſecundorum errorem illi ineſſe poſſe exiſtimo. | |
| Emerſio contigit ad limbum obſcurum. - - - - - - - | 12. 32. 29. |
| Obſeruatio inſtantanea. | |
| Stella 1 θ Tauri a Luna non occultata fuit, minima tamen eius diſtantia a limbo Lunae vix minutum primum cum dimidio ſuperauit. Coelum circa hanc obſeruationem valde ſerenum et defaecatum erat. | |
| Die 24. Sept. Immerſionem ſtellae γ Tauri poſt limbum Lunae lucidum obſeruauit Cel. *Rumovski*. - - - | $16^h. 59'. 49''$ |
| Eadem immerſio ex meo iudicio. | 16. 59. 53. |
| Ex momento Penduli a me deſcripto, ſequitur quidem momentum verum obſeruationis $17^h. 0'. 53''$, verum tam ex obſeruatione Cel. *Rumovski*, quam calculo patet erro- | |

St. Nou.

| St. Nou. | Temp. ver. obſ. |
|---|---|
| re computatoris ſecundorum, momentum Penduli male fuiſſe aſſignatum. Differentias aſcenſionum rectarum inter limbum Lunae ſequentem et ſtellam multoties quidem obſeruaui, verum has obſeruationes heic adferre nihil attinet. | |
| Die 18. Nou. Immerſio ſtellae $\gamma$ Tauri poſt limbum Lunae lucidum a Cl. *Islenieff.* - - - - - - | $8^h. 8'. 33''$ |
| a Celeb. *Rumovski.* - - - - - | 8. 34 |
| Eandem immerſionem ego fieri exiſtimaui. - - - - - | 8. 37 |
| Vndecim quidem ſcrupulis ſecundis tardius, aliquod indicium ſtellae videre exiſtimaui, verum illuſionem opticam fuiſſe perſuaſus ſum. | |
| Emerſionem ad limbum Lunae obſcurum vidit Cl. *Islenieff.* - - | 9. 14. 5 |
| Cel. *Rumovski.* - - - - - | 14. 20 |

Quum emerſionis momentum a me obſeruatum, momento Cel. *Rumovski* adhuc poſterius ſit valde erroneum eſſe oportet. Durante hac obſeruatione frigus erat intenſiſſimum qua de cauſſa meae obſeruationes ob hebetudinem oculorum factae ſunt dubiae.

| St. Nou. | Temp. ver. obſ. |
|---|---|
| Die 18. Nou. Immerſio α Tauri ad limbum Lunae lucidum. - - - | 17ʰ. 41′. 30″ |
| Haec obſeruatio aliquantum dubia, quia Luna nubibus per interualla tegebatur, nec tamen plus quam 10 ſcrupulorum ſecundorum errorem illi ineſſe poſſe exiſtimo. | |
| Circa emerſionem Luna nubibus obtegebatur, ſtellam igitur non vidi, niſi tempore. | 18ʰ. 28′. 22″ |

quo a limbo Lunae aliquantum diſtabat, per calculum autem concludere potui, veram emerſionem fere vno minuto primo antea contingere debuiſſe.

His obſeruationibus nunc quoque ſubiungere placet illas, quae circa tranſitus Lunae per Hyades hoc anno alibi inſtitutae fuerunt et ab Auctoribus Celeberrimis benigne mecum communicatae ſunt.

| St. Nou. | Temp. ver. obſ. |
|---|---|
| Die 22. Ian. Immerſio α Tauri Stockholmiae obſeruata fuit a Celeb. *Wargentin.* - - - - - - | 6ʰ. 0′. 26″½ |
| Emerſio eiusdem ſtellae. - - | 7. 15. 51 |
| Die 18. Febr. Immerſio γ Tauri Stockholmiae a Celeb. *Wargentin.* - - | 6. 39. 51 |
| Emerſio eiusdem ſtellae. - - | 7. 19. 33 |
| Die 14. Apr. Immerſio α Tauri Pariſiis a Celeb. *Meſſier.* - - - - | 6. 26. 0 |
| Emerſio. - - - - - | 7. 35. 59 |

| St. Nou. | Temp. ver. obſ. |
|---|---|
| Immerſio α Tauri item Pariſiis in Obſeruatorio Scholae Militaris a Cel. *Anthelmi.* - - - - - | $6^h. 25'. 54'',4$ |
| Emerſio. - - - - - | 7. 35. 53 |
| Immerſio eiusdem ſtellae Verſaliis a Cel. *Mechain.* - - - - | 6. 25. 1 |
| Emerſio - - - - - | 7. 35. $10\frac{1}{2}$ |
| Immerſio α Tauri Geneuae a Cel. *Mallet.* - - - - - - | 6. 47. 56 |
| Emerſio. - - - - - | 7. 56. $36\frac{1}{2}$ |
| Immerſio eiusdem ſtellae Mediolani a Cel. *de la Grange.* - - - | 7. 3. $6\frac{2}{3}$ |
| Emerſio ibidem. - - - - | 8. 10. $41\frac{2}{3}$ |
| Die 24. Sept. Immerſio γ Tauri Pariſiis a Cel. *Meſſier.* - - - - | 14. 22. $31\frac{1}{2}$ |
| Emerſio. - - - - - - | 14. 43. $37\frac{1}{2}$ |
| Nou. d. 18. Immerſio γ Tauri Pariſiis a Cel. *Meſſier.* - - - - | 5. 55. 25 |
| Emerſio ibidem, dubia ob Lunam nubibus tectam. - - - - | 6. 52. $47\frac{1}{2}$ |
| Immerſio 1 θ Hyadum ab eodem Cel. Aſtronomo. - - - - - | 11. 5. 28 |
| Emerſio eiusdem ſtellae. - - | 11. 20. $43\frac{1}{2}$ |
| Immerſio α Tauri a Cel. *Meſſier* obſeruata. - - - - - | 15. 35. 11 |
| Emerſionem obſeruare non licuit ob coelum nubibus tectum. | |

Antequam ad concluſiones ex obſeruationibus nunc allatis deducendas progredior, haud praeter rem erit,

erit, vt Elementa tam pro locis ſtellarum, quam Lunae ob oculos ponam. Priora autem ex Catalogo ſtellarum fixarum Bradleyano, habita ratione praeceſſionis, aberrationis et nutationis, ſequentem in modum deduxi:

*Loca Stellarum pro Anno* 1774.

| Die | Nom. Stellae | Aſcenſ. rect. | Declin. Bor. | Longit. Stellae | Latit. Auſtr. |
|---|---|---|---|---|---|
| 22. Ian. | α Tauri | 65°. 44′. 52″, 3 | 16°. 2′. 8″, 5 | 2 . 6°. 38′. 7″, 0 | 5°. 28′. 50″, 1 |
| 14. Apr. | - - - - | 65. 44. 36, 2 | 16. 2. 6, 4 | 2. 6. 37. 51, 0 | 5. 28. 49, 2 |
| 18. Nou. | - - - - | 65. 45. 38, 4 | 16. 2. 18, 4 | 2. 6. 38. 52, 4 | 5. 28. 46, 9 |
| 24. Sept. | γ Tauri | 61. 45. 3, 3 | 15. 3. 54, 9 | 2. 2. 39. 16, 8 | 5. 45. 15, 1 |
| 18. Nou. | - - - - | 61. 45. 20, 2 | 15. 3. 56, 7 | 2. 2. 39. 33, 3 | 5. 45. 16, 3 |
| 28. Aug. | 2 θ Tauri | 63. 57. 13, 9 | 15. 21. 5, 1 | 2. 4. 48. 29, 0 | 5. 51. 39, 7 |
| 18. Nou. | 1 θ Tauri | 63. 56. 17, 9 | 15. 26. 38, 2 | 2. 4. 48. 35, 3 | 5. 46. 2, 2 |

*Elementa pro locis Lunae ex Tabulis Lunaribus Cel. Mayeri deducta.*

| Temp. med. Pariſ. | | Aſcenſ. rect. ☉ | Longit. ☽ | Latit. ☽ Aus. |
|---|---|---|---|---|
| Ian. 22. | 5h. 32′ | 305°. 9′. 50″ | 2 . 6°. 27′. 32″, 2 | 4°. 53′. 6″, 7 |
| | 6. 32 | 305. 12. 28 | 2. 6. 57. 10, 1 | 4. 53. 53, 0 |
| Febr. 18. | 6 | 332. 18. 39 | 2. 2. 48. 2, 8 | 4. 56. 42, 0 |
| | 7 — | 332. 21. 3 | 2. 3. 17. 45, 1 | 4. 57. 36, 5 |
| Apr. 14. | 6. 33 | 22. 59. 58 | 2. 7. 0. 50, 8 | 5. 1. 7, 0 |
| | 7. 33 | 23. 2. 16 | 2. 7. 30. 44, 2 | 1. 47, 7 |
| Aug. 28. | 10 — | 157. 21. 24 | 2. 4. 20. 59, 1 | 5. 13. 15, 8 |
| | 11 — | 157. 23. 40 | 2. 4. 51. 3, 2 | 5. 13. 39, 9 |
| Sept. 24. | 14 — | 181. 51. 29 | 2. 2. 8. 37, 0 | 5. 9. 36, 2 |
| | 15 — | 181. 53. 44 | 2. 2. 39. 9, 8 | 5. 10. 6, 0 |
| Nou. 18. | 6 — | 234. 13. 11 | 2. 2. 6. 29, 5 | 4. 57. 33, 0 |
| | 7 — | 234. 15. 48 | 2. 2. 37. 11, 6 | 4. 57. 53, 3 |
| | 11 — | 234. 26. 13 | 2. 4. 39. 57, 7 | 4. 59. 1, 3 |
| | 12 — | 234. 28. 49 | 2. 5. 10. 33, 9 | 4. 59. 15, 0 |
| | 15 — | 234. 36. 38 | 2. 6. 42. 22, 3 | 4. 59. 45, 6 |
| | 16 — | 234. 39. 15 | 2. 7. 12. 55, 9 | 4. 59. 54, 1 |

 Temp.

| Temp. med. Pariſ. | Parall. ☽ aequat. | Diamet. ☽ | mot. hor. in Longit. | mot. hor. in Latit. | aequat. tempor. |
|---|---|---|---|---|---|
| Ian. 22. $5^h$. 32′ | 54′.14″,8 | 29′.33″,9 | 29′.38″,2 | 46″,0 | + 12′.15″ |
| 6. 32 | - - - | - - - | - - - | - - - | + 12. 16 |
| Febr. 18 6 — | 54. 23, 9 | 29. 38, 9 | 29. 41, 0 | 54, 3 | + 14. 17 |
| 7 — | - - - | - - - | - - - | - - - | - - - |
| Apr. 14. 6. 33 | 54′.22″,8 | 29. 38, 3 | 29′.53″,0 | 41, 0 | + 7 |
| 7 33 | 54. 21, 8 | - - - | - - - | 40, 0 | + 6 |
| Aug. 28. 10 — | 54. 45, 0 | 29. 50, 3 | 30. 5, 4 | 25, 0 | + 47 |
| 11 — | - - - | - - - | - - - | - - - | + 46 |
| Sept 24. 14 — | 55. 5, 0 | 30. 1, 2 | 30. 31, 9 | 31. 0 | — 8. 19 |
| 15 — | - - - | - - - | - - - | - - - | — 8. 20 |
| Nou. 18. 6 — | 54. 59, 1 | 29. 58, 0 | 30. 43, 0 | 21, 5 | — 14. 24 |
| 7 — | - - - | - - - | - - - | - - - | — 14. 23 |
| 11 — | 54. 54, 7 | 29. 55, 7 | 30. 37, 9 | 13, 6 | — 14. 21½ |
| 12 — | - - - | - - - | - - - | - - - | — 14. 20½ |
| 15 — | 54. 51, 4 | 29. 53, 7 | 30. 33, 9 | 8. 0 | — 14. 19 |
| 16 — | - - - | - - - | - - - | - - - | — 14. 18 |

*De occultatione α Tauri* d. 22. Ianuarii.

Pro immerſionibus et emerſionibus huius ſtellae Stockholmiae et Petropoli obſeruatis calculus ſequentia praebuit elementa

| | Paral. Longit. | Latit. appar. | Semidiam. ☽ appar. | Differ. appar. Long. Stellae et ☽ |
|---|---|---|---|---|
| Pro Immerſione Stockholmiae | 7′.31″,5 | 5° 32′.37″,7 | 14′.56″,3 | 14′.31″,0 |
| Emerſione ibidem - - | 24, 2 | 5. 31. 17, 5 | 14. 57, 2 | 14. 49, 1 |
| Immerſione Petropoli - | 33, 8 | 5. 31. 13, 9 | 14. 57, 0 | 14. 49, 5 |
| Emerſione ibidem - - | 8. 9, 3 | 5. 30. 29, 0 | 14. 57, 2 | 14. 55, 9 |

Hinc ſequentes deducuntur expreſſiones pro tempore vero coniunctionis Lunae cum Palilicio:

Pro meridiano Stockholmienſi

ex immerſione: $6^h\ 45'.4'' + 2,10\,\delta - 0,53\,y - 0,11\,\pi$

emerſione: $6.\ 45.\ 2 - 2,06\,\delta + 0,33\,y + 0,20\,\pi$

Pro

Pro meridiano Petropolitano
ex immerſione $7^h. 34'. 1'' + 2,06.\delta - 0,33.y - 0,20\pi$
emerſione $7. 34. 0 - 2,04.\delta + 0,22.y - 0,15.\pi$
vbi $\delta$ ſignificat correctionem ſemidiametri Lunae, $y$ correctionem Latitudinis Lunae auſtralis, et $\pi$ correctionem Parallaxeos aequatoreae. Ex binis concluſionibus pro Stockholmia colligimus medium ſumendo Tempus coniunctionis $6^h. 45'. 3'' - 0,10y$
ſubtrahendo autem vnam concluſionem ab altera, hanc obtinebimus aequationem:

$$2'' + 4,16.\delta - 0,86.y - 0,31.\pi = 0.$$

Similiter pro Petropoli fiet medium ſumendo tempus coniunctionis

$$7^h. 34'. 1'' - 0,06.y - 0,17.\pi$$

et ſubtrahendo poſteriorem concluſionem a priori fiet

$$1 + 4,10.\delta - 0,55.y - 0,05.\pi = 0.$$

Ex his aequationibus inuentis vix quidquam de vero valore ipſius $y$ ſtatui poteſt, niſi valor reliquarum correctionum $\delta$ et $\pi$ fuerit definitus. Interim quum ex occultatione $\alpha$ Tauri die 14. Aprilis probabiliter colligi poſſe videatur, eſſe $\delta = -3$, ſtatuamus ſaltem pro praeſenti obſeruatione $\delta = -2$; de valore autem ipſius $\pi$ quum nihil certi definire valeam ſtatuam eum $= 0$, hinc prodibit ex aequatione Stockholmienſi $-86.y = 632$ ideoque $y = -7'', 3$, ex aequatione vero Petropolitana $-55.y = 720$ ideoque $y = -13'', 1$. Ponamus igitur eſſe $y = -9''$. Quo facto ex concluſionibus pro immerſione deducetur

tur differentia meridianorum inter Stockholmiam et Petropolin 48'. 55''; ex concluſionibus vero pro emerſione colligetur 48'. 59'' et ex momentis mediis 48'. 58''. Hinc ſi Longitudo pro Stockholmia ponatur a Pariſiis $1^h$. 2'. 53'' prodirent ſequentes valores pro Longitudine Petropolis $1^h$. 51'. 48'', $1^h$. 51'. 51'' et $1^h$. 51'. 52''. Contra vero ſi Longitudo Petropolis ſtatuatur $1^h$. 51' 57'' fieret Longitudo Stockholmiae $1^h$. 3'. 2', vel $1^h$. 2'. 58'', vel $1^h$. 2'. 59''. Licet ipſa momenta obſeruationum ſaltem pro immerſione exactiſſime videntur aſſignata, fieri tamen vtique poteſt, vt concluſiones de differentia meridianorum pro minus tutis ſint habendae, ob nonnullam incertitudinem circa reductionem momentorum obſeruatorum ad tempus verum. Saltem hoc de obſeruationibus meis agnoſcere debeo. Nam cum die 21. Ian. per altitudines Solis correſpondentes verum momentum meridiei determinaſſem; decem effluxere dies, priusquam aliquam obſeruationem pro determinando tempore vero inſtituere licuit, ex quo vtique fieri poteſt vt hoc interuallo decem dierum motus Penduli non praeciſe talis fuit, qualem ego ſuppoſui. His perpenſis, retentis Longitudinibus pro Stockholmia et Petropoli, quae hucusque ſtabilitae fuerunt, fiet tempus coniunctionis verum pro Pariſiis ex obſeruatione Stockholmienſi $5^h$. 42'. 11'' et ex obſeruatione Petropolitana $5^h$. 42'. 5'', ſine ſenſibili igitur errore ſtatui poterit $5^h$. 42'. 9'' ſiue tempore medio $5^h$. 54'. 24'', quo tempore erat Longitudo Lunae $2^s$. $6^\circ$. 38'. 7'', 0, cum ex Tab. Mayerianis

nis ſit $2^s. 6^\circ. 38'. 36'', 0$, vnde correctio Tabularum quoad Longitudinem $-29''$. Latitudinis correctionem inuenimus $-9''$, vbi quidem praeciſe definiri non poteſt vtrum haec correctio vnice Latitudini Lunae ſit tribuenda, nam fieri vtique poſſet, vt Latitudo ipſius α Tauri haud prorſus exacte ſit determinata.

*De occultatione γ Tauri* d. 18. Febr.

Pro immerſione huius ſtellae Stockholmiae obſeruata, habetur Parall. Longitud. $12'. 17'', 3$; Latit. Lunae apparens $5^\circ. 32'. 33'', 9$, Semidiam. Lunae apparens $14'. 59'', 6$ et differentia apparens in Longit. ſtellae et Lunae $7'. 55'', 9$. Similiter pro emerſione inuenitur: Parall. Longit. $16'. 45'', 4$, Latit. ☽ apparens $5^\circ. 32'. 37'', 9$; Semidiameter ☽ apparens $14' 59'', 3$ et differentia apparens inter Longitudines ſtellae et Lunae $8'. 1'', 8$. Hinc autem colliguntur pro tempore coniunctionis ſequentes expreſſiones ad meridianum Stockholmienſem

ex immerſione $6^h. 31'. 3'' + 3,90\delta + 3,33.y + 1,74.\pi$
emerſione $6. 29. 27 - 3,83\delta - 3,25.y - 2,74.\pi$
hinc medium $6. 30. 15 + 0,03\delta + 0,04.y - 0.50.\pi$.

Deinde ſubtrahendo poſteriorem concluſionem a priori fit:

$$96 + 7,73\,\delta + 6,58.y + 4,48.\pi = 0,$$

vbi ſi ponatur $\pi = 0$ et $\delta = -2$, fit $658.y = -8050$ ideoque $y = -12'', 2$, qui valor non multum a vero recedere poteſt, niſi ſi forſan ipſam π correctio-

nem

nem admittat ſenſibilem. Fx tempore coniunctionis Stockholmienſi $6^h. 30'. 15''$ elicitur tempus coniunctionis verum ad meridianum Pariſinum $5^h. 27'. 22''$ et medium $5^h. 41'. 39''$ exiſtente Longitudine Lunae $2^s. 2^\circ. 38'. 40'', 4$ quae ex Tabulis *Mayeri* habetur $2^s. 2^\circ. 38'. 58'', 1$, vnde fit correctio Tabulorum *Mayeri* $= - 18''$. De correctione Latitudinis idem monitum valet ac pro priori obſeruatione.

*De occultatione α Tauri* d. 14. Aprilis.

Pro obſeruationibus huius occultationis per calculum ſequentia elicuimus elementa

| | Paral. Longit ☽ | Latitud. ☽ apparens | Semidiam. ☽ apparens | Differ. Longit. appar. |
|---|---|---|---|---|
| Pro immerſione Pariſiis | 34′. 17″, 0 | 5°. 29′. 2″, 9 | 14′. 57″, 4 | 15′. 1″, 4 |
| emerſione ibidem | 39. 27, 7 | 5. 31. 42, 6 | 14. 55, 0 | 14. 42, 1 |
| Pro immerſione Verſalii | 34. 12, 1 | 5. 28. 59, 3 | 14. 57, 4 | 15. 1, 5 |
| emerſione - - - | 39. 26, 5 | 5. 31. 38, 9 | 14. 55, 0 | 14. 42, 0 |
| Pro immerſione Mediolani | 39. 10, 6 | 5. 27. 18, 0 | 14. 56, 2 | 14. 55, 6 |
| emerſione ibidem | 42. 59, 2 | 5. 30. 26, 2 | 14. 53, 7 | 14. 52, 6 |
| Pro immerſione Geneuae | 37. 32, 1 | 5. 27. 27, 4 | 14. 56, 8 | 14. 57, 2 |
| emerſione ibidem | 41. 59, 9 | 5. 30. 27, 1 | 14. 54, 2 | 14. 52, 9 |
| Pro immerſione Petropoli | 34. 17, 2 | 5. 40. 21, 6 | 14. 53, 2 | 9. 26, 9 |
| emerſione ibidem | 34. 28, 8 | 5. 41. 52, 8 | 14. 52, 2 | 7. 8, 7 |

Hinc pro tempore vero coniunctionis Lunae cum α Tauri, ſequentes deducuntur concluſiones.

Pro obſeruatorio Cel. *Meſſier*

ex immerſione $5^h. 47'. 20'' + 2,02\,\delta - 0,03.y - 1,30.\pi$

ex emerſione $5. 47. 13 - 2,05\,\delta + 0,39.y - 1,24.\pi$

medium $5. 47. 16 + 0,18.y - 1,27.\pi$

et

et ſubtrahendo poſteriorem concluſionem a priori, ſequens obtinetur aequatio

$$7 + 4,07.\delta - 0,42.y - 0,06.\pi = 0.$$

Pro Verſaliis

ex immerſione $5^h.46'.29'' + 2,02\delta - 0,03.y - 1,30.\pi$

ex emerſione $5.\ 46.\ 27 - 2,05\delta + 0.40.y - 1,24.\pi$

medium $5.\ 46.\ 28 \quad + 0,18.y - 1,27.\pi$

et ſequens aequatio

$$2 + 4,07\delta - 0,43.y - 0,06.\pi = 0$$

Pro Mediolano

ex immerſione $6^h.14'.25'' + 2,03\delta + 0,21.y - 1,35.\pi$

emerſione $6.\ 14.\ 31 - 2,03\delta + 0,22.y - 1,47.\pi$

medium $6.\ 14.\ 28 \quad + 0,22.y - 1,41.\pi$

aequatio autem prodit

$$-6 + 4,06\delta - 0,01.y + 0,12.\pi = 0$$

Pro Geneua

ex immerſione $6.\ 2.\ 35 + 2,03\delta + 0,19.y - 1,31.\pi$

emerſione $6.\ 2.\ 24 - 2,03\delta + 0,22.y - 1,44.\pi$

medium $6.\ 2.\ 30 \quad + 0,20.y - 1,38.\pi$

aequatio hinc habetur iſta

$$11 + 4,06\delta - 0,03.y + 0,13.\pi = 0$$

Pro Petropoli

ex immerſione $7.\ 38.\ 42 + 3,19\delta - 2,47.y - 3,05.\pi$

emerſione $7.\ 39.\ 45 - 4,20\delta + 3,69.y + 1,45.\pi$

medium $7.\ 39.\ 14 - 0,50\delta + 0,61.y - 0,80.\pi$

et aequatio hinc colligitur

$$63 - 7,39\delta + 6,16.y + 4,50.\pi = 0.$$

Dum aequationes inuentae inter ſe comparantur facillimum eſt perſpicere, eas minime inter ſe

conſentire; ſcilicet aequationem ex obſeruatione Verſalienſi deductam minime conſentientem reddi poſſe cum Pariſina, aequationem autem pro Mediolano inuentam adhuc magis diſcrepare a Geneuenſi. Sepoſitis igitur concluſionibus, quae ex obſeruationibus Mediolanenſibus et Verſalienſibus deductae ſunt, ex Pariſinis, Geneuenſibus et Petropolitanis ſequenti modo deducuntur valores correctionum $\delta$ et $y$, nam de $\pi$ ex his obſeruationibus nihil definire licet. Ex aequatione pro Geneua ſepoſitis correctionibus $y$ et $\pi$, quae vix quicquam in illa aequatione mutant, colligitur $406\ \delta = 1100$ ideoque $\delta = -2,7$, deinde ſi in aequatione pro Petropoli negligantur correctiones $\delta$ et $\pi$, fiet $y = -10''$, qui valor ſaltem proxime ad veritatem accedit, ſubſtituto igitur hoc valore in aequatione Pariſina et neglecta correctione $\pi$, prodit $407.\ \delta = 1120$ ideoque $\delta = -2'',8$ Hoc igitur valore in aequatione pro Petropoli ſubſtituto, colligitur neglecta correctione $\pi$; $616\ y = -83692$ vnde fit $y = -13'',5$. Sin autem iam hic valor in aequatione Pariſina adhibeatur fiet $\delta = -3''$, ſupponamus igitur eſſe $\delta = -3''$ fietque ex aequatione Petropolitana $616.y = -8517$, ſeu $y = -13'',8$. Si nunc hae correctiones in expreſſiones ſupra inventas pro temporibus coniunctionum introducantur, illae in ſequentes numeris abſolutis expreſſas abibunt:

pro

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| pro obſeruatorio Cel. *Meſſier* | | $5^h$. | $47'$. | $14''$ |
| ex vtraque obſeruatione | | | | |
| pro Verſaliis | ex immerſione | 5. | 46. | 23 |
| | ex emerſione | 5. | 46. | 28 |
| pro Mediolano | ex immerſione | 6. | 14. | 16 |
| | ex emerſione | 6. | 14. | 34 |
| pro Geneua | ex immerſione | 6. | 2. | 26 |
| | ex emerſione | 6. | 2. | 27 |
| pro Petropoli | ex immerſione | 7. | 39. | 7 |
| | ex emerſione | 7. | 39. | 7. |

Hinc pro differentiis meridianorum ſequentes prodeunt concluſiones: inter obſeruatorium Pariſiienſe et

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Verſalios | $0^h$. | $0'$.$49''$ | vel | $44''$ |
| Mediolan. | 0. | 27. 4 | vel | $22''$ |
| Geneuam | 0. | 15. 14 | vel | 15 |
| obſ. Petropolit. | 1. | 51. 55. | | |

Similiter inter Petropolin et Geneuam habebitur differentia meridianorum $1^h$. $36'$. $41''$, ideoque ſi ſtatuatur Longitudo Petropolis ab obſeruatorio Pariſino $1^h$. $51'$. $57''$ fieret Longitudo Geneuae ab obſeruatorio Pariſino $15'$. $16''$ quae vix a ſupra inuentis discrepat. Si obſeruatio Petropolitana ſeponatur, ex reliquis inter ſe comparatis differentiae meridianorum ſatis accurate determinari poterunt etiamſi correctiones $\delta$ et $y$ plane eſſent ignotae, ſic nullum eſt dubium, quin ex concluſionibus Pariſinis et Verſalienſibus colligantur differentiae meridianorum $51''$ et $46''$, inter obſeruatoria Cel. *Meſſier* et Cel. *de la Grange* habebitur ex immerſione $27'$. $5''$ et ex emer-

 ſione

ſione 27'. 18'', neglecta plane correctione *y*. Patet igitur obſeruationes Verſaliis et Mediolani inſtitutas cum Pariſina et Geneuenſi non bene conciliari poſſe, quod autem praeſertim obſeruationem Mediolanenſem attinet, haud veriſimilitudine deſtitui videtur, quod momentum pro immerſione mihi communicatum viginti ſcrupulorum ſecundorum correctionem admittat, ita vt loco $7^h. 3'. 6''\frac{1}{2}$ legendum ſit $7^h. 3'. 26''\frac{1}{2}$, ſic enim fiet ex immerſione tempus coniunctionis $6^h. 14'. 36''$, cum ex emerſione erat $6^h. 14'. 34''$. Diſcrepantia inter obſeruationes Cel. *Meſſier* et *Mechain*, ſi alias Longitudo Verſalii in Ephemeridibus Aſtronomicis (Connoiſſance des temps) bene ſit determinata, ex aliquali incertitudine circa determinationem temporis veri, prouenire neceſſe eſt, nam de momento immerſionis in obſeruatione Cel. *Meſſier* dubium vix duo ſcrupula ſecunda excedere poteſt. Nec ad ſaluam reddendam obſeruationem D. *Mechain* multum valet, ſi dicatur Cel. *Meſſier* immerſionem ipſius Palilicii nonnullis ſecundis citius obſeruare debuiſſe, quam ex momento aſſignato ſequitur. De obſeruationibus in obſeruatorio Scholae Militaris inſtitutis tenendum eſt, quod hae obſeruationes bene conſentiant, cum illis quas Cel. *Meſſier* inſtituit, reſpectu temporis, quo Aldebaran a Luna fuit occultata, atqui ex momentis immerſionum et emerſionum inter ſe comparatis, non ſequitur differentia meridianorum niſi 6 ſcrupulorum ſecundorum, quae tamen eſſe deberet 9''. Quicquid autem ſit inde pro determinanda vera Longitudine

gitudine Lunae nullus error ſenſibilis producetur, ſupponam igitur ceu ex obſeruatione Cel. *Meſſier* ſequitur, coniunctionem Lunae cum Palilicio contigiſſe Temp. vero obſeruatorii Pariſini $5^h. 47'. 12''$ ideoque Tempore medio $5^h. 47'. 19''$, quo tempore erat Longitudo Lunae $2^s. 6°. 37'. 51''$, ex Tabulis autem *Mayeri* habetur $2^s. 6°. 38'. 5'', 7$ vnde colligitur correctio harum Tabularum $- 15''$. Latitudinis autem correctionem ſupra inuenimus $- 13'', 8$, id eſt Latitudinem Lunae auſtralem hac quantitate eſſe minuendam, modo alias Latitudo Stellae exacte habeatur determinata. De differentia meridianorum inter obſeruatoria Petropolitanum et Pariſinum tenendum, quod etiamſi concluſio heic inuenta vnius vel alterius ſecundi correctionem admitteret, tamen hinc probabile reddi obſeruatorium Petropolitanum a Pariſino minus diſtare, quam $1^h. 52'$. Longitudo autem pro obſeruatorio Petropolitano heic inuenta $5''$ correctionem vix admittere poterit, niſi valor Parallaxeos aequatoreae heic adhibitus decem ſcrupulis ſecundis ſit augendus, quod minime veriſimile videtur.

*De occultatione* 2 θ *Tauri* d. 28. Auguſti.

Pro immerſione huius ſtellae Petropoli ex calculo deduxi Parallaxin Longit. $19'. 9'', 7$, Latit ☽ apparentem $6°. 2'. 45'', 7$; ſemidiametrum ☽ apparentem $14'. 58'', 5$ et differentiam appar. Longit. Stellae et Lunae $10'. 6'', 5$. Pro emerſione vero colligitur Parall. Longit. $18'. 59'', 1$; Latit. ☽ ap-

par. $6^{\circ}.1'.35'',5$; ſemidiamet. ☽ apparens $14'.59'',8$ et differentia Longit. apparens $11'.18'',0$. Hinc vero habentur ſequentes expreſſiones pro tempore coniunctionis Petropolitano

| | | |
|---|---|---|
| ex immerſione | $12^h.47'.\ 8''$ | $+2,98.\delta-2,20\,y-1,29\,\pi$ |
| ex emerſione | $12.\ 47.\ 48$ | $-2,67.\delta+1,77.y+2,24.\pi$ |
| medium | $12.\ 47.\ 28$ | $+0,15.\delta-0,21.y+0,47.\pi$ |

et ſubtrahendo priorem concluſionem a poſteriori ſequens elicitur aequatio

$$40-5,65.\delta+3,97.y+3,53.\pi=0.$$

In hac aequatione ſi ponatur $\pi=0$; $\delta=-2$, fiet $397.y=-5130$ ideoque $y=-12'',9$, tum vero fiet tempus coniunctionis pro Petropoli $12^h.47'.30''$, hinc tempus verum coniunctionis pro obſeruatorio Pariſino $10^h.55'.33''$ et medium $10^h.56'.19''$ quo tempore eſſe debuit Longitudo Lunae $2^s.4^{\circ}.48'.29'',0$, at ex Tabulis Cel. *Mayeri* eſt $2^s.4^{\circ}.49'.12'',4$ eſſet igitur correctio Tabularum *Mayeri* $-43''$ modo de Longitudine ſtellae omnimoda adeſſet certitudo, quod quidem vix ſupponere licet, nam pro hac ſtella numeri Bradleyani circa aſcenſionem rectam, ab illis quos aſſignauit Cel. *la Caille* fere integro minuto primo diſcrepant. Tutiſſimum igitur erit correctionem Longitudinis Lunae pro hac obſeruatione ſtatuere tantum $-20''$, potiori errore in Longitudinem ſtellae deriuato.

De

*De occultatione* $\gamma$ *Tauri* d. 24. Sept.

Pro obſeruationibus huius occultationis calculus ſequentia praebuit elementa

| | Paral. Longit. | Latit. ☽ appar. | Semidiam. ☽ appar. | Differ. Longit. appar. |
|---|---|---|---|---|
| Pro immerſione Pariſiis | 8′. 35″, 7 | 5°. 43′. 7″, 2 | 15′. 12″, 0 | 15′. 7″, 6 |
| Pro emerſione ibidem | 3. 6, 5 | 5. 40. 36, 6 | 15. 12, 8 | 14. 33, 6 |
| Pro immerſione Petropoli | 14. 40, 8 | 5. 46. 50, 5 | 15. 10, 7 | 15. 10, [illegible] |

Hinc emergent expreſſiones pro tempore coniunctionis

Pariſiis ex immerſione $15^h.\ 9'.\ 9'' + 2{,}00.\delta + 0{,}28.y + 0{,}47.\pi$

emerſione $15.\ 8.\ 54\ - 2{,}07.\delta - 0{,}64.y - 0{,}46.\pi$

medium $15.\ 9.\ 1\ \quad - 0{,}18.y$

ſubtrahendo prodit aequatio $15\ + 4{,}07.\delta + 0{,}92.y + 0{,}93.\pi$

Petropoli ex immerſione $17^h.\ 0'.\ 51'' + 1{,}99.\delta - 0{,}21.y - 0{,}66.\pi$.

Si ſtatuatur $\pi = 0$ et $\delta = -2$, fiet ex aequatione pro Pariſiis $92 y = -686$ hincque $y = -7'', 4$, quae tamen determinatio pro omnimode exacta haberi nequit ob exiguum coefficientem ipſius $y$; interim tamen non multum a vero nos aberraturos confido, ſi ſtatuamus $y = -10$, tum autem ex concluſionibus pro immerſione habebitur differentia meridianorum inter obſeruatorium Cel. *Meſſier* et Petropolitanum $1^h.\ 51'.\ 42'' - 0{,}49.y - 1{,}13.\pi = 1^h.\ 51'.\ 47''$, ideoque differentia meridianor. inter obſeruatoria Pariſinum et Petropolitanum $1^h.\ 51'.\ 49''$, quae tamen nimis parua videtur. Pro Petropoli momentum a me obſeruatum adhibui, quodſi autem momentum Cel. *Rumovski* in vſum vocetur, Longitudo obſeruatorii Petropolitani adhuc quatuor ſecundis minor euaderet. Quicquid ſit, hinc ſaltem confirmatur Longitudinem

tudinem obſeruatorii Petropolitani aliquanto minorem eſſe quam $1^h. 52'$. Tempus coniunctionis verum pro Pariſiis fiet $15^h. 9'. 1''$, medium $15^h. 0'. 41''$, exiſtente Longitudine Lunae $2^s. 2^\circ. 39'. 16'', 8$ quae ex Tabulis Cel. *Mayeri* habetur $2^s. 2^\circ. 39'. 30'', 6$; ita vt hinc eliciatur correctio Tabularum pro Longitudine $-14''$, Latitudinis correctione ſuppoſita $-10''$.

*De occultationibus* $\gamma$, $1\,\theta$ *et* $\alpha$ *Tauri* die 18. Nou.

Pro obſeruationibus harum occultationum ſequentes inuenti ſunt valores

| | Paral. Longit. ☽ | Latit. ☽ appar. | Semidiam. ☽ appar. | Differ. Longit. apparens |
|---|---|---|---|---|
| Pro ſtella $\gamma$ Immerſio Pariſiis | 27'. 29'', 1 | 5°. 44'. 37'', 7 | 15'. 0'', 5 | 15'. 4'', 4 |
| Emerſio ibidem | 28. 17, 6 | 5. 42. 38, 8 | 15. 3, 0 | 14. 53, 6 |
| Immerſio Petropoli | 16. 32, 1 | 5. 44. 13, 8 | 15. 5, 2 | 15. 7, 6 |
| Emerſio ibidem | 12. 54, 8 | 5. 42. 3, 8 | 15. 7, 0 | 14. 50, 7 |
| Pro ſtella $1\,\theta$ Immerſio Pariſiis | 8. 35, 5 | 5. 31. 32, 3 | 15. 9, 3 | 4. 26, 0 |
| Emerſio ibidem | 6. 28, 9 | 5. 30. 57, 1 | 15. 9, 5 | 1. 29, 8 |
| Pro ſtella $\alpha$ Immerſio Pariſiis | 29. 45, 1 | 5. 27. 23, 5 | 15. 6, 6 | 15. 6, 9 |
| - - Petropoli | 33. 30, 1 | 5. 38. 14, 3 | 15. 2, 2 | 11. 44, 9 |

Hinc pro ſtella $\gamma$ ſequentes oriuntur expreſſiones pro tempore coniunctionis

Pariſiis ex immerſione $7^h. 18'. 33'' + 1,97.\delta + 0,09.y + 1,05.\pi$

ex emerſione $7. 18. 58 - 2,00.\delta - 0,35.y + 0,73.\pi$

hinc colligitur aequatio $25 - 3,97.\delta - 0,44.y - 0,32.\pi$

Petrop. ex immerſione $9. 10. 28 + 1,98.\delta + 0,14.y + 0,69.\pi$

emerſione $9. 10. 19 - 2,00.\delta - 0,42.y + 0,12.\pi$

et aequatio hinc reſultat $9 + 3,98.\delta + 0,56.y + 0,57.\pi$.

Iam facile quidem liquet aequationes ex obſeruationibus Pariſinis et Petropolitanis deductas nullo modo inter

inter ſe conciliari poſſe, et aequatio quidem ex obſeruationibus Pariſinis deducta nullo modo locum habere poteſt, niſi ipſi $y$ valor enormis tribuatur; nam ſi ſtatuatur $\delta = -2$ fieret $y = +75''$, qualis correctio Latitudinis omni deſtituitur probabilitate. Neceſſum igitur eſt vt obſeruatio emerſionis $\gamma$ quae Pariſiis ob nubes impedita fuit, aliquantum ſit erronea; quamuis enim Cel. *Meſſier* hunc errorem non niſi duorum ſcrupulorum ſecundorum aeſtimaverit, tamen calculus euidenter commonſtrat, plusquam viginti ſcrupulis ſecundis antea emerſionem contingere debuiſſe. Ex aequatione Petropolitana poſito $\pi = 0$ et $\delta = -3$ deducitur $y = +5$, de quo tamen valore nihil certi ſtatui poteſt, nam ſi ponatur $\delta = -2$, fieret $y = -2''$, igitur ſine errore ponere liceret $y = 0$. Comparatis inter ſe obſervationibus pro immerſione colligitur differentia meridianorum inter Pariſios et Petropolin $1^h. 51'. 57''$. Fit autem ex vtraque obſeruatione tempus verum coniunctionis pro obſeruatorio Pariſino $7^h. 18'. 26''$ et medium $7^h. 4'. 3''$, exiſtente Longitudine Lunae $2^s. 2^\circ. 39'. 33'', 3$; quae quum ex Tabulis *Mayeri* ſit $2^s. 2^\circ. 39'. 16'', 0$, erit correctio Tabularum $+ 17''$. Ex occultatione $1\ \theta$, pro obſeruatorio Cel. *Meſſier*, ſequenti modo exprimetur tempus coniunctionis Lunae cum hac ſtella

ex immerſione $11^h. 30'. 58'' + 6,76.\delta + 6,47.y + 4,14.\pi$
ex emerſione $11.\ 30.\ 29 - 20,03.\delta - 19,93.y - 11,35.\pi$
hinc colligitur aequatio $29 + 26,79.\delta + 26,40\,y + 15,49.\pi = 0$
ſumatur huius aequationis quarta pars, vt habeatur

$$7 + 6,67.\delta + 6,60.y + 3,87.\pi = 0$$

 ſub-

ſubtrahatur haec expreſſio a primo valore pro tempore coniunctionis et prodibit tempus coniunctionis

$$11^h.\ 30'.\ 51'' + 0,09.\delta - 0,13.y + 0,23.\pi,$$

vbi coefficientes correctionum $\delta$, $y$, $\pi$ iam tam ſunt exigui, vt tuto negligi queant. Caeterum ſi in aequatione ſuperiori ponatur $\delta = -3''$, fiet $y = +2''$ circiter, ideoque et heic ſine errore poni poteſt correctio Latitudinis Lunae $= 0$. Fit autem tempus medium coniunctionis Lunae cum ſtella 1 $\theta$ ad meridianum obſeruatorii Pariſini $11^h.\ 16'.\ 27''$ Temp. medio, exiſtente Longitudine Luna $2^s.\ 4^o.\ 48'.\ 35'',3$, at ex Tabulis *Mayeri* eſt $2^s.\ 4^o.\ 48'.\ 21'',6$, hinc correctio Tabularum $+14''$. Denique ex occultatione ipſius $\alpha$ Tauri, habetur Tempus coniunctionis

pro Pariſiis $15^h.\ 6'.\ 27'' + 1,98.\delta + 0,19.y - 1,00.\pi$
pro Petropoli $16.\ 58.\ 48 + 2,53.\delta - 1,59.y + 0,09.\pi$

hae igitur expreſſiones dant differentiam meridianorum

$$1^h.\ 52'.\ 21'' + 0,55.\delta - 1,78.y + 1,09.\pi,$$

ex quo ſequeretur ſi haec differentia meridianorum reapſe ſit $1^h.\ 51'.\ 55''$, correctionem ipſius $y$ eſſe ſaltem $13''$, quum vero ex binis prioribus obſeruationibus conſtet correctionem pro Latitudine Lunae eſſe multo minorem, probabile videtur hanc Latitudinis correctionem ipſi Latitudini ſtellae eſſe tribuendam. Interim tamen ſi ſtatuamus correctionem Latitudinis pro Luna eſſe $+5''$, id eſt Latitudinem Lunae Auſtralem tot ſecundis eſſe augendam; diminui debebit Latitudo ipſius $\alpha$ Tauri $8''$. Tempus coniunctionis pro Pariſiis

Pariſiis autem inuenietur $15^h. 6'. 22''$ et medium $14^h. 52'. 4''$, exiſtente Longitudine Lunae $2^s. 6^\circ. 38'. 52'', 4$, quae ex Tabulis *Mayeri* habetur $2^s. 6^\circ. 38'. 19'', 8$, vnde colligitur correctio Tabularum $+ 32'', 6$. Ex occultatione $\gamma$ Tauri haec correctio deducebatur $+ 17''$, ex occultatione vero $1\,\theta$ Tauri $+ 14''$, medio igitur inter has tres determinationes ſumto, erit correctio Longitudinis $+ 21''$, quam correctionem ita diſtribuere licebit per tres obſeruationes, vt ſtatuamus pro tempore coniunctionis Lunae cum $\gamma$ fuiſſe correctionem $+ 18''$, pro tempore coniunctionis cum $1\,\theta$ $+ 21''$, et pro tempore coniunctionis cum $\alpha$ Tauri $+ 24''$. Nam quod ſtella $\alpha$ Tauri primae magnitudinis proprium motum haud parum ſenſibilem habeat; id non ſolum valde probabile eſt, ſed etiam aliis atque aliis obſeruationibus, Aſtronomis confirmari viſum eſt.

Concluſiones in ſuperioribus inuentae, commode ſequentem in modum vno obtutu repraeſentari poterunt

| Coniunctio Lunae Tempore medio Pariſino A. 1774. | | Longitudo Lunae | Corr. Tabb. *Mayeri* | Latit. ☽ Auſtr. | Corr. Tabb. *Mayeri* |
|---|---|---|---|---|---|
| cum $\alpha$ Tauri d 22. Ian. | $5^h. 54'. 24''$ | $2^s. 6^\circ. 38'. 7'', 0$ | $- 29''$ | $4^\circ. 53'. 15''$ | $- 7''$ |
| $\gamma$ Tauri d. 18. Febr. | 5. 41. 39 | 2. 2. 38. 40, 4 | − 18 | 4. 56. 13 | − 12 |
| $\alpha$ Tauri d. 14. Apr. | 5. 47. 19 | 2. 6. 37. 51, 0 | − 15 | 5. 0. 22 | − 14 |
| $2\,\theta$ Tauri d. 28. Aug. | 10. 56. 19 | 2. 4. 48. 52, 0 | − 20 | 5. 13. 25 | − 13 |
| $\gamma$ Tauri d. 24. Sept. | 15. 0. 41 | 2. 2. 39. 16, 8 | − 14 | 5. 9. 56 | − 10 |
| $\gamma$ Tauri d. 18. Nou. | 7. 4. 3 | 2. 2. 39. 34, 3 | + 18 | 4. 58. 0 | + 5 |
| $1\,\theta$ Tauri - - - - | 11. 16. 27 | 2. 2. 48. 42, 6 | + 21 | 4. 59. 10 | + 5 |
| $\alpha$ Tauri - - - - | 14. 52. 4 | 2. 6. 38. 44, 0 | + 24 | 4. 59. 49 | + 5 |

Etſi hae correctiones maiores non ſunt, quam vt fidem facile inuenire queant, tamen illis omnimodam certitudinem vindicare nolo; ſiquidem in locis

 ſtella-

ſtellarum determinandis aliquanta aberratio admitti poſſit, vt taceam Longitudines et Latitudines ſtellarum ex aſcenſionibus rectis et declinationibus exacte determinari non poſſe, niſi obliquitas eclipticae perfecte habeatur cognita, de quo tamen elemento inter Aſtronomos non omnimodus eſt conſenſus. In his autem calculis obliquitatem eclipticae a Cel. *de la Lande* adoptatam adhibui; quae ſi minus exacta ſit, inde Latitudines praecipue ſtellarum aliqua adficientur correctione, quae tamen vix decem ſcrupula ſecunda excedere poterit.

Antequam finem huic disquiſitioni imponam, nonnulla conſectaria ex calculis allatis deducenda heic adiungam, quae Aſtronomis haud ingrata fore exiſtimo.

I. Concluſiones quae ex obſeruationibus eclipſium Solis, et occultationibus fixarum deriuantur, omnimodam certitudinem ſibi non vindicant, niſi quatenus de veris valoribus parallaxeos Lunae, diametrorum Lunae et Solis, nec non Latitudinis Lunae plena adſit certitudo. Quod autem valorem ſemidiametrorum attinet, fieri poteſt vt correctio illis tribuenda tantum ſit apparens, id eſt ob inflexionem radiorum luminis fieri poteſt, vt in calculo minor ſit adhibenda quantitas diametrorum, quam quae ipſis reuera competit. Haec autem correctio ob inflexionem nequaquam accurate determinari poteſt, antequam aliunde verae quantitates diametrorum exacte conſtent, quo in negotio aliquanta adhuc inter Aſtronomos eſt ſententiarum diuerſitas. Caeterum

rum raros valde oportet eſſe caſus, quibus eiusmodi ſuppetunt obſeruationes circa occultationes fixarum, vt ex iis ternae illae correctiones diametri Lunae, Latitudinis et Parallaxeos determinari poſſent. Pro hoc enim inſtituto primum adeſſe oportet obſeruationes immerſionis et emerſionis ex quibus elicitur aequatio, quae praecipue correctione ſemidiametri Lunae adficitur, dum correctiones Latitudinis et parallaxeos valde exiguis coefficientibus iſtam aequationem ingrediuntur, qualis eſt illa aequatio pro 14. Aprilis, Geneuae ex occultatione $\alpha$ Tauri

$$11 + 4,06.\,\delta - 0,03.\,y + 0,13.\,\pi = 0$$

ex hac enim aequatione, $\delta$, neglectis plane correctionibus $y$ et $\pi$, ſaltem proxime determinari poteſt. Deinde adeſſe oportet aequationem, in qua $y$ coefficiente poſitiuo ſatis magno adficitur, qualis eſt illa pro Petropoli die 14. Aprilis

$$63 - 7,39.\,\delta + 6,16.\,y + 4,50.\,\pi = 0.$$

Porro ſi fieri poſſit requireretur aequatio, in qua $y$ coefficiente negatiuo ſenſibili adficeretur, $\delta$ et $\pi$ iisdem ſignis adfectis, ac in aequatione priori; ſic enim ope harum trium aequationum, modo alioquin obſeruationes exacte fuerint inſtitutae, correctiones $\delta$, $y$, $\pi$ certiſſime definire licebit.

II. Quamuis hoc per obſeruationes die 14. Aprilis praeſtare non licuit, tamen id lucrati ſumus, vt correctionem $\delta$ ſaltem cum praeciſione ſemiſſis ſecundi determinare valuerimus. Quamuis enim hanc correctionem ſtatuerimus $-3''$, fieri vtique poteſt ſi

in obſeruatione Cel. *Meſſier* pro immerſione adſit error 2 ſcrupulorum ſecundorum, et in obſeruatione Cel. *Mallet* error vnius ſecundi, vt haec correctio ſtatui debeat — 2″, 5. Quodſi igitur valor diametri Lunae quem ex Tabulis *Mayeri* deduxi, ſit prorſus exactus, ſtatuere liceret effectum inflexionis radiorum, vel ſi placet refractionis in atmoſphaera Lunae, eſſe 3 ſcrupulorum ſecundorum, vel ſaltem 2″, 5. Sin autem haec diameter aliquantam diminutionem patiatur, vnius ex cauſſa minuti ſecundi vti Cel. *de la Lande* ſtatuit, hic effectus inflexionis erit tantum $2\frac{1}{2}$ vel 2 ſcrupulorum ſecundorum. Interim tamen integram hanc correctionem $\delta$ in illis caſibus adhiberi non poſſe exiſtimo, vbi minor aliqua ſtella ad limbum Lunae lucidum immergit, multoque minus quando circa limbum lucidum emergit; in priori enim caſu fieri poteſt, vt lumen ſtellae iuſto citius exſtinguatur, in poſteriori vero vt nimis tarde ſtella in conſpectum prodeat. Immo vix quidem definire audeo, an obſeruationibus etiam exactisſime inſtitutis, valor ipſius $\delta$ pro occultationibus omnium ſtellarum prodire debeat idem; certe ſi experientiam conſulamus, ſtellae quo minores ſunt et debilioris luminis, eo diutius limbo Lunae obſcuro inhaerere videntur, ita vt pro ſtellis minoribus effectus inflexionis radiorum videatur eſſe maior, quam pro ſtellis maioribus.

III. Quaecunque etiam adſit incertudo circa reliqua Elementa Lunae, tamen ſi adſint obſeruationes immerſionis et emerſionis pro aliqua occultatione

tione fixae, ope illarum verum tempus coniunctionis Lunae cum fixa, ſaltem proxime hoc eſt ſine aberratione quinque minutorum ſecundorum determinari poteſt. Nam ſi in expreſſionibus pro tempore coniunctionis, $\delta$, $y$, $\pi$ coefficientibus adficiantur exiguis, medium capere licebit ex concluſionibus pro immerſione et emerſione. Sic pro die 14. Aprilis medium ſumendo, colligitur tempus coniunctionis Lunae cum $\alpha$ Tauri Pariſiis $5^h. 47'. 16''$, neglectis correctionibus $y$ et $\pi$; quae determinatio vix magis quam quinque ſcrupulis ſecundis eſſe poteſt dubia. Si autem $\delta$, $y$, $\pi$ coefficientibus adficiantur magnis, eo modo procedendum eſt, ac ſupra tempus coniunctionis Pariſinum Lunae cum 1 $\theta$ Tauri, pro die 18. Nou. quaeſiuimus. Quum igitur Longitudo Lunae ſit elementum de quo imprimis quaeritur, praecipueque in eo elaborandum ſit, vt Tabulae Lunares quoad Longitudinem euadant exactae; facile hinc perſpicitur, quanti ſint vſus pro hoc inſtituto occultationes fixarum a Luna.

IV. Quoniam correctio Latitudinis Lunae plerumque multo maior eſſe ſolet, quam correctiones ſemidiametri Lunae et Parallaxeos, imprimis operae pretium eſt, vt iſta correctio determinetur; quod fieri poteſt ſi in aequatione quam correctiones $\delta$, $y$, $\pi$ ingrediuntur, $\delta$ et $\pi$ plane negligantur, ſic enim valor ipſius $y$ ſaltem proxime verus inuenietur. Hunc autem in vſum adhiberi debet aequatio, qua $y$ coefficiente ſatis magno adficitur, nam errores certe enormes committeret, qui valorem ipſius $y$ quae-

quaerere vellet ope aequationum, in quibus $y$ valde exiguum habet coefficientem. Vti ſi quis ex aequatione pro occultatione $\alpha$ Tauri d. 14. Aprilis Geneuae obſeruata, quaerere vellet valorem ipſius $y$, non poſſet non valde dubium huius correctionis invenire valorem. Contra vero ex aequatione Petropolitana neglectis etiam correctionibus $\delta$ et $\pi$ inuenitur $y = -10''$, quae a vera non multum recedere poterit.

V. Negari quidem nequit, quin eiusmodi adſint caſus, vbi ex obſeruationibus circa occultationes fixarum inter ſe comparatis vix quicquam certi de differentiis meridianorum definiri poteſt, ſcilicet dum in expreſſionibus pro tempore coniunctionis, $\delta$, $y$ et $\pi$ pro binis locis, valde diuerſos habent coefficientes, nec aliunde has correctiones definire licet. Huiusmodi autem incommodum certitudini Methodi, qua per huiusmodi obſeruationes differentiae meridianorum determinandae ſunt, prorſus nihil derogare cenſendum eſt. Dantur vero et plurimi alii caſus, vbi ex talibus obſeruationibus minus tutae deducuntur concluſiones, etiamſi ob incertitudinem circa correctiones modo dictas, nullum dubium oriri queat; neceſſum igitur eſt vt pro his caſibus incertitudo ipſis obſeruationibus vnice ſit tribuenda. Sic ſi inter ſe comparentur concluſiones pro coniunctione $\alpha$ Tauri cum Luna die 14. Aprilis ad meridianos Pariſinum et Mediolanenſem ex immerſione repertae, habebitur differentia meridianorum

$$27'.\ 5'' + 0,24.y,$$

quae

quae cum vera $27'. 20''$ omnino conciliari nequit, niſi $y$ ſtatueretur $65''$, quod omni probabilitate deſtituitur. Id igitur tantum remanet, vt credamus momentum pro immerſione Mediolanenſi a me adhibitum viginti ſcrupulis ſecundis eſſe augendum.

VI. In praecedenti Tomo noſtrorum Commentariorum dum de coniunctione Palilicii cum Luna die 1. Nouemb. 1773. agebam, adfirmaui in comparatione loci Lunae cum ſtellis fixis, rationem etiam eſſe habendam perturbationum, quibus Luna a reliquis Planetis praeter tellurem adficitur; verum re melius penſitata in eam deueni ſententiam, quod hae perturbationes omnino negligi debeant, dum locus Lunae cum ſtella fixa comparatur. Scilicet dum de loco Lunae quaeſtio eſt, intelligitur eius locus Geocentricus, patet autem locum Lunae reſpectu fixarum e tellure viſum non mutari, ſi telluri et Lunae ſimul eaedem ad ſenſum perturbationes ex actionibus Planetarum oriundae tribuantur. Secus autem res ſe habet in Eclipſibus Solaribus, tum enim loco Lunae eaedem perturbationes ſunt tribuendae, quae loco Solis adplicantur, ſiquidem alias locus Lunae promoueretur vel retrocederet, ea quantitate qua locus telluris ob actiones planetarum mutatur.

---

# EXPERIMENTA ACV MAGNETICA PETROPOLI INSTITVTA.

Auctore

*W. L. KRAFFT.*

Acus magneticae inclinatio ex Clar. *Malleti* obſeruatione, praeſtantibus inſtrumentis inſtituta, initio anni 1769. Petropoli 73°. 45′ eſt inuenta. Interiecto ſex annorum interuallo ſuſpicari merito licuit, ſi qua ſenſibilis variatio annua, qualem in acu declinatoria dudum prodidit experientia, magnetis quoque inclinationem adficiat, fore, vt ea, captis de nouo experimentis, indicio iam non ambiguo ſeſe ſit manifeſtatura. Antiquioribus obſeruationibus, quae in Cel. *de l'Islii* diario recenſentur, adeo vaga ineſt incertitudo, vt quis fruſtra in iis annuae variationis veſtigia quaereret: obſtitit ſine dubio feliciori in inclinationis theoria ſucceſſui inſtrumentorum imperfectio; hoc autem obſtaculo Cel. mathematicorum, *Euleri* et *Bernoullii*, ſtudiis feliciſſime remoto, ad penitiorem virium magneticarum cognitionem experimentis perficiendam vix quidquam eſt optabilius, quam vt plura capiantur in diuerſis terrae regionibus, et frequentiora in iisdem acus inclinatoriae experimenta. Acuum diuerſitas ne quid diſcriminis obſeruationi Cl. *Malleti* et meae intuliſſe

tuliſſe videatur; acu ſum, quam ille adhibuerat, eadem vſus; etſi detrimentum in itinere, quo Cl. *Mallet* id inſtrumentum in Laponiam transportauit, captum dum reſarciretur; centrum grauitatis huius acus diuerſam a priori poſitionem eſt adeptum. Reliqua inſtrumenti indoles in Comment. Tomo XIV. legitur relata. Ipſam autem methodum, qua ope eiusmodi acus vera inclinatio magnetica determinatur, quaeque in Actis Berolin. ad annum 1755. vberius deſcripta eſt, breuiter et diſtincte ex ipſis principiis repetitam, quo ſequentia clarius perſpiciantur, hic ante oculos ponere conueniet.

Acus deſcripto modo conſtructa *tribus viribus* ad motum ſollicitatur.

I. *Prima vis* naſcitur *a proprio acus pondere*, ſi quidem centrum grauitatis G cum centro oſcillationis O non perfecte coincidat. Conf. in Comm. Tom. XIV. Tab. I. fig. 3. Sit hoc pondus, cui etiam, demto indice, pondus annuli accenſetur, $= A$; diſtantia inter centra grauitatis et oſcillationis $= OG = g$; angulus $AOG = \gamma$ et inclinatio obſeruata $EOP = \vartheta$; quibus poſitis vis huius cuſpidem P eleuantis momentum habebitur $= A\,g.\,\text{ſin.}\,(\vartheta + \gamma)$.

II. *Secunda vis* oritur *a ponduſculo indicis annexi* I, quod ſi ponatur $= M$; interuallum $OI = d$; et poſitio indicis ſeu angulus $AOI = \eta$; oritur hinc momentum vis cuſpidem P deprimentis $= M\,d.\,\text{ſin.}\,(\eta - \vartheta)$.

III. *Tertia* denique vis eſt *vis magnetica.* Huius vt eruatur momentum, repraeſentet tabula planum meridiani magnetici M E R, a quo circulus verticalis M U R, in quo acus eſt mobilis, declinet angulo E R U $= \omega$. Exprimat, ductis ad centrum O horizontalibus E O et U O, angulus E O S veram inclinationem magneticam $= \alpha$ in ipſo meridiano magnetico; angulus vero UOP inclinationem in circulo verticali MUR obſeruatam $= \vartheta$; ſit porro circuli maximi per S et P ducti arcus SP $= \Phi$ et quantitas vis magneticae, qua acus eſt imbuta, $= V$. Acus itaque in verticali M P R conſtituta ſollicitabitur in directione obliqua plani P O S vi $= V. \text{ſin.} \Phi$; ſiquidem effectus obliquitatis incidentiae eſt in ratione ſimplici et directa ſinus incidentiae; quam primariam magnetiſmi legem elegantibus et ingenioſis experimentis extra omne dubium poſuit Cel. *Lambertus*, in diſſertatione Actorum Berolin. Tomo XXII. ad annum 1766. inſerta Analyſe de quelques experiences faites ſur l'aiman. Iſta ergo vis obliqua in korizontalem et verticalem, id eſt *convertricem* et *inclinatricem* reſoluta praebet momentum vis inclinatricis, cuſpidem P deprimentis

$$= V. \text{ſin.} \Phi \text{ coſ. } SPR.$$

In triangulo autem ſphaerico S P R habetur

$$\text{ſin } SPR = \frac{\text{coſ.} \alpha. \text{ſin.} \omega}{\text{ſin.} \Phi} \text{ et}$$

$$\text{tang. } SPR = \frac{\text{coſ.} \alpha. \text{ſin.} \omega}{\text{ſin.} \alpha. \text{coſ.} \vartheta - \text{ſin.} \vartheta. \text{coſ.} \alpha. \text{coſ.} \omega}$$

vnde ſtatim habetur

$$\text{ſin.} \Phi. \text{coſ.} SPR = \text{ſin.} \alpha. \text{coſ.} \vartheta - \text{coſ.} \alpha. \text{ſin.} \vartheta. \text{coſ.} \omega$$

ita,

ita, vt vis magneticae inclinatricis, qua acus ſollicitatur, momentum ſit

$$= V(\text{ſin.}\,\alpha.\,\text{coſ.}\,\vartheta - \text{coſ.}\,\alpha.\,\text{ſin.}\,\vartheta.\,\text{coſ.}\,\omega)$$

quorum momentorum ex vtraque parte aequalitas pro ſtatu aequilibrii poſito

$\frac{A\,g}{M\,d} = m$; et $\frac{V}{M\,d} = n$ praebet

$$m\,\text{ſin.}(\vartheta+\gamma) = \text{ſin.}(\eta-\vartheta) + n(\text{ſin.}\,\alpha.\text{coſ.}\,\vartheta - \text{coſ.}\,\alpha.\text{ſin.}\,\vartheta.\text{coſ.}\,\omega)$$

atque hinc

$$\text{tang.}\,\vartheta = \frac{\text{ſin.}\,\eta + n.\,\text{ſin.}\,\alpha - m.\,\text{ſin.}\,\gamma}{\text{coſ.}\,\eta + n.\,\text{coſ.}\,\alpha.\,\text{coſ.}\,\omega + m.\,\text{coſ.}\,\gamma}.$$

Hiſce iam explicatis ad ipſa experimenta progredior.

Acum deſcriptam ſub initio anni 1775. valida, quantum potui, vi magnetica imbui et ſequentia tria experimenta inſtitui.

*I. In ipſo meridiano magnetico, vbi* $\omega = 0$

| $\eta$ | Inclin. obſeru. $= \vartheta$ |
|---|---|
| 0 | + 32°. 40′ |
| 90 | + 81. 30 |
| 180 | + 131. 15 |
| 270 | − 27. 15. |

Erit ergo ob $\omega = 0$,

$$\text{tang.}\,\vartheta = \frac{\text{ſin.}\,\eta + n.\,\text{ſin.}\,\alpha - m.\,\text{ſin.}\,\gamma}{\text{coſ.}\,\eta + n.\,\text{coſ.}\,\alpha + m.\,\text{coſ.}\,\gamma}$$

quae formula ad has obſeruationes adplicata praebet adproximando, vt ſcilicet diſcrepantia calculi ab obſeruationibus vbique euadat minima,

$$n.\,\text{ſin.}\,\alpha - m.\,\text{ſin.}\,\gamma = 0,8508$$

$$n.\,\text{coſ.}\,\alpha + m.\,\text{coſ.}\,\gamma = 0,2800.$$

*II. In ipſo meridiano magnetico, ſed acu ita conuerſa, vt cuſpis borealis verſus auſtrum dirigeretur, adeoque* $\omega = 180$.

| $\eta$ | $\vartheta$ |
|---|---|
| 0 | + 46°. 45′ |
| 90 | + 97. 15 |
| 180 | + 146. 0 |
| 270 | + 212. 33. |

Pro hoc itaque experimento erit

$$\text{tang. } \vartheta = \frac{\text{ſin. } \eta + n.\text{ſin. } \alpha - m.\text{ſin. } \gamma}{\text{coſ. } \eta - n.\text{coſ. } \alpha + m.\text{coſ. } \gamma}$$

et ſimili adproximatione ex his obſeruationibus colliguntur ſequentes valores:

$$n.\text{ ſin. } \alpha - m.\text{ ſin. } \gamma = 0,8490$$
$$-n.\text{ coſ. } \alpha + m.\text{ coſ. } \gamma = -0,2300.$$

*III. In plano ad meridianum magneticum normali, vt ſit* $\omega = 90$

| $\eta$ | $\vartheta$ |
|---|---|
| 0 | + 38°. 50′ |
| 90 | + 88. 40 |
| 180 | + 138. 40 |
| 270 | + 278. 52 |

cum hoc caſu ſit

$$\text{tang. } \vartheta = \frac{\text{ſin. } \eta + n.\text{ſin. } \alpha - m.\text{ſin. } \gamma}{\text{coſ. } \eta + m.\text{coſ. } \gamma}$$

elicitur hinc

$$n.\text{ ſin. } \alpha - m.\text{ ſin. } \gamma = 0,8510$$
$$m.\text{ coſ. } \gamma = 0,0249.$$

Prodiit

Prodiit autem ex experimento

$1^{mo}.\quad n.\ \text{coſ.}\ \alpha + m.\ \text{coſ.}\ \gamma = \quad 0,2800$

$II^{do.} - n.\ \alpha\ \text{coſ.} + m.\ \text{coſ.}\ \gamma = -0,2300$

vnde fit

$n.\ \text{coſ.}\ \alpha = 0,2550;$ et $m.\ \text{coſ.}\ \gamma = 0,0250;$

qui vltimus valor vix diſcrepat ab eo, quem modo inuenimus. His ergo inuentis pro omnibus allatis obſeruationibus generatim habebitur

$$\text{tang.}\ \vartheta = \frac{\text{ſin.}\ \eta + 0,1500}{\text{coſ.}\ \eta + 0,0250 + 0,2550.\ \text{coſ.}\ \omega}$$

quae formula quantum conſentiat cum ipſis obſeruationibus, ex ſequenti tabula perſpicitur:

| | | | Ex calculo |
|---|---|---|---|
| I. | $\omega = 0;$ | $\eta = 0;$ | $\vartheta = +\ 33^\circ.\ 36'$ |
| | | $= 90;$ | $\vartheta = +\ 81.\ 23$ |
| | | $= 180;$ | $\vartheta = +130.\ 16$ |
| | | $= 270;$ | $\vartheta = -\ 27.\ 15.$ |
| II. | $\omega = 90;$ | $\eta = 0;$ | $\vartheta = +\ 39^\circ.\ 40'$ |
| | | $\eta = 90;$ | $\vartheta = +\ 89.\ 14$ |
| | | $\eta = 180,$ | $\vartheta = +138.\ 55$ |
| | | $\eta = 270;$ | $\vartheta = +279.\ 28$ |
| III. | $\omega = 180;$ | $\eta = 0;$ | $\vartheta = +\ 47^\circ.\ 50$ |
| | | $\eta = 90;$ | $\vartheta = +\ 97.\ 6$ |
| | | $\eta = 180;$ | $\vartheta = +145.\ 20$ |
| | | $\eta = 270;$ | $\vartheta = +213.\ 7$ |

vnde perſpicitur, calculi ab obſeruationibus diſcrepantiam vix vnum gradum ſuperare, quamobrem va-

loribus

loribus inuentis ad determinationem inclinationis magneticae ſatis tuto vti licebit. Cum itaque ſit

$$n.\text{coſ}.\alpha = 0,2550;\ \text{et}\ m.\text{coſ}.\gamma = 0,0250;\ \text{erit}$$

$$n = \frac{0,2550}{\text{coſ}.\alpha}\ \text{et}\ m = \frac{0,0250}{\text{coſ}.\gamma}$$

quibus valoribus in aequatione

$$n.\ \text{ſin}.\ \alpha - m.\ \text{ſin}.\ \gamma = 0,8500$$

ſubſtitutis colligitur

$$0,2550.\ \text{tang}.\ \alpha - 0,0250.\ \text{tang}.\ \gamma = 0,8500.$$

Ex qua igitur aequatione inclinatio magnetica ſtatim innoteſceret, modo quantitas anguli $\gamma$ fuerit cognita. Ad hunc vero angulum qui quidem in inſtrumento exactiſſime elaborato deberet eſſe nullus, definiendum nulla alia adhuc patet via, niſi vt acus inclinatoriae poli inuertantur, contrarium ſcilicet magnetiſmum ipſis inducendo, et eaedem prorſus obſeruationes repetantur; hinc enim analoga priori pro inclinatione magnetica obtinetur aequatio, quam quidem quantitas $\gamma$ adhuc ingreditur, ſed ob $n$ quantitatem iam negatiuam ſigno contrario, ac ante, adfecta, ita, vt duarum aequationum hoc modo inuentarum combinatione quantitas illa incognita $\gamma$ prorſus ex calculo eliminetur Polis igitur inuerſis ſequentes inſtitui obſeruationes, quas iam breuiter recenſuiſſe ſufficiet.

I. $\omega = 0$

| $\eta$ | $\vartheta$ | |
|---|---|---|
| 0 | $-\ 54^\circ.\ 38'$ | hinc colligimus |
| 90 | $-\ 151.\ 15$ | $n.\text{ſin}.\alpha - m.\text{ſin}.\gamma = -1,1103$ |
| 180 | $-\ 137.\ 30$ | $n.\text{coſ}.\alpha + m.\text{coſ}.\gamma = -0,2011$ |
| 270 | $+\ 264.\ 30$ | |

II.

II. $\omega = 180$.

| $\eta$ | $\vartheta$ |
|---|---|
| 0 | $180^\circ. + 139^\circ. 30'$ |
| 90 | $180. + 163. 20$ |
| 180 | $180. + 55. 30$ |
| 270 | $- 83^\circ. 30'$ |

hinc habetur

$-n.\text{coſ.}\,\alpha + m.\,\text{ſin.}\,\gamma = +0,2550$

$n.\,\text{ſin.}\,\alpha - m.\,\text{ſin.}\,\gamma = -1,0801$

adeoque $n.\text{coſ.}\,\alpha = -0,2275$; $m.\text{coſ.}\,\gamma = +0,0275$ cum vero vltimus hic valor nullam ſubire variationem debuiſſet; ſtatuatur ſumto medio

$$m.\,\text{coſ.}\,\gamma = 0,0262;$$

vnde ſimili modo ſequens colligitur aequatio

$$0,2275.\,\text{tang.}\,\alpha + 0,0262.\,\text{tang.}\,\gamma = 1,0952$$

quae cum priori combinata praebet

$$0,4825.\,\text{tang.}\,\alpha = 1,9452$$

adeoque $\alpha = 76^\circ. 4'$.

Quo autem inſtituto meo, quantum fieri licet, exacte ſatisfacerem; acum plane nouam omni, qua potui, circumſpectione conſtrui curaui.

## Experimenta acu recens conſtructa inſtituta.

*I. In ipſo meridiano magnetico, vbi* $\omega = 0$.

| | $\eta$ | inclinat. obſeru. $= \vartheta$ |
|---|---|---|
| I. | 0 | $+ 16^\circ. 43'$ |
| II. | 90 | $+ 86. 7$ |
| III. | 180 | $+ 160. 10$ |
| IV. | 270 | $+ 277. 40.$ |

 Hinc

Hinc colligitur

| ex aequatione | $n.$ ſin. $\alpha - m$ ſin $\gamma$ | $m.$ coſ. $\gamma + n.$ coſ. $\alpha$ |
|---|---|---|
| I$^{ma}$. et II$^{da}$ | 0, 32833 | 0, 09094 |
| I. et III | 0, 32640 | 0, 09026 |
| I. et IV | 0, 32702 | 0, 08661 |
| II. et III | 0, 32789 | 0, 09091 |
| II. et IV | 0, 33060 | 0, 09110 |
| III. et IV | 0, 32768 | 0, 09150 |

ex quibus habentur valores medii

$$n \text{ ſin. } \alpha - m. \text{ ſin. } \gamma = + 0,32799$$
$$m. \text{ coſ. } \gamma + n. \text{ coſ. } \alpha = + 0,09022.$$

*II. In ipſo meridiano magnetico, ſed acu converſa, vt ſit* $\omega = 180$.

| $\eta$ | $\vartheta$ |
|---|---|
| 0 | $+ 19^\circ. 25'$ |
| 90 | $+ 93. 15$ |
| 180 | $+ 163. 0$ |
| 270 | $+ 263. 45.$ |

Hinc prodit

| ex aequatione | $n$ ſin. $\alpha - m.$ ſin. $\gamma$ | $m.$ coſ. $\gamma - n.$ coſ. $\alpha$ |
|---|---|---|
| I$^{ma}$. et II$^{da}$ | 0, 32591 | − 0, 07529 |
| I. et III | 0, 32745 | − 0, 07103 |
| I. et IV | 0, 32648 | − 0, 07376 |
| II. et III | 0, 32880 | − 0, 07545 |
| II. et IV | 0, 31709 | − 0, 07479 |
| III. et IV | 0, 32822 | − 0, 07357 |
| ſiue ſumto medio | 0, 32566 | − 0, 07398 |

et

et cum valor $n$. ſin. $\alpha - m$. ſin. $\gamma$ hic inuentus a priori tantillum, quantitate ſcilicet 0, 00233, diſcrepet; ſumamus medium inter vtrumque vt ſit

$n$. ſin. $\alpha - m$. ſin. $\gamma = 0, 32682$

porro ex praemiſſis colligitur

$m$. coſ. $\gamma = 0, 00812$; et $n$. coſ. $\alpha = 0, 08210$

ita, vt pro hoc inſtrumento et ad tempus inſtitutae obſeruationis in genere ſit

$$\text{tang. } \vartheta = \frac{\text{ſin. } \eta + 0,32682}{\text{coſ. } \eta + 0,00812 + 0,08210 . \text{coſ. } \omega}.$$

*III. In plano ad meridianum magneticum normali, vbi* $\omega = 90$

| $\eta$ | $\vartheta$ |
|---|---|
| 0 | + 17°. 50′ |
| 90 | + 89. 45 |
| 180 | + 161. 40 |
| 270 | + 270. 45 |

quibus obſeruationibus quam exacte ſatisfaciant valores modo inuenti; ex ſequenti tabula perſpicitur:

Inclinationes computatae

| $\eta$ | $\omega = 0$ | $\omega = 90$ | $\omega = 180$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 16°. 45′ | 17°. 58′ | 19°. 26′ |
| 90 | 86. 5 | 89. 39 | 93. 12 |
| 180 | 160. 10 | 161. 46 | 163. 4 |
| 270 | 277. 45 | 270. 42 | 263. 44. |

Valores autem iſti, de quorum praeciſione dubitare iam non licet, pro definienda vera inclinatione magnetica hanc ſuppeditant aequationem:

$0,08210.\text{tang.}\,\alpha - 0,00812.\text{tang.}\,\gamma = 0,32682.$

Inuerſis autem polis, ſequentes obſeruatae ſunt inclinationes:

*I. In meridiano magnetico*, $\omega = 0$

| $\eta$ | $\vartheta$ |
|---|---|
| 0 | $-\ 19^\circ.\ 15'$ |
| 90 | $+\ 96.\ 45$ |
| 180 | $+\ 196.\ 25$ |
| 270 | $+\ 266.\ 30$ |

hinc eadem, ac ante, methodo inuenimus

$n.\,\text{ſin.}\,\alpha - m.\,\text{ſin.}\,\gamma = -0,31991$

et $n.\,\text{coſ.}\,\alpha + m.\,\text{coſ.}\,\gamma = -0,08131.$

*II. In ipſo meridiano magnetico, ſed acu conuerſa, vt ſit* $\omega = 180^\circ$

| $\eta$ | $\vartheta$ |
|---|---|
| 0 | $-\ 16^\circ.\ 22'$ |
| 90 | $+\ 81.\ 50$ |
| 180 | $+\ 199.\ 25$ |
| 270 | $-\ 85.\ 48$ |

quae obſeruationes praebent

$n.\,\text{ſin.}\,\alpha - m.\,\text{ſin.}\,\gamma = -0,32000$

$m.\,\text{coſ.}\,\gamma - n.\,\text{coſ.}\,\alpha = +0,09700$

vnde ex praemiſſis colligitur

$m.\,\text{coſ.}\,\gamma = 0,00784$ et $n.\,\text{coſ.}\,\alpha = -0,08915.$

Propius vero ad veritatem accedemus, ſi quia formula $m.\,\text{coſ.}\,\gamma$, quae polorum acus magneticae inverſione

verſione inuariata manere debuiſſet, quantitate 0,00028 iam fuerit imminuta, ſumto medio ſtatuamus

$m. \cos. \gamma = 0,00798$; $n. \cos. \alpha = -0,08915$

qui valores obſeruationibus optime ſatisfaciunt; habebitur enim in genere

$$\text{tang.}\, \vartheta = \frac{\sin. \eta - 0,3200}{\cos. \eta + 0,00798 - 0,08915. \cos. \omega}$$

vnde iſtae inclinationes iam ex calculo ita ſe habebunt:

| $\eta$ | $\omega = 0$ | $\omega = 180$ |
|---|---|---|
| 0 | $\vartheta = -\ 19^\circ.\ 13'$ | $\vartheta = -\ 16^\circ.\ 16'$ |
| 90 | $+\ 96.\ 49$ | $+\ 81.\ 52$ |
| 180 | $+\ 196.\ 32$ | $+\ 199.\ 31$ |
| 270 | $+\ 266.\ 28$ | $-\ 85.\ 48.$ |

Ex his ergo valoribus iam ſequens reſultat aequatio finalis

$0,08915. \text{tang.}\, \alpha + 0,00798. \text{tang.}\, \gamma = 0,31995$

et cum antea fuerit

$0,08210\ \text{tang.}\, \alpha - 0,00798. \text{tang.}\, \gamma = 0,32682$

concluditur hinc

$0,17125. \text{tang.}\, \alpha = 0,64677$

adeoque $\alpha = 75^\circ.\ 10'$.

Quodſi igitur inter has duas determinationes, duabus acubus plane diuerſis obtentas, ſumamus medium: colligitur

*Ad finem anni* 1774. *Petropoli acus magneticae* 16 *poll.* 7. *lin. decim. pedis Londin. longae inclinatio* $75^\circ.\ 37'$.

 Haec

Haec inclinatio ſuperat 1°. 52′ eam, quae ſex abhinc annis hic a Cel. *Malleto* eſt obſeruata; quod incrementum ſi ſingulis annis ſtatuamus fuiſſe vniforme; prodiret hinc variatio inclinationis magneticae annua Petropoli + 18⅔ minut. primor.

## Declinatio acus magneticae

Menſe Decembri 1774. ope acus quatuor pollices longae inuenta eſt 4°. 50′ a ſeptentrione verſus occidentem; vnde hic loci declinatio iam creſcere videtur; erat enim teſtante diario Cel. *Des l'Iſlii*

anno 1726 - - 3°. 15′ ex obſ. Cel. *Mayeri*
1727 - - 2°. 35′ ex obſ. Cel. *de l'Iſlii*
1730 - - 4°. 40′
1741 - - 3°. 56′

Cel. *Braunius* in Nou. Comm. Tom. IX. pag. 42. ait ſe anno 1758. reperiſſe declinationem magnetis, vt fere ſemper, 4°. 30′ N. W. quae omnia haud obſcura praebent periodicae alicuius variationis, temporis ſucceſſu probandae, indicia.

DVARVM

# DVARVM ECLIPSIVM SOLIS DIE $\frac{15}{26}$. OCTOBRIS 1772 ET D. $\frac{11}{22}$. MARTII 1773. OBSERVATIONES FACTAE IN VRBE DMITRIEWSK.

*a PETRO INOCHODZOW.*

Motum penduli diebus obſeruationes has praecedentibus et proxime inſequentibus ope altitudinum Solis correſpondentium explorau, quarum concluſiones hic exhibere neceſſum eſt.

| | | |
|---|---|---|
| Die $\frac{11}{22}$. Octobr. 1772. Merid. ex alt. correſp. | | $0^h. 0'. 11'', 3$ |
| | correct. merid. | + 17,5 |
| | Meridies verus | 0. 0. 28,8 |
| Die $\frac{15}{26}$. Octobr. merid. ex alt. correſp. | | 0. 0. 42 |
| | correct. | + 17,2 |
| | Merid. ver. | 0. 0. 59,2 |
| Die $\frac{20}{31}$. Octobr. merid. ex alt. correſp. | | 0. 1. 19,5 |
| | correct. | + 18,3 |
| | Merid. ver. | 0. 1. 37,8 |

E quibus acceleratio diurna $7'', 6$

Die $\frac{15}{26}$. Octobr. Initium Eclipſeos ob nubes aliquantum ſero obſeruaui, finis tamen licet per nubeculas obſeruatas eſt $1^h. 23'. 58''$, ſeu in temp. vero $1^h. 22'. 58'', 5$.

Die

| | | |
|---|---|---|
| Die $\frac{11}{22}$. Mart. 1773. mer. ex alt. Solis corr. | | $0^h.1'.10''$, 3 |
| | correctio | — 19,64 |
| | merid. verus | 0. 0. 50,66 |
| Die $\frac{13}{24}$. merid. ex altitud. correſp. | | 0. 0. 58, 5 |
| | correctio | — 19,54 |
| | merid. correctus | 0. 0. 18,96 |

Die $\frac{11}{22}$. Mart. Ante ortum Solis coelum circa horizontem erat maxime nubilum, ita vt omnem abiiciebam ſpem obſeruandi ingreſſus diſci lunaris in ſolem; caſu tamen felici nubes erant remotae, initium Eclypſeos bene obſeruare potui $18^h.43'.41''$, ſeu in tempore vero $18^h.43'.39''$.

Erant vero in margine Solis, vbi ingrediebatur Luna, duae paruae maculae, quarum ſequentem Luna texit $18^h.46'.52''$, aut in tempore vero $18^h.46'.50''$.

Ambae hae Eclypſes obſeruatae tubo Dollondiano 12 pedum.

Mox deinde fit nubilum et nix parca, denique circa medium Eclypſeos ſole trans nubes viſo ſequentes obſeruationes quadrantis ope inſtitui.

## I. Obſeruatio tubus in altitudine $17°.36'.40''$

| | Temp. hor. | Temp. verum |
|---|---|---|
| Limbus Solis apparenter inferior | h. m. s. | h. m. s. |
| ad filum horizont. - - | 19. 44. 17 | 19. 44. 14,7 |
| Cornu inferius ad filum vertic. | 44. 31 | 44. 28,7 |
| —— ſuperius - - - - | 46. 4 | 46. 1,7 |
| Limbus Lunae ad fil. vert. | 46. 24 | 46. 21,7 |
| Limb. ☉lis ad fil. vert. - - | 47. 0 | 46. 57,7 |

II.

## II. Obſeru. alt. tub. 18°. 16′. 40″

| | Temp. hor. h. m. s. | Temp. verum h. m. s. |
|---|---|---|
| Limbus ⊙ infer. ad fil. horiz. | 19. 49. 51 | 19. 49. 48,6 |
| Cornu inferius ad fil. horiz. | 50. 9 | 50. 6,6 |
| Limbus ☽ ad fil. h. - - | 50. 35 | 50. 32,6 |
| Cornu ſuperius ad fil. vert. | 52. 15 | 52. 12,6 |
| Limb. ☽ ad f. v. - - - | 52. 23 | 52. 20,6 |
| Cornu inferius ad f. v. - - | 52. 45 | 52. 42,6 |
| Limb. ⊙ ad f. v. - - - | 53. 1 | 52. 58,6 |

## III. Obſeru. alt. tub. 18°. 56′. 40″

| | | |
|---|---|---|
| Limb. ⊙ ad fil. horiz. - - | 19. 55. 26 | 19. 55. 23,6 |
| Cornu inferius ad f. v. - - | 55. 40 | 55. 37,6 |
| Limbus ☽ ad f. h. - - | 56 17 | 56. 14,6 |
| Cornu inferius ad f. h. - - | 57. 33½ | 57. 31 |
| —— ſuperius ad f. v. - - | 58. 8 | 58. 5,6 |
| idem ad f h. - - - - | 58. 13 | 58. 10,6 |
| Limb. ⊙ ad fil. vert. - - | 58. 20 | 58. 17,6 |

## IV. Obſeru. alt. tub. 19°. 56′. 40″

| | | |
|---|---|---|
| Limb. ⊙ inf. ad f. h. - - | 19. 59. 57 | 19. 59 54,5 |
| Cornu infer. ad f v. - - | 20. 0. 15 | 20. 0. 12,5 |
| Limb. ☽ ad f. h. - - - | 0. 50 | 0. 47,5 |
| Cornu ſuperius fit nunc inferius. | | |
| Cornu nunc infer. ad f. h. - | 2. 19 | 2. 16,5 |
| —— —— ſuper. ad idem - | 2. 38 | 2. 35,5 |

V. Obſeru. alt. tub. 21°. 56′. 40″

| | Temp. hor. h. m. s. | Temp. verum h. m. s. |
|---|---|---|
| Limb. ☉ inf. ad f. h. - - | 20. 13. 39 | 20. 13. 36,4 |
| —— praeced. ad f. v. - - | 13. 57 | 13. 54,4 |
| Cornu nunc ſuper. ad f. v. | 14. 23 | 14. 20,4 |
| Limbus ☽ ad f. h. - - | 14. 43 | 14. 40,4 |
| Cornu nunc infer. ad f. h. | 16. 7 | 16. 4,4 |
| idem ad f. v. - - - - | 16. 18 | 16. 15,4 |
| Corn. nunc ſuper. ad f. h. | 17. 11 | 17. 8,4 |

VI. Obſeru. alt. tub. 22°. 36′. 40″

| | | |
|---|---|---|
| Limb. ☉ praeced. ad f. v. - | 20. 20. 33 | 20. 20. 30,3 |
| —— infer. ad f. h. - - - | 20. 38 | 20. 35,3 |
| Limb. ☽ ad f. v. - - - | 21. 15 | 21. 12,3 |
| Cornu nunc ſuper. ad f. v. | 21. 23 | 21. 20,3 |

Rurſus nubes tegunt coelum et ningit; finem Eclypſis ob eandem cauſſam obſeruare non licuit.

Has obſeruationes Cel. *Lexell* methodo ſua in Commentariis expoſita computare voluit. Ex fine Eclypſis Solis die $\frac{15}{26}$. Octobr. 1772. obſeruato deducitur tempus coniunctionis verum Solis et Lunae pro vrbe Dmitriewsk

$$0^{\circ}.\ 50'.\ 32'' - 2,28\,\delta + 1,53\,y - 1,23\,\pi$$

ſignificantibus $\delta$, $y$, $\pi$ correctionibus ſummae ſemidiametrorum Solis et Lunae, latitudinis Lunae et parallaxis eius aequatoreae. At pro Tyrnauia habentur ex obſeruato initio et fine ſequentes expreſſiones pro tempore coniunctionis:

22ᵇ.

$22^h. 59'. 34'', 8 + 4, 42\,\delta - 4, 09.y + 3, 78\,\pi$

$22. \;59. \;17, \;3 - 3, 89\,\delta + 3, 49.y - 1, 59\,\pi.$

Vnde ſequens colligitur aequatio

$17'', 5 + 8, 31\,\delta - 7, 58.y + 5, 37\,\pi = 0$

ſumta iam quinta parte huius aequationis, quae eſt

$3'', 4 + 1, 66\,\delta - 1, 52.y + 1, 07\,\pi = 0,$

eaque addita ad poſteriorem expreſſionem pro tempore coniunctionis, hanc nouam colligimus

$22^h. 59'. 21'' - 2, 23\,\delta + 1, 97.y - 0, 52\,\pi,$

quae ſubtracta ab illa pro Dmitriewsk dat differentiam meridianorum

$1^h. 51'. 11'' - 0, 44.y - 0, 70\,\pi;$

hincque ſi correctiones $y$ et $\pi$ plane negligantur $1^h. 51'. 11''$. Eſt vero longitudo Tyrnauiae a Pariſiis $1^h. 0'. 55''$. Quare erit illa pro Dmitriewsk $2^h. 52'. 6''$.

Interim tamen vt appareat quanta probabilitate haec determinatio praedita ſit, pro aequatione Tyrnauienſi ſtatuantur tres hypotheſes.

I. $\delta = 0$, $\pi = 0$ ex quo erit $y = 2$

II. $\delta = -3$, $\pi = -5$ vnde $y = -5$

III. $\delta = -3$, $\pi = +5$ — $y = +2$.

Pro prima hypotheſi eſt differentia meridianorum inter Dmitriewsk et Tyrnauiam $1^h. 51'. 10''$, pro ſecunda $1^h. 51'. 16''$, pro tertia $1^h. 51'. 7''$. Quum igitur inter has concluſiones ſit diſcrepantia $9''$, ſtatuamus vbi ſupra inuenimus eſſe differentiam meridianorum inter Pariſios et Dmitriewsk $2^h. 52'. 6''$.

 Vbi

Vbi quidem, quia obſeruatio in Dmitriewsk per nubes capta eſt, fieri poteſt vt haec longitudo inuenta 5 vel adeo 10 ſcrupulorum ſecundorum augmentum admittat.

Ex initio Eclypſis die $\frac{11}{22}$. Martii 1773. in Dmitriewsk obſeruato colligitur tempus verum coniunctionis Solis et Lunae

$$20^h.\ 22'.\ 40'' + 2,19\,\delta + 0,35.y + 0,26\,\pi.$$

At ex obſeruato initio Eclypſis in Pekin colligitur tempus coniunctionis

$$25^h.\ 6'.\ 32'' + 2,54\,\delta - 1,32.y - 0,31\,\pi.$$

Hinc prodit differentia meridianorum

$$4^h.\ 43'.\ 52'' + 0,35\,\delta + 1,67.y - 0,57\,\pi,$$

vbi ſi correctiones $\delta$, $y$, $\pi$ plane negligantur et longitudo domus Ieſuitarum Pekini ſupponatur eſſe $7^h.\ 36'.\ 20''$ a Pariſiis, prodibit differentia meridianorum inter Pariſios et vrbem Dmitriewsk $2^h.\ 52'.\ 28''$. Caeterum ex aequatione pro Pekin inuenta, quae eſt

$$11 + 5,21\,\delta - 2,88.y + 2,00\,\pi = 0,$$

conſtat ſi ponatur eſſe $\delta = -3$ fore $y = -2$, poſito $\pi = 0$; hi igitur valores adhibiti in expreſſione pro differentia meridianorum, dabunt $4^h.\ 43'\ 54''$ adeoque inter Pariſios et Dmitriewsk $2^h.\ 52'.\ 26''$.

Caeterum fieri quidem poteſt vt longitudo domus Ieſuitarum a nobis nimis magna ſit aſſumta, licet vix plus quam quinque ſcrupulorum ſecundorum diminutionem pati poſſe videatur. Quod autem

tem concluſio pro longitudine vrbis Dmitriewsk nunc inuenta cum priori non prorſus conſentiat, exinde oriri poteſt, quod circa initium Eclypſeos obſeruandum tanta exactitudo locum habere non ſoleat, ac circa obſeruatum finem. Quare ſi harum conclusionum probabilitates ita aeſtimentur vt prior triplo probabilior ſit poſteriori, fiet medio iuxta hanc aeſtimationem capto, longitudo Dmitriewsk ab obſervatorio Pariſino $2^h. 52'. 11''$; ita vt circiter $5''$ error deriuatur in priorem determinationem et quindecim in poſteriorem. Quicquid autem ſit, probabile videtur hanc determinationem vix magis quam quinque ſcrupulis ſecundis eſſe dubiam.

Varias etiam obſeruationes Eclypſium Satellitum Iouis inſtitui; verum in praeſenti paucae mihi ſunt ad manus ipſis correſpondentes alibi locorum habitae, cum quibus immediate comparare poſſim; ideoque ad proximum Commentariorum volumen deferendum eſt. Vt autem interea de latitudine vrbis Dmitriewsk conſtet, eam ex multis altitudinibus tam Solis quam fixarum meridianis reperi $50°. 5'. 6''$.

---

# AD ILLVSTRES ACADEMICOS PETROPOLITANOS DE

# DIFFERENTIA MERIDIANORVM PETROPOLITANI ET PEKINENSIS.

Auctore

## P. *HALLERSTEIN.*

Differentiam meridianorum Petropolitani et Pekinenſis tuto et accurate conſtitui veſtra potiſſimum et noſtra intereſt Clariſſimi Viri, et quod ego in hac re tentaui, vobis debeo, vobis defero cenſendum, corrigendum, definiendum.

Anno 1754. cum obſeruationes Aſtronomicas, quas anteceſſor meos Pater *Ignatius Koegler* fecerat, et ſparſim notatas reliquerat (obiit is anno 1746. Martii 30, cui ſequente menſe Aprili ſucceſſi) colligerem, ordinarem, conſcriberem, optimo fato aduenit eodem anno Pekinum Carauana Ruſſica, quae nobis dono, et munificentia Illuſtris Academiae complures tomos attulit, in quibus praeter alia monumenta literaria et doctiſſimas lucubrationes, etiam Immerſiones et Emerſiones Satellitum Iouis obſeruatae a Cl. Viro D. *de l'Isle* in obſeruatorio Imperiali Petropolitano magno numero.

Habebam ego Immerſiones et Emerſiones Satellitum Iouis obſeruatas in hoc Collegio Pekini a P. *Koegler* inde ab anno 1713 ad 1745. non minore numero, harum cum aliquas vtrinque obſeruatas inter ſe comparare tentaſſem, et viderem differentias inde exiſtentes admodum variare, facile intellexi, cum non poſſem habere obſeruationes quam optimas, curandum habere combinationes quam plurimas, ex quibus ſi non poſſem elicere veram differentiam noſtrorum meridianorum, elicerem ſaltem aliquid prope verum.

Ergo obſeruationes vtrinque factas ab anno 1726. vsque ad annum 1742. combinaui inter ſe, quotquot aliquo modo potui, combinaui autem tribus diuerſis modis immediate, vt vocant, et mediate et exiuerunt pro differentia noſtrorum meridianorum Petropolitani et huius Collegii Pekinenſis numeri medii tres; $5^h. 44'. 15''$ et $5^h. 44'. 16''$ et $5^h. 44'. 17'$ atque hi numeri ſunt, qui poſtliminio impreſſi ſunt in libro obſeruationum Pekinenſium Viennae in lucem edito. Nec mihi diſplicebant, quod ſatis arcte inter ſe haererent, et adeo viderentur non admodum longe a vero abeſſe, nihil tamen certi definire auſus ſum, niſi inter 4 aut 5 ſecunda.

Nam cum obſeruationes, quae hos numeros dederunt, factae fuiſſent teleſcopiis vtrinque admodum diuerſis, Petropoli magnis, Pekini paruis, neceſſe erat differentiis inde ortis correctionem aliquam adhi-

adhibere, quae cum legem certam nullam haberet, fieri non poterat, quin etiam differentiae correctae aliquid incertitudinis ſecum traherent.

Poſt aliquot annos audieram ac deinde ipſe legi in Aſtronomia Cl. Dni *de la Lande* conſilium Patris *Maximiliani Hell* Societatis noſtrae Aſtronomi Caeſarei Viennae; ommiſſis correctionibus huiusmodi, et nulla habita ratione diuerſitatis teleſcopiorum qualiumcunque, dum iidem vtrinque obſeruatores iisdem conſtanter vtantur teleſcopiis, differentias ortas ex comparatione Immerſionum vtrinque obſeruatarum combinandas cum differentiis ortis ex comparatione Emerſionum, et duorum mediorum numerorum vtrinque erutorum differentiam pro ratione multitudinis Immerſionum et Emerſionum ex aequo diſtribuendam atque ita conſtituendam vltimam et veram differentiam Meridianorum, quod ſcilicet, qui tardius videt Immerſionem, citius Emerſionem videret, et contra. Miratus aliquantum conſilium hoc tam obuium tam ſero prodiuiſſe, reſumptis calculis numeros illos, ex quibus ſuperiores tres differentias erueram, eosdem omnes, omiſſis correctionibus, tales quales ex obſeruationibus vtrinque factis prodiverunt, in duas ſeries deſcripſi, quarum vna continebat 37 differentias ortas ex comparationibus Immerſionum vtrinque obſeruatarum, altera 53 alias ortas ex comparationibus Emerſionum, medius numerus, quem dabant Immerſiones pro differentia Meridianorum Petropolitani et Pekinenſis exiit $5^h. 44'. 14''$.

44'. 14''. 58''' et medius, quem dabant Emerſiones, extitit $5^h. 44'. 23''. 24'''$ horum differentiam $8''. 26'''$ inter vtrumque diſtribui ſic: 90 : $8''. 26'''$ :: 37 : $3''. 28'''$ haec $3''. 28'''$ ſubtraxi ex numero maiore $5^h. 44'. 23''. 24'''$ et remanſit pro differentia Meridianorum numerus $5^h. 44'. 19''. 56'''$ iterum autem feci: 90 : $8''. 26'''$ :: 53 : $4''. 58'''$ et iſta $4''. 58'''$. addidi ad numerum minorem $5^h. 44'. 14''. 58'''$, et extitit numerus idem $5^h. 44'. 19''. 56'''$ hoc eſt $5^h. 44'. 20''$ pro differentia vera Meridianorum noſtrorum obſeruatorii Petropolitani, et huius Collegii Pekinenſis.

Iſte numerus, licet nihil haberet, quo ſe tueri poſſet, praeter multitudinem obſeruationum, ex quibus exiuit; multo mihi tamen potior viſus et tutior, quam tres illi ſuperiores, qui propter comparationem teleſcopiorum parum certam et nonnihil arbitrariam neceſſario continerent aliquid plus minus: iſte contra velut ſponte ſua, ſine vllo artificio ſe obtuliſſet; vt adeo ſperarem eum propius quam tres illos ſuperiores, et ſatis prope verum conſtiturum, haec mea interim eſt coniectatio, quam vobis, Viri doctiſſimi, diſcutiendam et emendandam commendo, quem in finem addidi hic tabellam numerorum:

| Imm. 37. | Imm. | Em. 53. | Em. |
|---|---|---|---|
| $5^h.41'.48''$ | 44.25 | $5^h.42'.11''$ | 44.33 |
| 42. 0 | $5^h.44'.30''$ | 42.40 | 44.33 |
| 42.29 | 44.34 | 42.43 | 44.33 |
| 42.45 | 44.35 | 42.54 | $5^h.44'.35''$ |
| 43. 6 | 44.36 | 43. 6 | 44.36 |
| 43. 8 | 44.36 | 43.18 | 44.41 |
| 43.10 | 44.40 | 43.31 | 44.43 |
| 43.15 | 44.40 | 43.34 | 44.46 |
| 43.32 | 44.44 | 43.34 | 44.47 |
| 43.47 | 44.48 | 43.39 | 44.47 |
| 5.43.55 | 44.49 | 5.43.40 | 44.55 |
| 43.59 | 5.45. 1 | 43.42 | 44.57 |
| 44. 2 | 45. 2 | 43.45 | 44.58 |
| 44. 4 | 45.32 | 43.48 | 5.45. 2 |
| 44. 4 | 45.33 | 43.56 | 45. 5 |
| 44. 7 | 45.43 | 44. 0 | 45. 6 |
| 44.16 | 46.10 | 44. 6 | 45. 7 |
| 44.23 | 47. 1 | 44. 7 | 45.13 |
| 44.25 | | 44.10 | 45.16 |
| | | 44.10 | 45.18 |
| | | 5.44.11 | 45.22 |
| | | 44.12 | 45.28 |
| | | 44.12 | 45.45 |
| | | 44.13 | 5.45.50 |
| | | 44.17 | 45.56 |
| | | 44.25 | 46.17 |
| | | 44.27 | |

Immer-

| | |
|---|---|
| Immerſionum 37 numerus medius | $5^{h}.44'.14''.58'''$ |
| Emerſionum 53 numerus medius | 5. 44. 23. 24 |
| Numerorum mediorum differentia | 8. 26 |
| igitur $60 : 8''. 26''' :: 37 :$ - - - – | 3. 28 |
| Medium numerorum mediorum | 5. 44. 19. 56 |
| item $90 : 8. 26 :: 53 :$ - - - + | 4. 58 |
| Medium numerorum mediorum | 5. 55. 19. 56 |
| hoc eſt - - - - | 5. 44. 20. |

# ECLIPSES SATELLITVM IOVIS

## ANNO 1774, PETROPOLI IN SPECVLA ASTRONOMICA OBSERVATAS, RECENSVIT.

### *AND. IOH. LEXELL.*

De his obſeruationibus eadem momenda habeo, quae in Tomo praecedenti, de obſeruationionibus pro Anno 1773. fuere monita. Ne autem pro ſingulis obſeruationibus nomen Auctoris repetere opus ſit, obſeruationes a Cel. D. *Rumovski* factas littera R, quas inſtituit Cl. *Islenieff* littera I, measque littera L indicabo.

| | Temp. ver. Petrop. Styl. Nou. | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Emerſio III. Satellitis Iouis. Obſeruatio aliquantum dubia. L. - - | Ian. | $6^D$. | $4^h$. | $30'$. | $4''$ |
| Emerſio I. Satellitis. Obſeruatio dubia. L. - - - - - | | 11. | 7. | 56. | 39 |
| Immerſio I. Satell. Obſeruatio non prorſus bona. L. - - | Iulii | 12. | 12. | 13. | 11 |
| Immerſio I. Obſeruatio dubia. L - | | 28. | 11. | 27. | 53 |
| Immerſio I. Obſeruatio bona. L | Aug. | 4. | 13. | 23. | 17 |
| Emerſio II. R - - - - | | 11. | 11. | 34. | 58 |
| - - - - L - - - - | | 11. | 11. | 35. | 33 |
| Immerſio I. Obſeruatio dubia. L - | | 20. | 11. | 41. | 38 |

| | | Temp. ver. Petrop. Styl. Nou. |
|---|---|---|
| III. Satellitis Immerſio R | Aug. 23. | $11^h. 23'. 15''$ |
| - - - I - - - | | 11. 23. 8 |
| - - - L - - - | | 11. 22. 9 |
| Emerſio R - - - | | 12. 53. 19 |
| I - - - | | 12. 53. 57 |
| L - - - | | 12. 56. 50 |
| Immerſio I. Satellitis. Obſeruatio bona. L. - - - | Sept. 3. | 15. 33. 29 |
| Immerſio I. Obſeruatio bona L. | 12. | 11. 58. 36 |
| Immerſio I. Obſeruatio bona. L. | Sept. 21. | 8. 23. 43 |
| Immerſio III. R - - | Octob. 5. | 11. 40. 44 |
| L - - - - | | 11. 40. 6 |
| Immerſio I. R - - - - | | 12. 17. 45 |
| L - - - - | | 12. 16. 5 |
| Immerſio I. Satellit. L - | Octob. 28. | 12. 30. 49 |
| Immerſio II. - - L - - - - | | 14. 29. 31 |
| Emerſio I. R - - - | Nou. 15. | 7. 23. 31 |
| Emerſio II. R. Ioue e nube emergente, Satelles videtur multo debiliori lumine quam reliqui - - - | | 11. 21. 23 |
| Emerſio III. L. obſeruatio dubia - | 17. | 13. 20. 26 |
| Emerſio III. R. - - - | 24. | 17. 22. 2 |
| Emerſio I. R. - - - | 27. | 16. 41. 46. |

De obſeruatione Cel. *Rumovski* die 5. Octobr. aliquod dubium eſt, quia ipſi non licuit poſt peractam obſeruationem in motum Penduli inquirere, quod Pendulum deinceps die 16. Octob. plane ſubſtitit. Igitur motum Penduli talem ſuppoſuit, qualis diebus obſeruationem praecedentibus inuentus fuit. Pro immerſione quidem I. Satellitis inter meam et Cel. *Rumovski* obſeruationem valde magnus eſt diſſenſus, interim vix mihi perſuadere poſſum, vt meae obſeruationi error inſit fere duorum minutorum primorum.

EPITO-

# EPITOME
## OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM PETROPOLI ANNO MDCCLXXIV.
## SECVNDVM CALENDARIVM CORRECTVM INSTITVTARVM.

Auctore
*IOANNE ALBERTO EVLER.*

### I. Barometrum.

1. Barometri altitudines maximae, minimae et mediae, vna cum variatione maxima et ſtatu medio, pro ſingulis menſibus anni 1774.

| | Altitudo maxima | | Altitudo minima | | Variatio | Medium | Altitudo media |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Menſe | Dig. p. c. | die hora | Dig. p. c. | die hora | Dig. p. c. | Dig. p. c. | Dig. p. c. |
| Ianuar. | 28. 24 | 31. ante merid. | 26. 98 | 19. VI. a. m. | 1. 26 | 27. 61 | 27. 78 |
| Februar. | 28. 45 | 4. meridie | 27. 30 | 6. XI p. m. | 1. 15 | 27. 87 | 27. 84 |
| Mart. | 28. 78 | 23. IX. a. m. | 27. 53 | 2. VI. a. m. | 1. 25 | 28. 15 | 28. 20 |
| April. | 28. 69 | 9. III. p. m. | 27. 76 | 25. VI. a. m. | 0 93 | 28. 22 | 28. 27 |
| Maii | 28. 70 | 11. IX a. m. | 27. 70 | 17 VI. a m. | 1. 00 | 28. 20 | 28. 27 |
| Iunii | 28. 39 | 2. VI. p. m. | 27. 68 | 12. X. a. m. | 0. 71 | 28. 04 | 28. 07 |
| Iulii | 28. 54 | 27. II. p. m. | 27. 82 | 18. IX a m | 0. 72 | 28. 18 | 28. 07 |
| Auguſt | 28. 59 | 20 meridie | 27. 68 | 4. VI. a. m. | 0. 91 | 28. 14 | 28. 15 |
| Sept. | 28. 57 | 25. IX. a. m. | 27. 75 | 9. VI. a. m. | 0. 82 | 28. 16 | 28. 28 |
| Octobr. | 28. 78 | 29. poſt merid. | 27. 43 | 13. VI. a. m. | 1. 35 | 28. 10 | 28. 13 |
| Nouembr. | 28. 78 | 27. III. p. m | 27. 67 | 16. V. a. m. | 1. 11 | 28. 22 | 28. 14 |
| Decembr. | 29. 21 | 8. poſt merid. | 27. 50 | 23. VI. a. m. | 1. 71 | 28. 35 | 28. 33 |
| Anno 1774. | 29. 21 | Menſe Decembris | 26. 98 | Menſe Ianuarii | 2. 23 | 28. 10 | 28. 13 |

2. Nu-

2. Numerus dierum quibus altitudo Barometri ſuperabat terminos quosdam circa altitudinem 28. poll.

| Menſe | ſupra 28. 10 Dies, horae | ſupra 28. 05 Dies, horae | ſupra 28. 0 Dies, horae | ſupra 27. 95 Dies, horae | ſupra 27. 90 Dies, horae | per dimidium menſis ſupra Dig. p. c. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ian. | 2. 18 | 3. 3 | 3. 12 | 6. 21 | 10. 6 | 27. 83 |
| Febr. | 5. 15 | 7. 12 | 8. 15 | 9. 18 | 11. 0 | 27. 82 |
| Mart. | 19. 0 | 20. 15 | 21. 6 | 22. 18 | 24. 18 | 28. 20 |
| April. | 23. 3 | 24. 9 | 25. 9 | 26. 12 | 28. 21 | 28. 28 |
| Maii | 25. 15 | 27. 9 | 28. 0 | 28. 12 | 28. 21 | 28. 29 |
| Iunii | 14. 3 | 18. 15 | 21 18 | 23. 12 | 24. 15 | 28. 08 |
| Iul. | 9. c | 13. 18 | 21. 9 | 23. 3 | 27. 12 | 28. 04 |
| Aug. | 17. 3 | 18. 18 | 21. 9 | 24. 6 | 26. 18 | 28. 15 |
| Sept. | 25. 3 | 26. 18 | 27. 9 | 27. 21 | 28. 3 | 28. 31 |
| Oct. | 17. 12 | 18, 18 | 21. 18 | 22. 6 | 23. 9 | 28. 15 |
| Nou. | 14. 15 | 15. 15 | 18. 0 | 20. 12 | 22. 0 | 28. 08 |
| Dec. | 20. 18 | 21. 18 | 22. 18 | 23. 18 | 25. 3 | 28. 28 |
| Anno 1774 | 194. 3 | 217. 0 | 241. 3 | 259 15 | 281. 6 | 28. 13 |

Duae priores figurae altitudinum barometricarum pollices integros deſignant, quorum duodecim pedem regium pariſinum conſtituunt, poſteriores vero partes centeſimas vnius pollicis. Tum vero monendum eſt a. m. ſignificare *ante meridiem*, p. m. vero *poſt meridiem*.

Colligitur ex his binis tabulis, pro toto anno.

1. Altitudo maxima barometri 29. 21: menſe Decembris die 8. per horas pomeridianas, a meridie vsque ad mediam noctem. Thermom. Delisl. 161. Coelum obductum. Vent. N–O.

2. Al-

2. Altitudo minima barometri 26. 98: menſe Ianuatii die 19. hora 6 mane. Thermom. Deliſl. 149. Coelum obductum, et ventus vehementiſſimus ex regione S.

3. Variatio maxima 2. 23 vel $2\frac{23}{100}$ pollicum.

4. Medium inter maximam altitudinem et minimam 28. 10.

5. Altitudo Barometri media inter omnes obſervatas, ſiue ſumma omnium altitudinum per numerum earum diuiſa 28. 13 prorſus vti anno praecedente 1773. inuenta fuit.

6. Ex ſecunda tabula patet, mercurium in tubo barometri ſe ſuſtentaſſe ſupra

$28\frac{10}{100}$ poll. per dies $194\frac{1}{8}$
$28\frac{5}{100}$ poll. per dies 217
28 poll. per dies $241\frac{1}{8}$
$27\frac{95}{100}$ poll. per dies $259\frac{1}{8}$ et ſupra
$27\frac{90}{100}$ poll. per dies $281\frac{1}{4}$.

Vnde concluditur mercurium ſe ſuſtentaſſe per interuallum dimidii anni vel $182\frac{1}{2}$ dierum ſupra altitudinem $28\frac{13}{100}$ poll. quae altitudo ergo prorſus conuenit cum media. Comparatione autem inſtituta cum concluſionibus, quae ex obſeruationibus praeteritis duobus annis 1772 et 1773. factis erutae fuerunt, deprehendimus ſtatum barometri hoc 1774. anno multo quidem altiorem fuiſſe illo 1772 anni, paulo vero inferiorem proxime praecedenti 1773 anni.

Caeterum animaduertere hic libet, altitudinem Barometri maximam pro hoc 1774 anno, prorſus et omnium maximam fuiſſe, quae hucusque Petropoli obſeruatae fuerunt.

Sequuntur iam obſeruationes nonnullae deſcenſuum et aſcenſuum Barometri ſubitaneorum.

## Menſe Ianuario.

d. 15. hora 9. p. m. 28. 14
d. 17. hora 4. a. m. 27. 55.

Ergo interuallo temporis 31 horarum, deſcendit barometrum $\frac{59}{100}$ poll. Coelum nubibus obductum, nix copioſa et ventus ex oriente.

d. 17. hora 9. p. m. 27. 74
d. 19. hora 6. a. m. 26. 98.

Hinc per tempus 33 horarum, inſuper barometrum deſcendit $\frac{76}{100}$ poll. Coelum obductum, nix copioſa et procella e regione N—O, tum vero e S—O

d. 19. hora 6. a. m. 26. 98
d. 20. hora 6. a. m. 27. 64.

Conſequenter tempore 24 horarum barometrum iterum aſcendit $\frac{66}{100}$ poll. Coelum nubiloſum et procella primo e meridie tum vero ex occidente.

## Menſe Februario.

d. 4. meridie 28. 45
d. 5. hora 9. p. m. 27. 38.

Deſcendit igitur mercurius in tubo barometri intervallo

vallo 33 horarum, per ſpatium $1\frac{7}{100}$ poll. Coelum obductum, nix et procella e S—W.

d. 14 hora 3. p. m. 28. 32
d. 15. hora 7. p. m. 27. 65.

Interuallo ergo 28 horarum deſcendit mercurius in barometro per $\frac{67}{100}$ poll. Coelum plane obductum, nix copioſa et ventus e regione S—W.

d. 23. hora 3. p. m. 28. 17
d. 25. hora 9. a. m. 27. 46.

Hinc tempore 42 horarum deſcenſus fuit $\frac{71}{100}$ poll. Coelum obductum, nix et procella ex occidente.

## Menſe Aprili.

d. 7. hora 6. a. m. 28. 00
d. 8. hora 6. a. m. 28. 55.

Per interuallum temporis 24 horarum aſcendit barometrum per $\frac{55}{100}$ poll. Coelum ſerenum et ventus lenis ex N—O. Tum porro aſcendit mercurius et die 9 hora 3. p. m. attigit altitudinem 28. 69

d. 16. hora 2. p. m. 28. 60
d. 18. hora 4. p. m. 27. 89.

Tempore igitur 50 horarum deſcendit mercurius in barometro per ſpatium $\frac{71}{100}$ poll. Coelum plane obductum. Pluuia et procella e regione S—O.

## Menſe Iulio.

d. 25. hora 6. a. m. 27. 85
d. 27. hora 2. p. m. 28. 54.

Conſequenter interuallo 56 horarum aſcenſus fuit $\frac{69}{100}$ poll. Coelo exiſtente ſereno et vento leniter flante ex occidente.

## Menſe Octobri.

d. 1. hora o. a. m. vel media nocte 28. 24.
d. 2. hora 6. a. m. 27. 62.
d. 3. meridie 27. 42.

Ergo per interuallum 30 horarum deſcenſus fuit $\frac{62}{100}$ poll. tum porro leniori gradu deſcendit amplius per ſpatium $\frac{20}{100}$ poll. tempore 30 horarum. Coelum obductum, pluuia et procella e regione S—W

d. 3. meridie 27. 42
d. 5. hora 9. p. m. 28. 40.

Interuallo igitur 57 horarum aſcendit barometrum per $\frac{98}{100}$ poll. Coelum obductum, pluuia, nix, boreas

d. 9. hora 9. a. m. 28. 20
d. 11. meridie 27. 58.

Tempore ergo 51 horarum deſcendit per $\frac{62}{100}$ poll. Coelum obductum et ventus ex occidente

d. 13. hora 6. a. m. 27. 43
d. 14. hora 9. p. m. 28. 05.

Conſequenter tempore 39 horarum aſcendit iterum per $\frac{62}{100}$ poll. Pluuia copioſa et eurus

d. 22. hora o. a. m. vel media nocte 28. 43
d. 24. hora 6. a. m. 27. 70.

Hinc

Hinc per interuallum temporis 54 horarum deſcenſus fuit $\frac{71}{100}$ poll. Pluuia cadente et procella ſpirante ab occidente.

## Menſe Nouembri.

d. 27. hora 3. p. m. 28. 78
d. 30. hora 6. p. m. 27. 77.

Ergo interuallo temporis 75 horarum, deſcenſus barometri fuit $\frac{101}{100}$ poll. Coelum obductum, nix copioſa, vento leniter ſpirante primum ab oriente, tum ex regione S—O, denique e ſeptentrione.

## Menſe Decembri.

Plures obſeruati fuerunt deſcenſus et aſcenſus notabiliores, quocirca malui omnes variationes barometricas hoc menſe annotatas in figura hic adiecta repraeſentare et ante oculos ponere: vbi etiam pro quauis die altitudinem Thermometri maximam et minimam, id eſt ſtatum caloris et frigoris, nec non directionem venti et conſtitutionem coeli adiunxi.

## II. Thermometrum.

1. Thermometri altitudines minimae et maximae pro ſingulis menſibus anni 1774. ſecundum Calendarium Gregorianum.

| Menſe | Altitudo minima | | Altitudo maxima | | Differentia |
|---|---|---|---|---|---|
| | Gradus | die hora | Gradus | die hora | Gradus |
| Ianuar. | 190 | 15. VIII. a. m. | 149 | 19. VI. a. m. | 41 |
| Februar. | 191 | 10. VII. a. m. | 144 | 26. II. p. m. | 47 |
| Mart. | 182 | 13. VI. a. m. | 142 | 30. II. p. m. | 40 |
| April. | 171 | 8. VI. a. m. | 124 | 28. II. p. m. | 47 |
| Maii | 147 | 11. VI. a. m. | 108 | 26. II. p. m. | 39 |
| Iunii | 138 | 13. VI. a. m. | 108 | 6, 22, 23 } II. p. m. | 30 |
| Iulii | 130 | 20. VI. a. m. | 106 | 8. II. p. m. | 24 |
| Auguſt. | 139 | 21. VI. a. m. | 113 | 12. II. p. m. | 26 |
| Septembr. | 149 | 26. VI. a. m. | 114 | 5. II. p. m. | 35 |
| Octobr. | 162 | 31. VII. a. m | 134 | 10. II. p. m. | 28 |
| Nouembr. | 185 | 19. VIII. a. m. | 148 | 2. II. p. m. | 37 |
| Decembr. | 187 | 30. VII. a. m. | 149 | 21. IX. p. m. | 38 |
| Anno 1774. | 191 | Menſe Febr. | 106 | Menſe Iulio | 85 |

De Thermometri conſtructione et expoſitione, plura in Tomo praecedente horum Commentariorum leguntur; quare hic eadem repetere ſuperfluum foret.

2. Sta-

2. Status frigoris et caloris.

| Menſe | Dies frigidiores gradibus | | | | | | Dies calidiores gradibus | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 190 | 180 | 170 | 160 | 150 | 140 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 |
| Ianuar. | 1 | 10 | 21 | 30 | 31 | 31 | | | | | 1 | 7 |
| Februar. | 1 | 6 | 9 | 13 | 20 | 28 | | | | | 15 | 20 |
| Mart. | | 2 | 4 | 18 | 30 | 31 | | | | | 15 | 28 |
| April. | | | 1 | 7 | 18 | 29 | | | 5 | 14 | 25 | 30 |
| Maii | | | | | | 12 | 1 | 13 | 22 | 31 | 31 | 31 |
| Iunii | | | | | | — | 5 | 19 | 28 | 30 | 30 | 30 |
| Iulii | | | | | | — | 9 | 27 | 31 | 31 | 31 | 31 |
| Auguſt. | | | | | | — | | 10 | 31 | 31 | 31 | 31 |
| Septembr. | | | | | | 20 | | 7 | 11 | 24 | 30 | 30 |
| Octobr. | | | | 2 | 13 | 29 | | | | 12 | 28 | 31 |
| Nouembr. | | 5 | 16 | 26 | 30 | 30 | | | | | 1 | 8 |
| Decembr. | | 4 | 11 | 23 | 31 | 31 | | | | | 1 | 15 |
| Anno 1774. | 2 | 27 | 62 | 119 | 173 | 241 | 15 | 76 | 128 | 173 | 239 | 292 |

Ex tabula priori intelligitur, per totum annum fuiſſe:

Altitudinem Thermometri minimam, ſeu gradum frigoris maximi 191 grad. Deslisl. menſe Februarii die 10, hora matutina VII$^a$. Barometro tunc temporis momento $27\frac{6}{10}$; Coelo nebuloſo exiſtente et vento leniter flante ex plaga N—W. Hic ergo gradus frigoris maximi multo minor fuit praecedentibus annis; quibus ſcilicet ſemper gradum 200$^{um}$ ſuperauit.

Altitu-

Altitudinem Thermometri maximam, ſeu gradum caloris maximi 106 grad. Deslisl. die $8^{va}$ menſe Iulii et quidem hora $11^{da}$ poſt meridiem. Barometrum $28\frac{1}{100}$; coelum ſerenum; malacia. Binis praeteritis annis calor maximus deprehenſus fuit 104 graduum, ideoque paulo maior hoc anno.

Vnde variatio Thermometri maxima per totum annum fuit tantum 85 graduum ſecundum Therm. Deslisl. ideoque 14 grad. minor anno praecedente 1773, et 19 grad. minor anno 1772, vbi obſeruata fuit haec variatio maxima 104 grad.

Per tabulam poſteriorem deprehendimus, hoc anno 1774, fuiſſe dies 173 quibus frigus ſuperabat gradum 150, vel congelationis aquae naturalis; inter quos 119 reperiuntur dies frigidiores gradu 160 et 62 frigidiores gradu 170. Vnde patet hyemem hoc anno quoad durationem multo rigidiorem fuisſe annis praecedentibus, vbi tantum 148 et 144 dies frigidiores gradu 150 enumerabantur, quamquam frigus maximum decem gradibus minus fuit iſtis annis.

Deinde intelligitur ex hac ſecunda Tabula hoc 1774 anno 239 dies fuiſſe calidiores gradu 150, porro 173 dies calidiores gradu 140, inter quos 128 dies fuerunt quibus calor ſuperabat gradum 130 et 76 dies quibus ſuperabat gradum 120. Vnde intelligitur ſummam caloris et hoc anno minorem fuiſſe binis annis praeterlapſis, vbi dies numerabantur 256 et 267, quibus caloris gradus ſuperabat

perabat 150. Haec omnia luculenter patent ex comparatione noſtrae ſecundae tabulae hic traditae, cum illis ſimilibus, quas in Tom. XVIII et XVII. dedimus

Speciatim frigus obſeruatum fuit intra gradus.

| | | dies |
|---|---|---|
| 190 et 200 | die 15. Ian. et die 10 Februarii | 2 |
| 180 et 190 | die 5. 6. 11–13. 16. 21–23. Ian. die 1. 2. 8. 9. 11. Febr. die 13. 14. Mart. die 18. 19. 25. 27. 28. Nou. et die 5. 13. 27. 30. Decembr. - - - - - | 25 |
| 170 et 180 | die 3. 4. 7–10. 14. 19. 20. 24. 31. Ian. d. 3. 4. 7. Febr. d. 10. 23. Mart. d. 8. Apr. d. 8. 12–17. 20. 22. 24. 26. Nou. et die 10. 11. 12. 17. 24. 26. 29. Dec. - | 35 |
| 160 et 170 | die 1. 2. 17. 18. 25. 27–30. Ian. d. 5. 12. 13. 14. Febr. d. 6–9. 11. 12. 18. 19. 20. 22. 24. 25. 27. 28. Mart. d. 1. 2. 6. 7. 9. 10. Apr. d. 30. 31. Oct. d. 4–7. 9. 10. 11. 21. 23. 29. Nou. et die 4. 6–9. 14. 16. 18. 20. 23. 25. 28. Dec. - - - - - | 57 |

Calor autem deprehenſus fuit intra gradus.

| | | dies |
|---|---|---|
| 110 et 100 | die 26. Maii d. 6. 7. 22. 23. 24. Iun. d. 7–10. 12. 15. 16. 17. 28. Iulii - - - - - - | 15 |

| | | dies |
|---|---|---|
| 120 et 110 | die 4–8. 23. 24. 25. 27–30. Maii d. 2–5. 8. 9. 19. 20. 21. 25. 27–30. Iun. d. 1. 4. 5. 6. 11. 13. 14. 18. 21–27. 29. 30. 31. Iul. d. 1. 8. 10. 11. 12. 24. 28–31. Aug. et die 1–7. Sept. - - | 61 |
| 130 et 120 | die 20. 21. 27. 28. 30. April. d. 1. 2. 3. 13–16. 22. 31. Maii d. 1. 10. 13–18. 26. Iun. d. 2. 3. 19. 20. Iul. d. 2–7. 9. 13–23. 25. 26. 27. Aug. d. 8. 9. 10. 19. Sept. - - - - - - | 52 |

## III. Ventus et Ventorum Directiones.

| | Malacia | Vent lenis | Vent fortis | Procelloſus | Nord | N-O | Oſt | S-O | Sud | S-W | Weſt | N-W | Variabilis |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Menſe | dies | dies | dies | dies | dies | dies | dies | dies | dies | dies | dies | dies | dies |
| Ian. | 5 | 17 | 6 | 3 | 8 | 8 | 2 | 1 | 1 | 4 | 1 | 4 | 2 |
| Febr. | 1 | 11 | 12 | 4 | 5 | 1 | — | — | 2 | 5 | 5 | 8 | 2 |
| Mart | 1 | 18 | 9 | 3 | 5 | 9 | — | — | 2 | 2 | 2 | 9 | 2 |
| Apr. | 6 | 15 | 5 | 4 | 1 | 9 | — | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 1 |
| Maii | 5 | 11 | 11 | 4 | 3 | 1 | 2 | 3 | 5 | 1 | 9 | 3 | 4 |
| Iunii | 10 | 6 | 11 | 3 | 1 | 4 | 2 | — | 4 | 1 | 4 | 10 | 4 |
| Iul. | 7 | 12 | 8 | 4 | 2 | 2 | 6 | 2 | 3 | 2 | 5 | 6 | 3 |
| Aug. | 9 | 12 | 7 | 3 | — | 1 | 5 | 4 | 6 | 4 | 5 | 4 | 2 |
| Sept. | 2 | 16 | 10 | 2 | 5 | 9 | 3 | 1 | 5 | 3 | 1 | 2 | 1 |
| Oct. | 5 | 8 | 13 | 5 | 7 | 2 | 4 | 2 | 1 | 3 | 6 | 4 | 2 |
| Nou. | 3 | 16 | 9 | 2 | 7 | 9 | 4 | 1 | — | 1 | 2 | 4 | 2 |
| Dec. | 2 | 12 | 11 | 6 | 7 | 5 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 12 | — |
| Anno 1774 | 56 | 154 | 112 | 43 | 51 | 60 | 29 | 17 | 32 | 30 | 47 | 74 | 25 |

Vnde

Vnde patet hunc annum non ventoſiorem fuiſſe anno praeterlapſo 1772: minus ventoſum vero anno proxime praecedente 1773: quamquam differentia non ſit ſenſibilis; malaciae obſeruatae fuerunt frequentius menſibus Iunii et Auguſti, ac procellae frequentius deprehenſae fuerunt menſibus Decembris et Octobris.

Porro perſpicitur hoc anno vti et praecedente, maxime regnaſſe ventum e regione N—W, et quidem menſibus Decembris et Iunii; tum vero ventum e plaga N—O, deinde boream et zephyrum.

## In ſpecie autem hoc anno procellae flabant e regione.

| | | dies |
|---|---|---|
| Nord | die 21 Martii; die 13 Decembris. - - | 2 |
| N—O | die 19 Iulii et die 6 Decembris. - . | 2 |
| S—O | die 18 Apr. die 12 Iulii; die 12 Aug. | 3 |
| Sud | die 2 Ian. die 18 Febr. die 27 Apr. die 27 Maii die 1 et 7 Sept. - - - - | 6 |
| S—W | die 21 et 24 Apr. d. 13 Aug. d. 22 Decembris. - - - - - - - | 4 |
| Weſt | die 1 et 19 Ian. d. 5 Febr. d. 17 et 19 Maii; d. 30 Iunii d. 25 Iulii; die 4 Aug. d. 1. 11. 12 et 23 Octobr. d. 8 et 9 Nou. die 19 Decembr. - - - - | 15 |
| N—W | die 6 et 24 Febr. die 11 et 14 Mart. die 20 Maii; die 12 et 17 Iunii; die 3 Iulii; die 24 Octobr. die 30 et 31 Dec. | 11 |

## IV. Conſtitutio coeli.

| Menſe | coelum ſerenum dies | coelum obductum dies | Nebuloſum dies | Pluuia dies | Nix dies |
|---|---|---|---|---|---|
| Ianuar. | 10 | 16 | 6 | — | 13 |
| Februar. | 4 | 16 | 5 | 3 | 12 |
| Mart. | 12 | 12 | 6 | 1 | 10 |
| April. | 13 | 5 | 3 | 8 | — |
| Maii | 16 | 2 | 2 | 13 | — |
| Iunii | 11 | 2 | 3 | 11 | — |
| Iulii | 9 | 5 | 5 | 12 | — |
| Auguſt. | 9 | 6 | 2 | 12 | — |
| Septembr. | 6 | 9 | 3 | 8 | — |
| Octobr. | 2 | 21 | 5 | 15 | 7 |
| Nouembr. | 5 | 9 | 3 | — | 17 |
| Decembr. | 1 | 14 | 5 | — | 17 |
| Anno 1774 | 98 | 117 | 48 | 83 | 76 |

Numerus dierum ſerenorum ergo hoc anno multo minor fuit quam annis binis praeterlapſis, vbi eorum 127 et 102 numerabantur. Deinde cum anno praecedente 1773 pluuia per dies 96 et nix per dies tantum 57 cecidit: patet hoc anno numerum dierum quibus pluit paulo minorem et eorum quibus ninxit notabiliter maiorem fuiſſe.

## V. Reliqua phaenomena.

Grando decidit diebus 3: die ſcilicet 25 et 28 Septembris, vt et die 28 Decembris.

Toni-

Tonuit $17^{es}$; die 8, 24 et 27, Maii, die 5, 6, 8, 9 et 26 Iunii; porro die 7, 9, 10, 12, 15, 16, 17 Iulii, deinde die 12 Auguſti ac denique die 9 Septembris.

Aurorae boreales obſeruatae fuerunt 48; et quidem 21 perlucidae, d. 11 Ian. d. 3 Febr. d. 20, 21, 30 Martii, d. 2, 4, 23 April. die 7 Maii, porro d. 21, 29 Auguſti, d. 10, 18, 24, 25, 30 Sept. d. 18, 28 Oct. d. 3. 7 Nouembr. denique d. 28 Decembris. At 27 aurorae boreales debiliores annotabantur d. 10 Ian. d. 9, 14, 16, 27, 31 Martii; d. 1, 3, 5, 7, 13 Aprilis; d. 1, 2, Maii; d. 11, 13 Aug. d. 11, 13, 27 Sept. d. 2, 8, 14, 20 Octobr. d. 5, 24, 26 Nou. et d. 1, 26 Decembris.

Parhelia obſeruata fuerunt 5; ſcilicet d. 14 Ian. d. 1 Febr. et d. 4, 25, 27 Decembris.

Flumen Neua a glacie liberabatur die 21 Aprilis et die 7 Nouembris vbique glacie obducebatur.

BRITISH [illegible] NATURAL HISTORY.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.

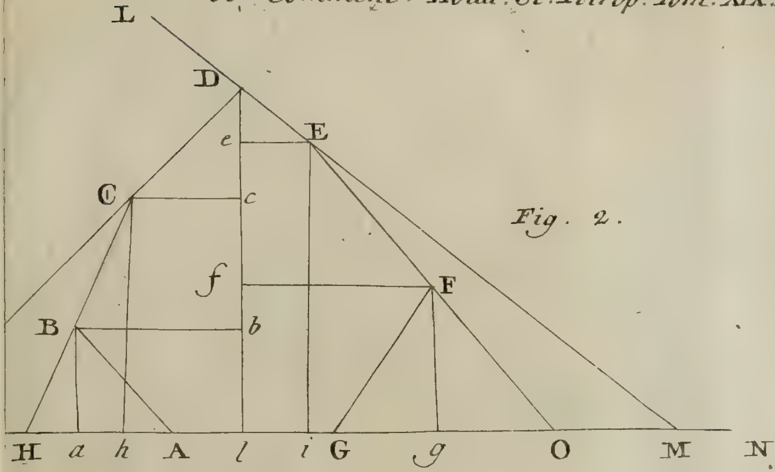



Fig. 2.

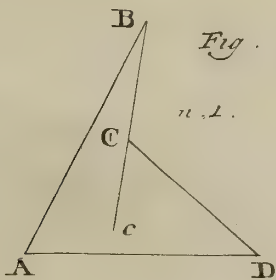
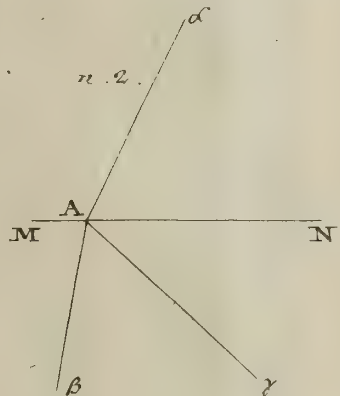
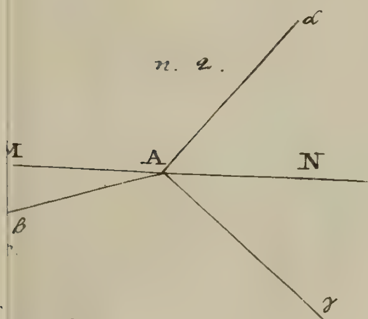



Fig. 4.

n. 1.




n. 2.




n. 2.

g. 7.

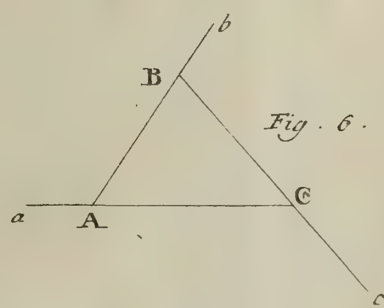



Fig. 6.

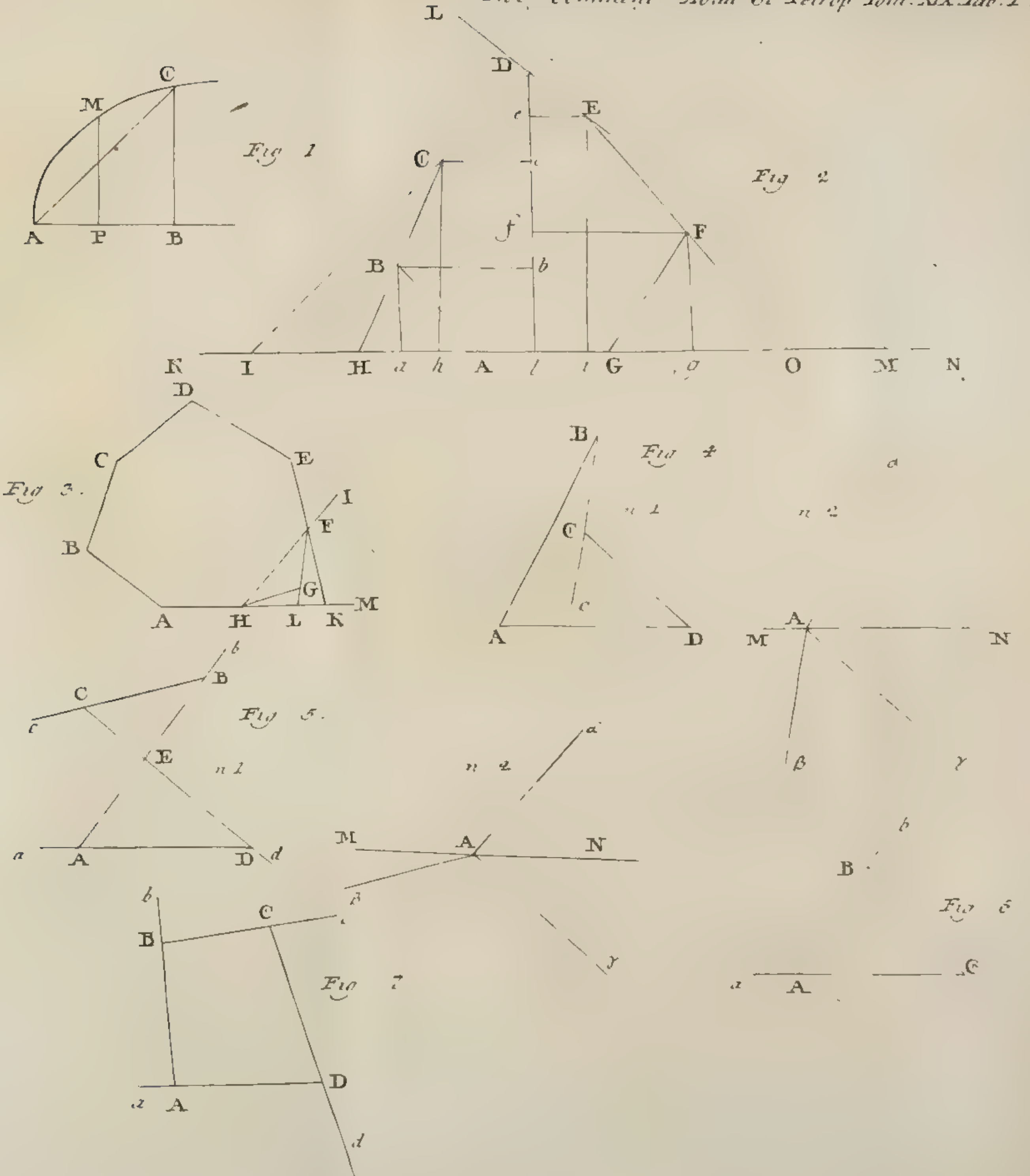

Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6
Fig. 7

Fig. 2.

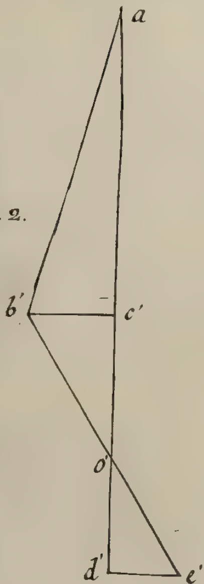
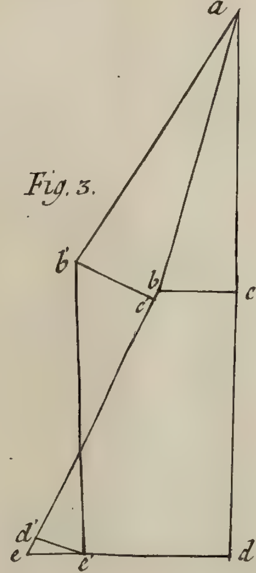



Fig. 3.



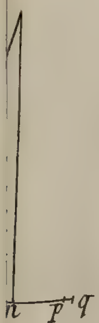
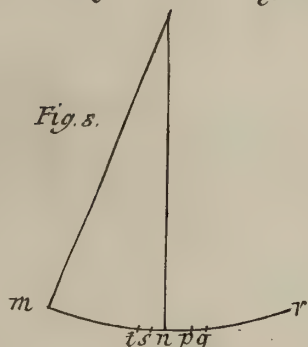




Fig. 8.



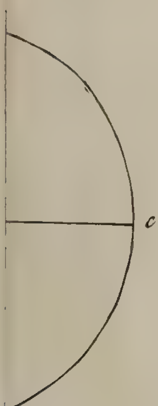




Fig. 7.

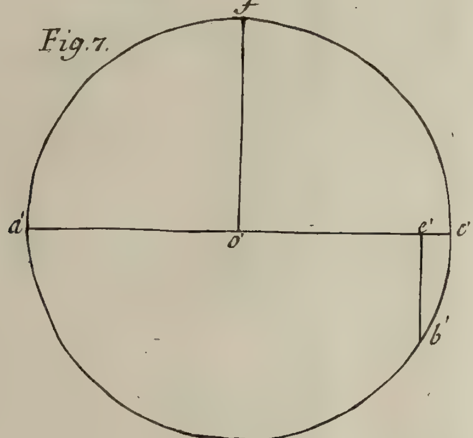


Fig. 1.

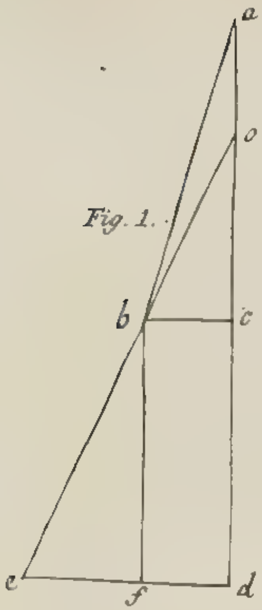


Fig. 2

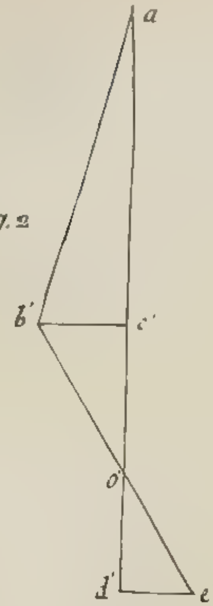


Fig. 3

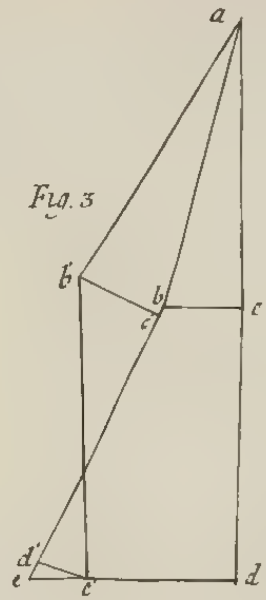


Fig. 4

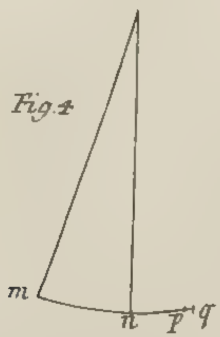


Fig. 5

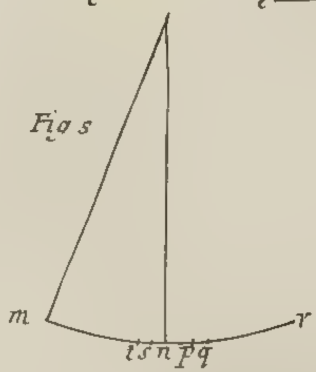


Fig. 6.

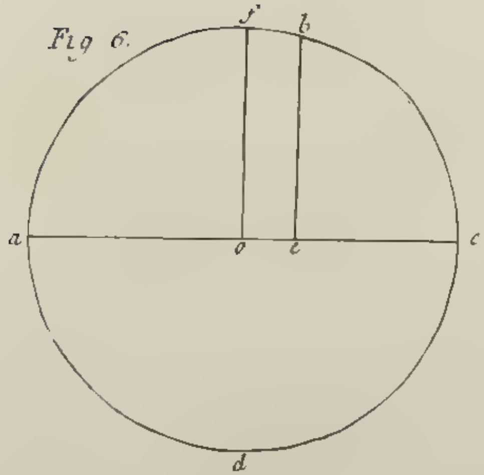


Fig. 7.

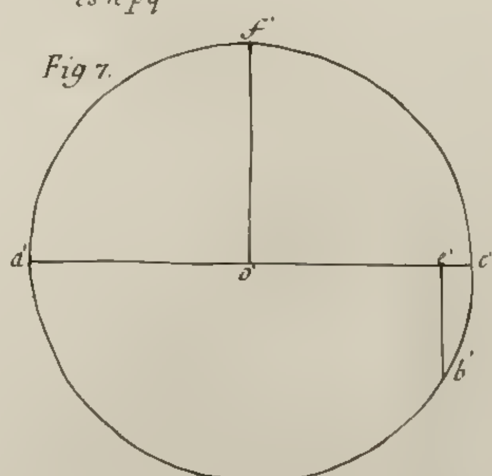


*Fig. 2.*

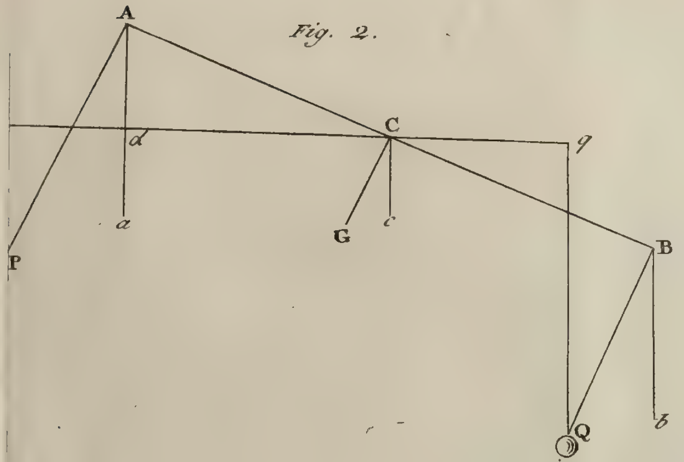



*Fig. 4.*

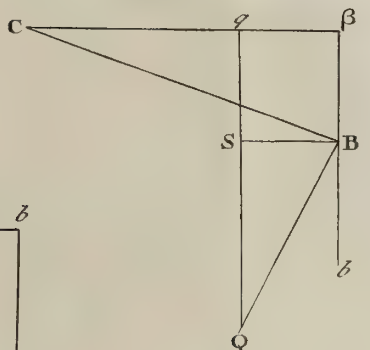






*Fig. 5.*

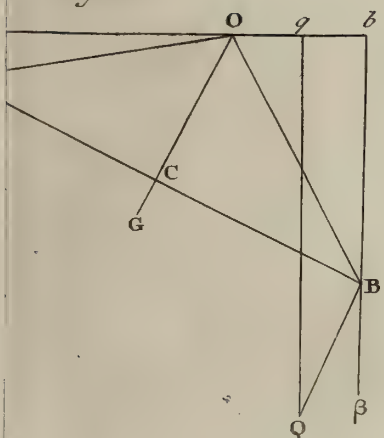


Fig 1.

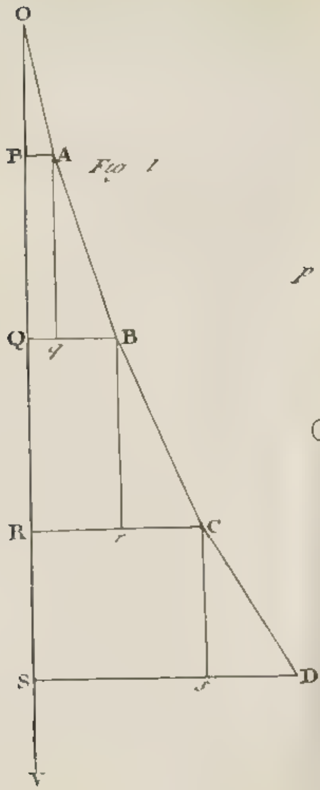



Fig 2.

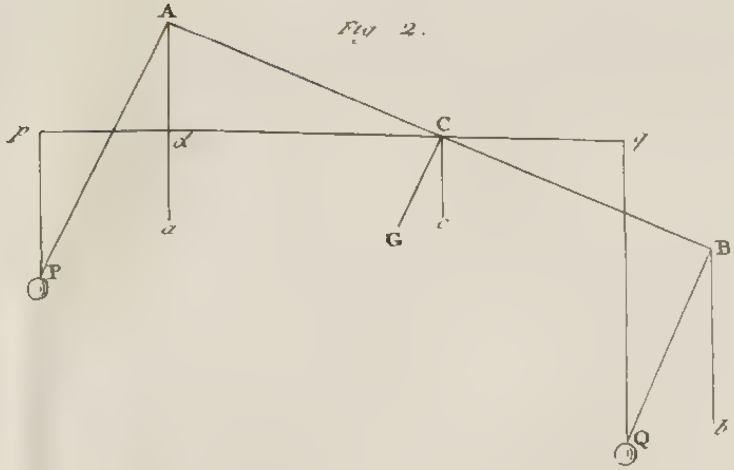



Fig. 3.

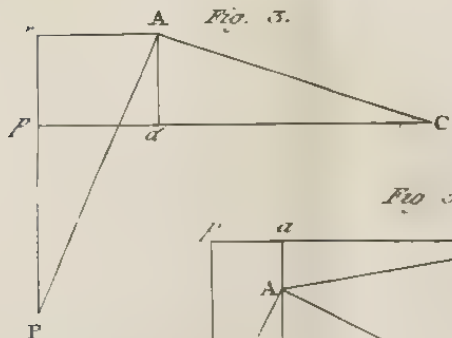



Fig. 4.

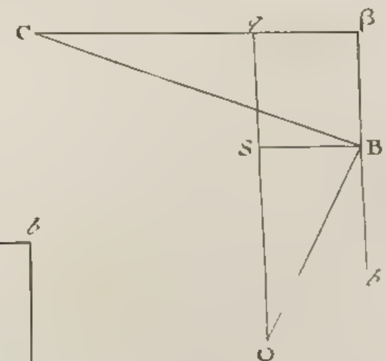
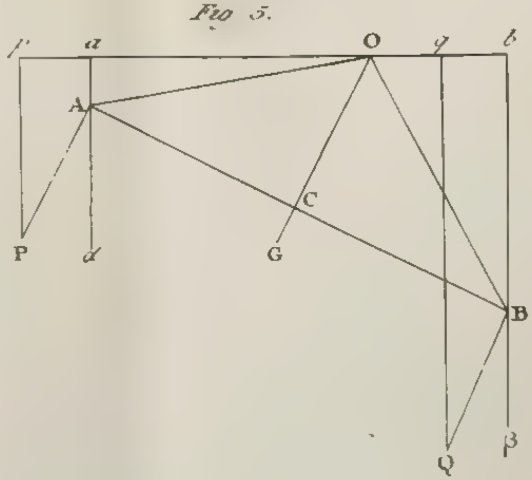



Fig 5.



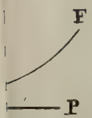



*Fig. 2.*

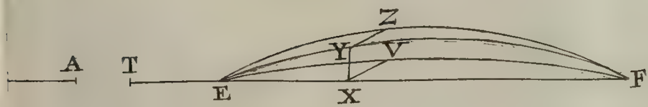



*Fig. 3.*

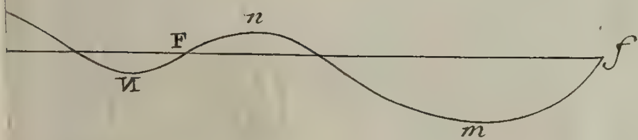



*Fig. 4.*

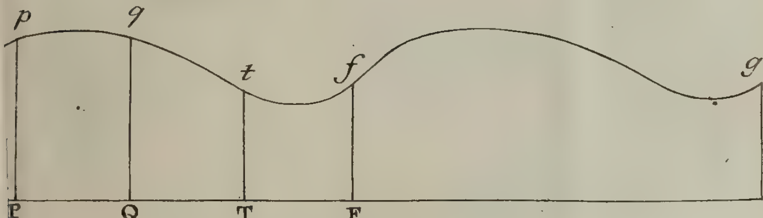



*Fig. 5.*

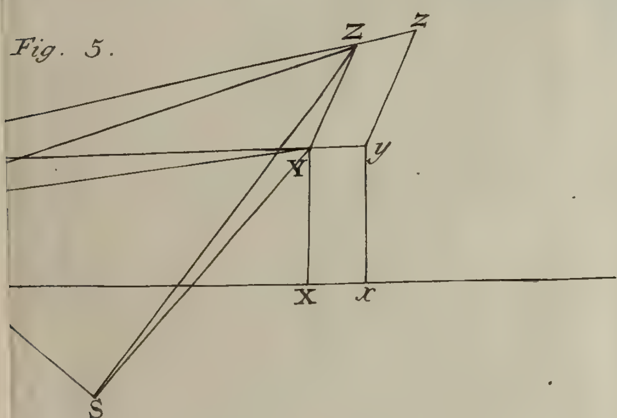


Fig 1.

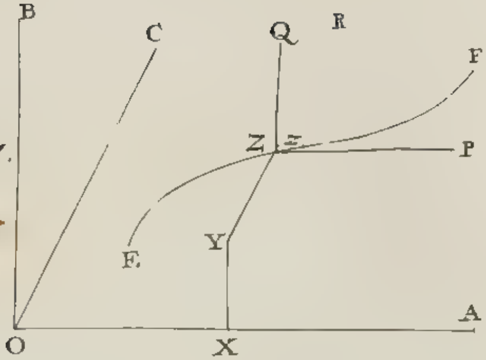



Fig 2.

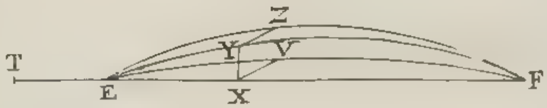



Fig 3.

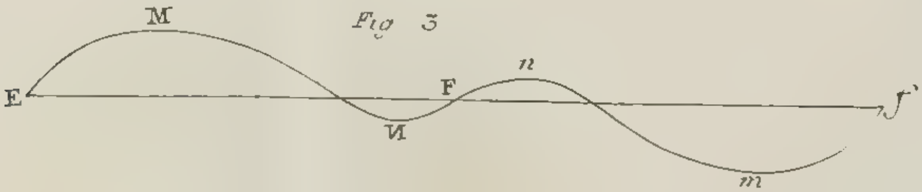



Fig 4.

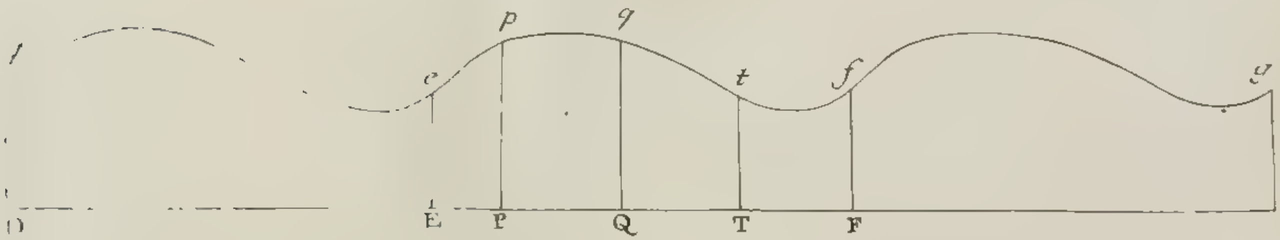
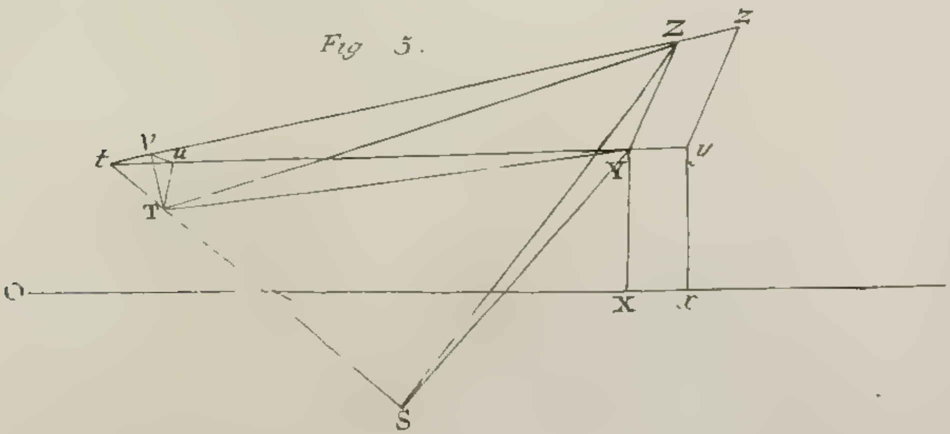
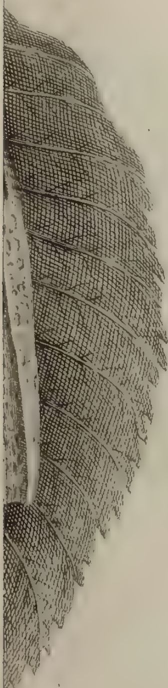
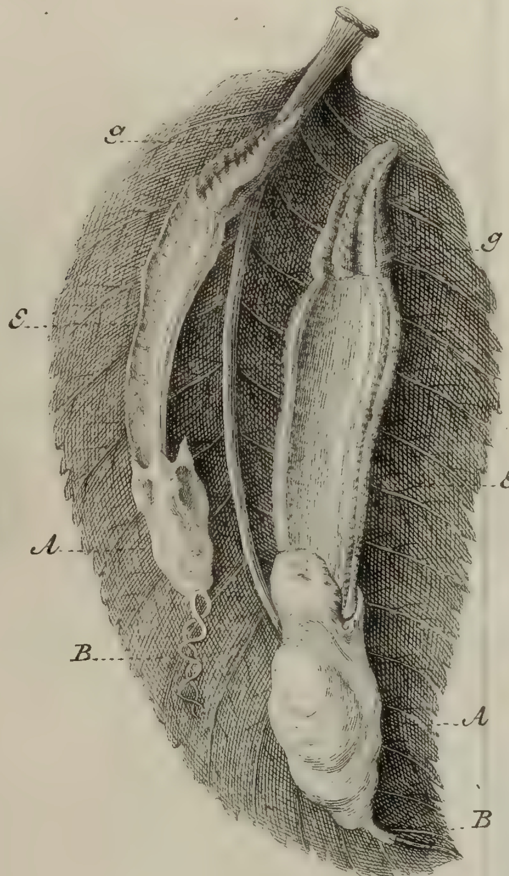



Fig 5.



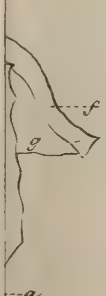
omment. Acad. Imp. Sc. Petropol. Tom. XIX. Tab. V.





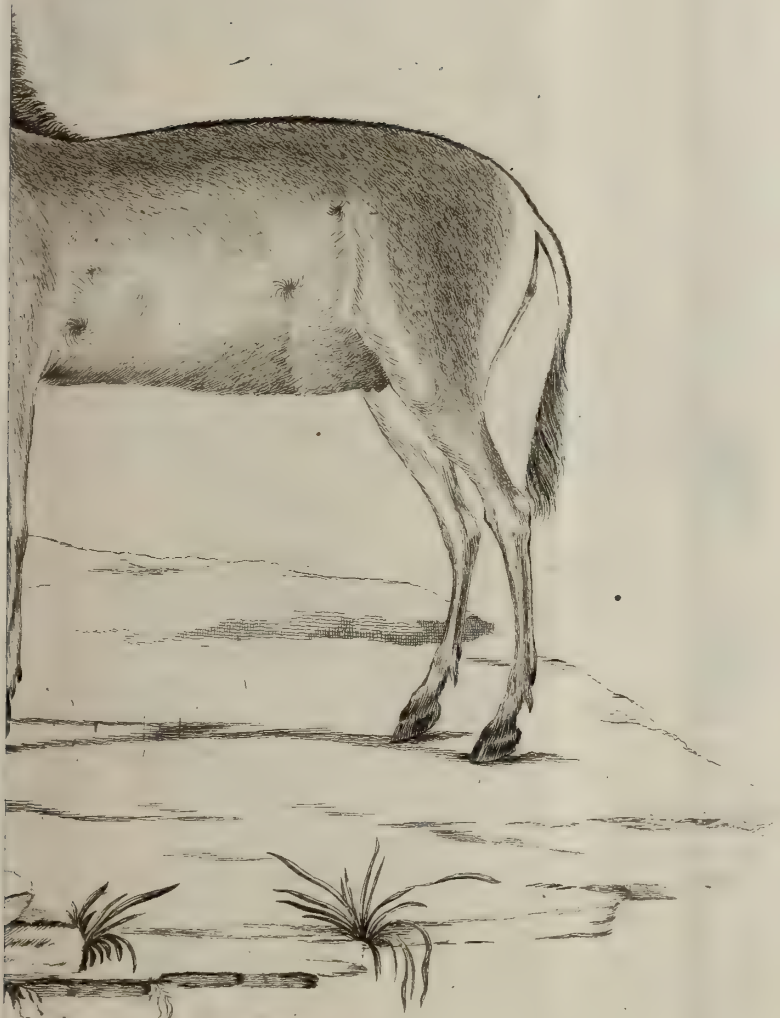





f
g
a


D
B
A
C
I
K
E
G
O
Q
P
T
V
X
W
H
F
L
M
N
S
R
Z



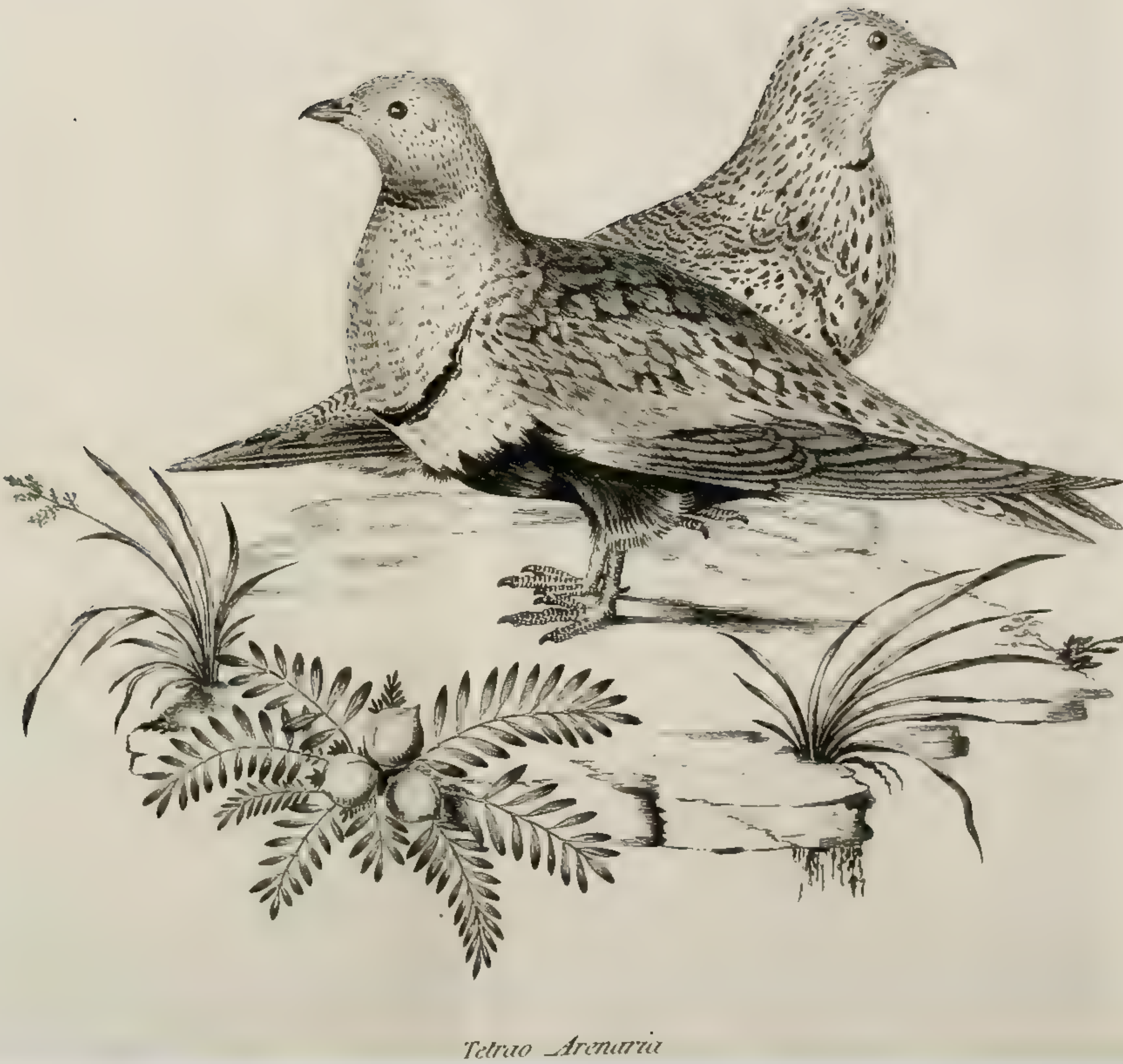


S *Hemionus*



EQUUS *Hemionus*





*Tetrao Arenaria*

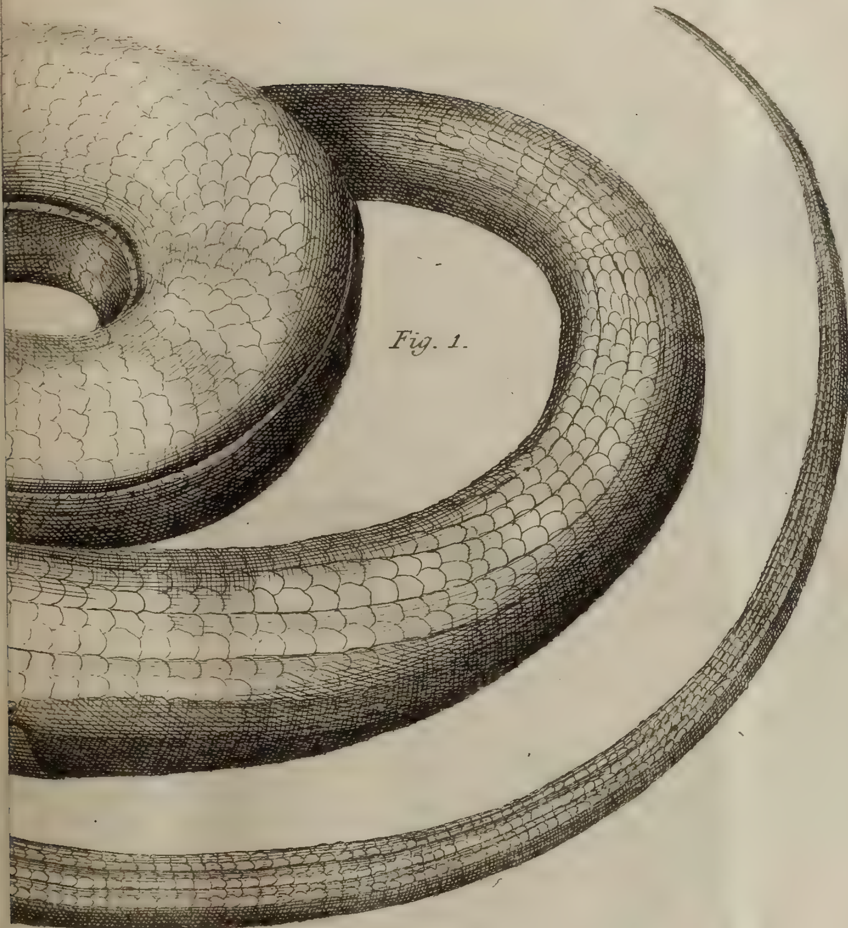
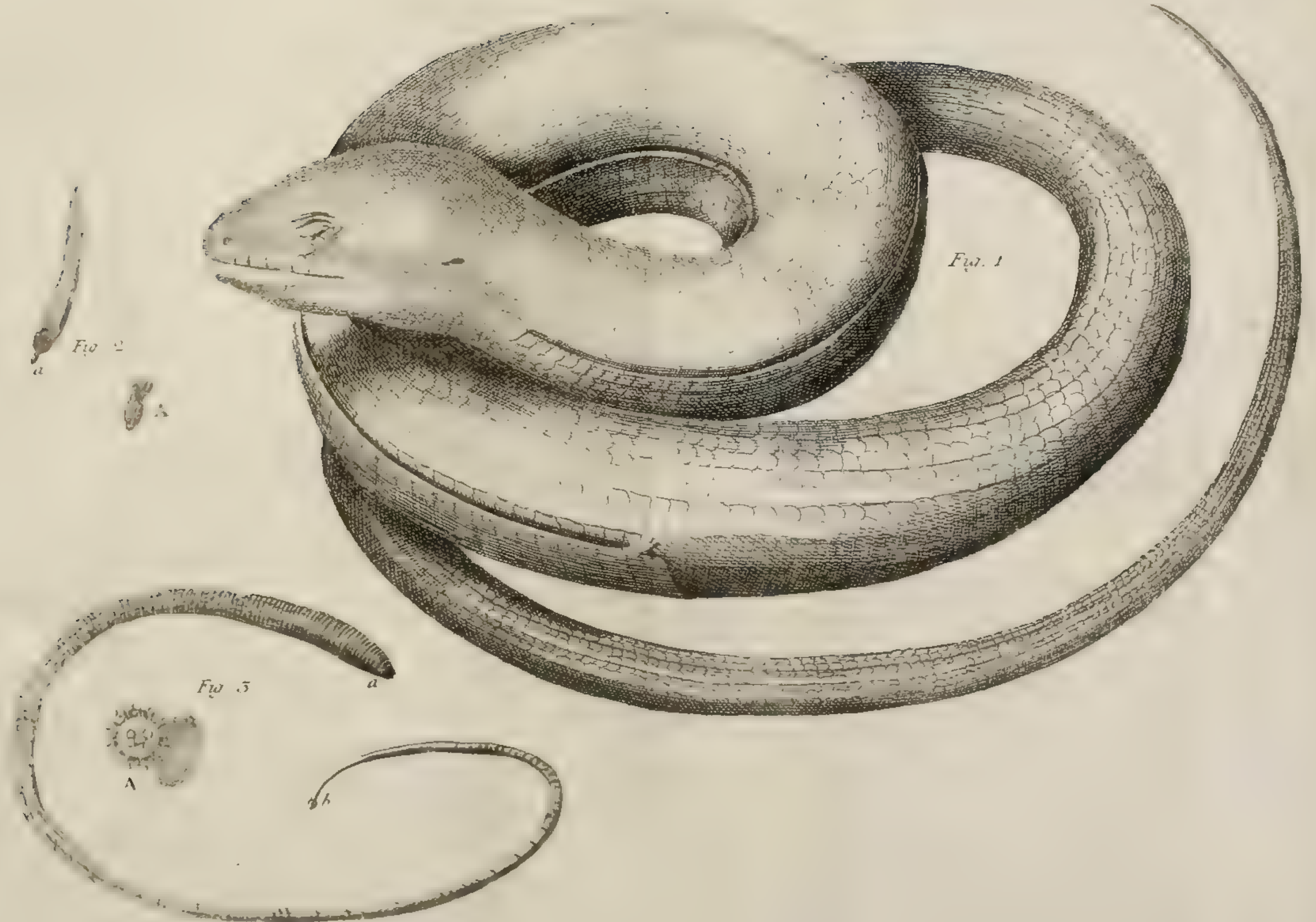


Fig. 1.


Fig. 1
Fig. 2
a
b
Fig. 3
a
A
b

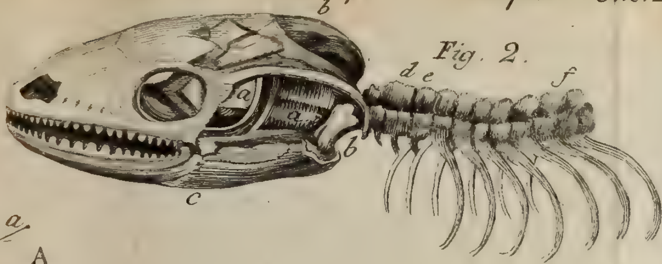



Fig. 2.

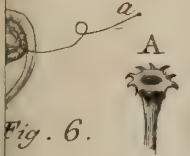



Fig. 6.

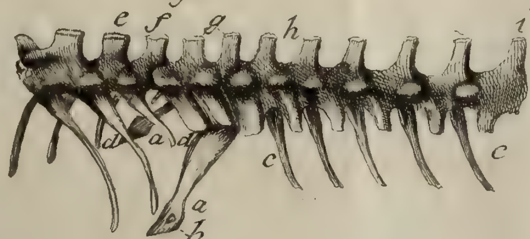



Fig. 3.

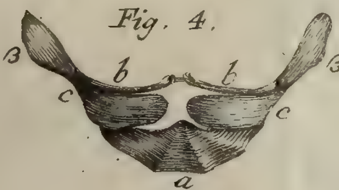
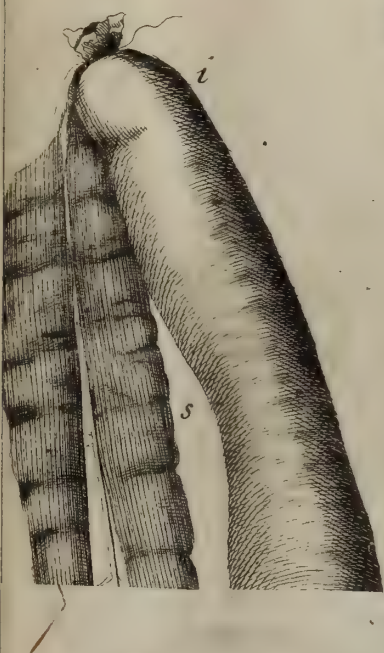
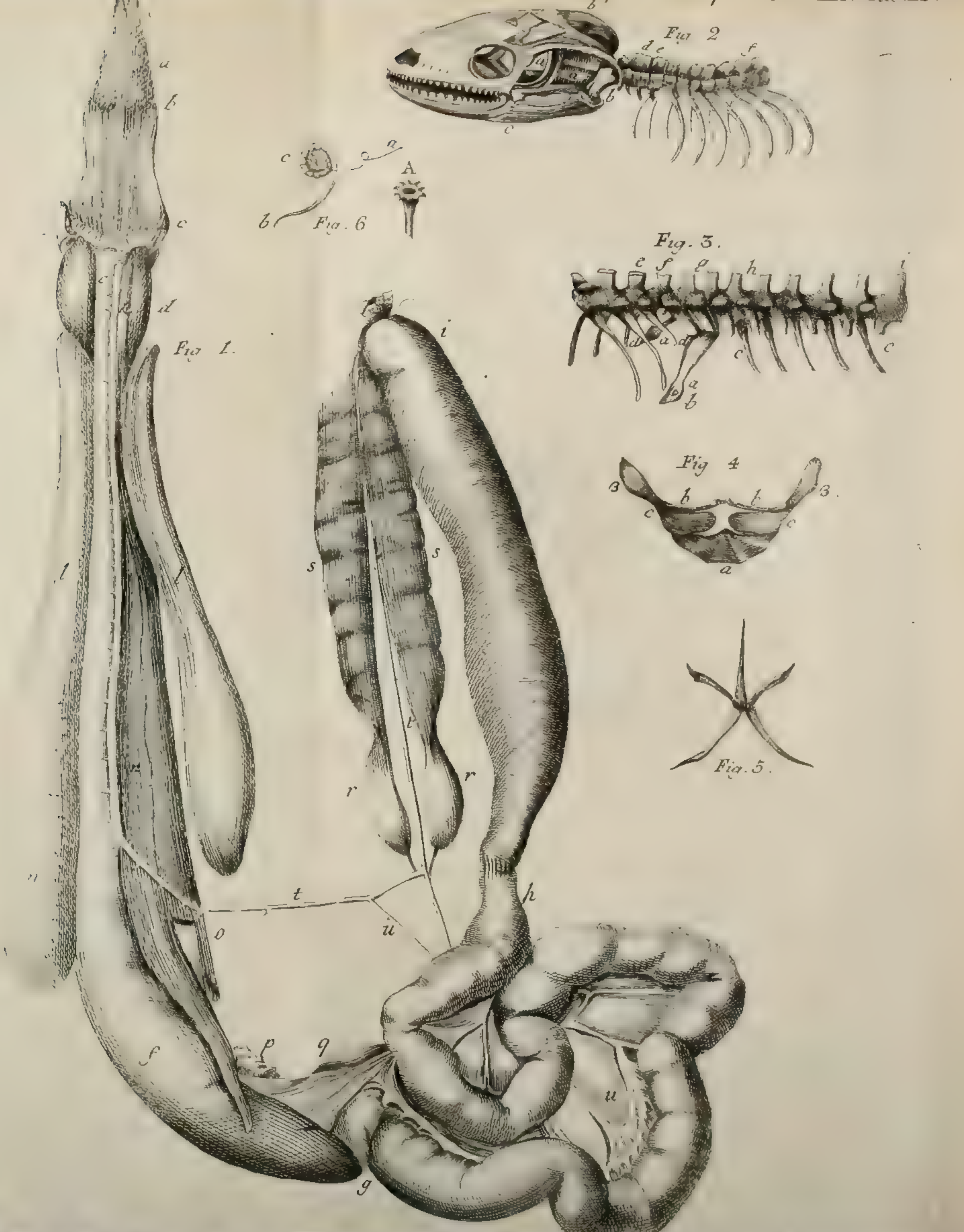


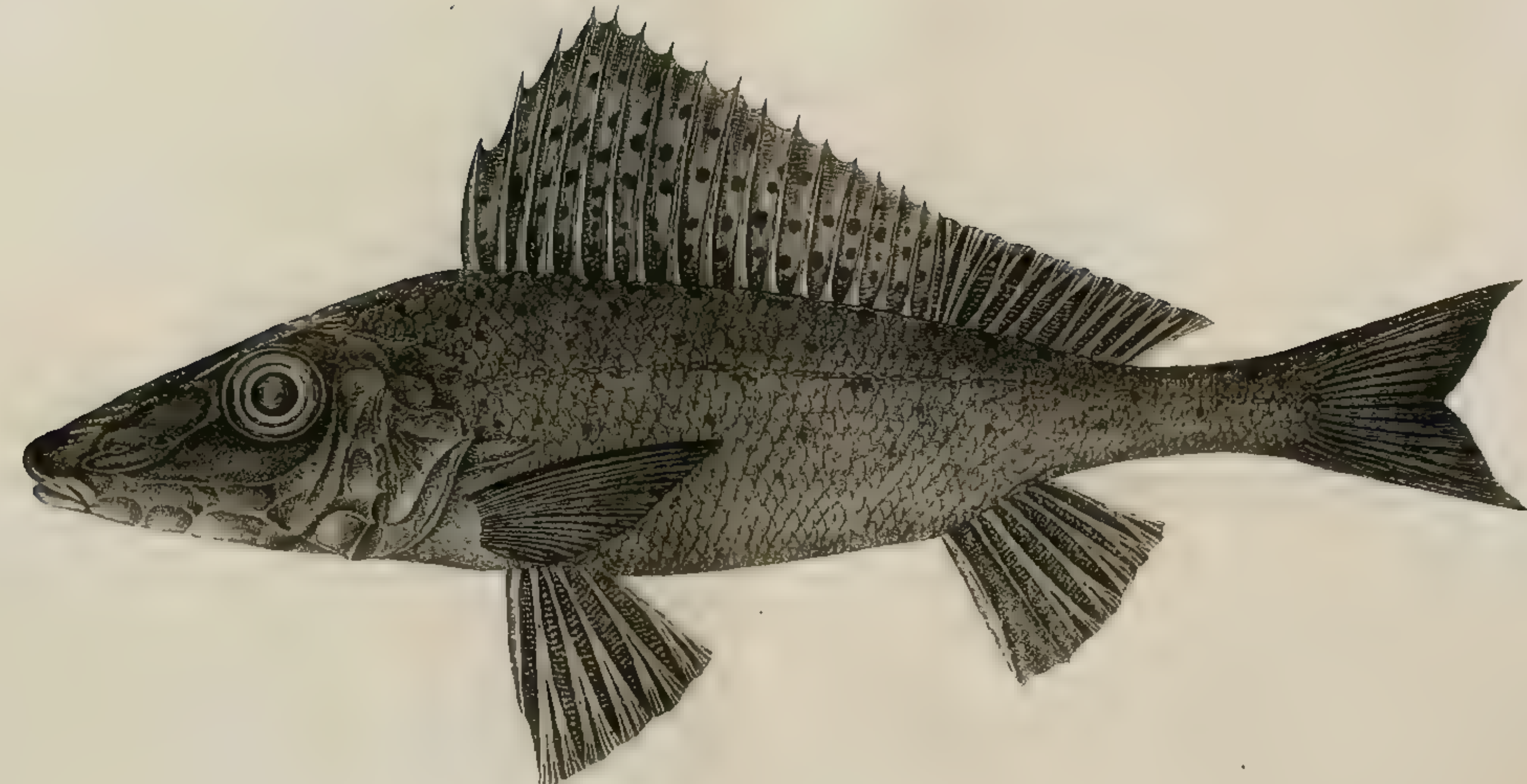

Fig. 4.



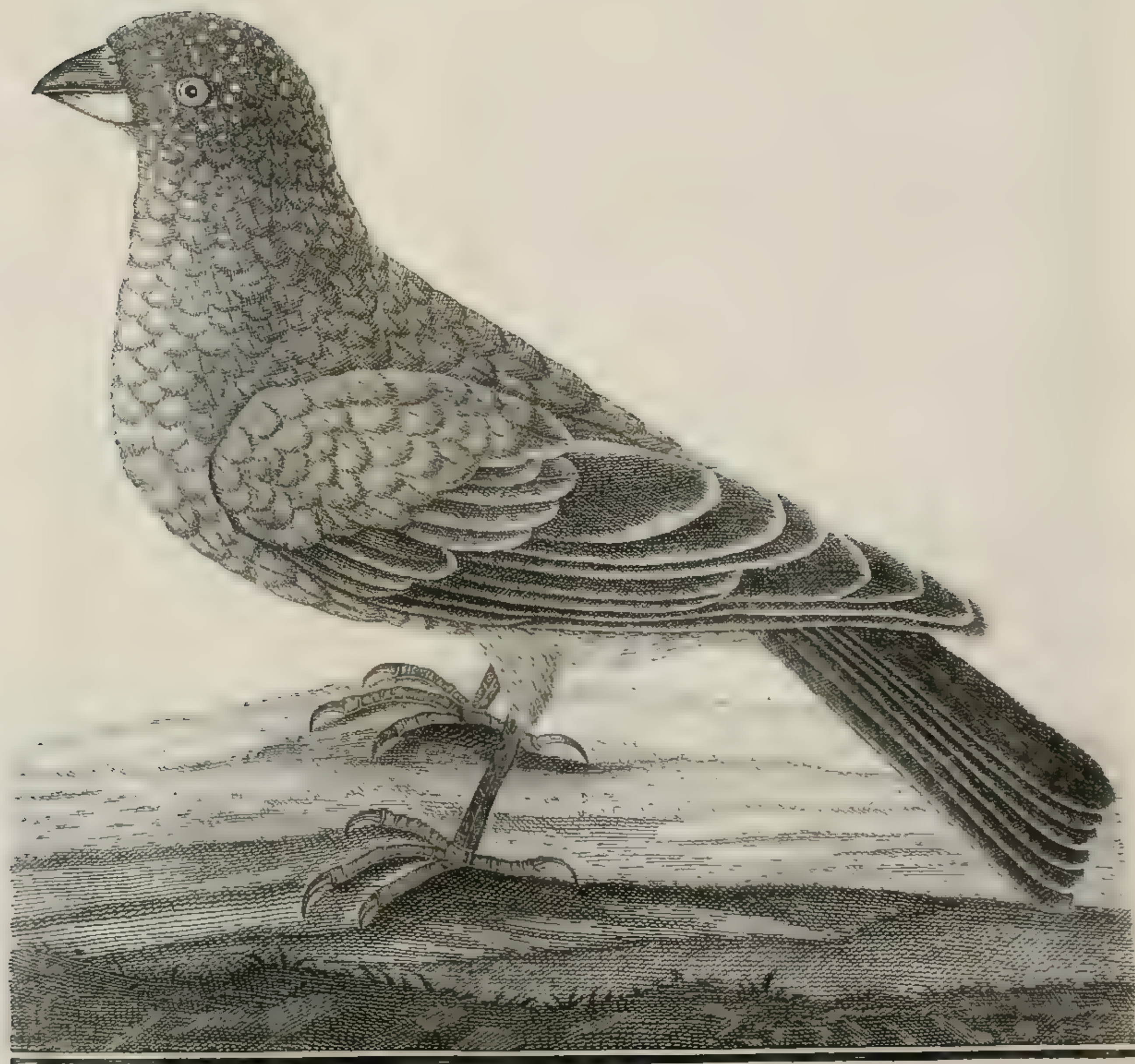




Fig 2
Fig. 6
A
Fig. 3.
Fig. 1.
Fig 4
Fig. 5.















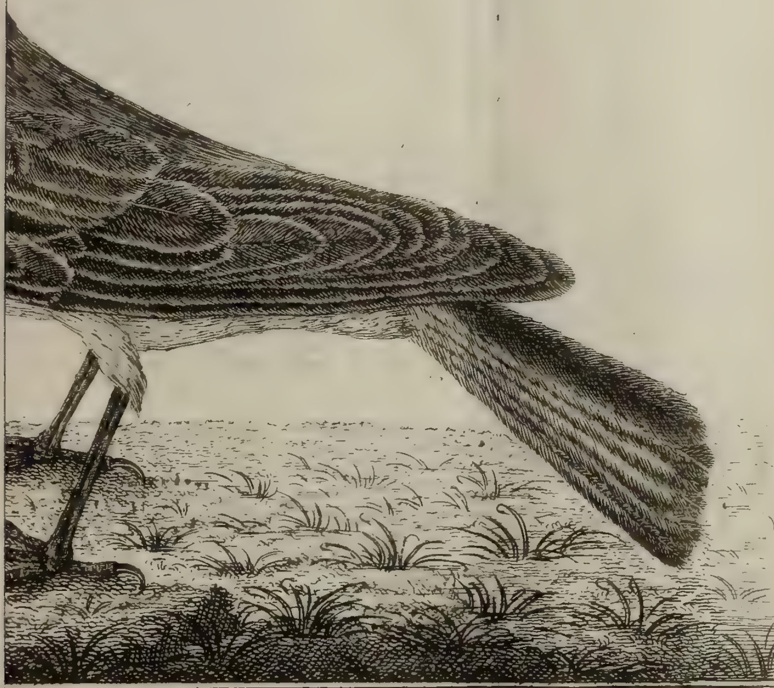


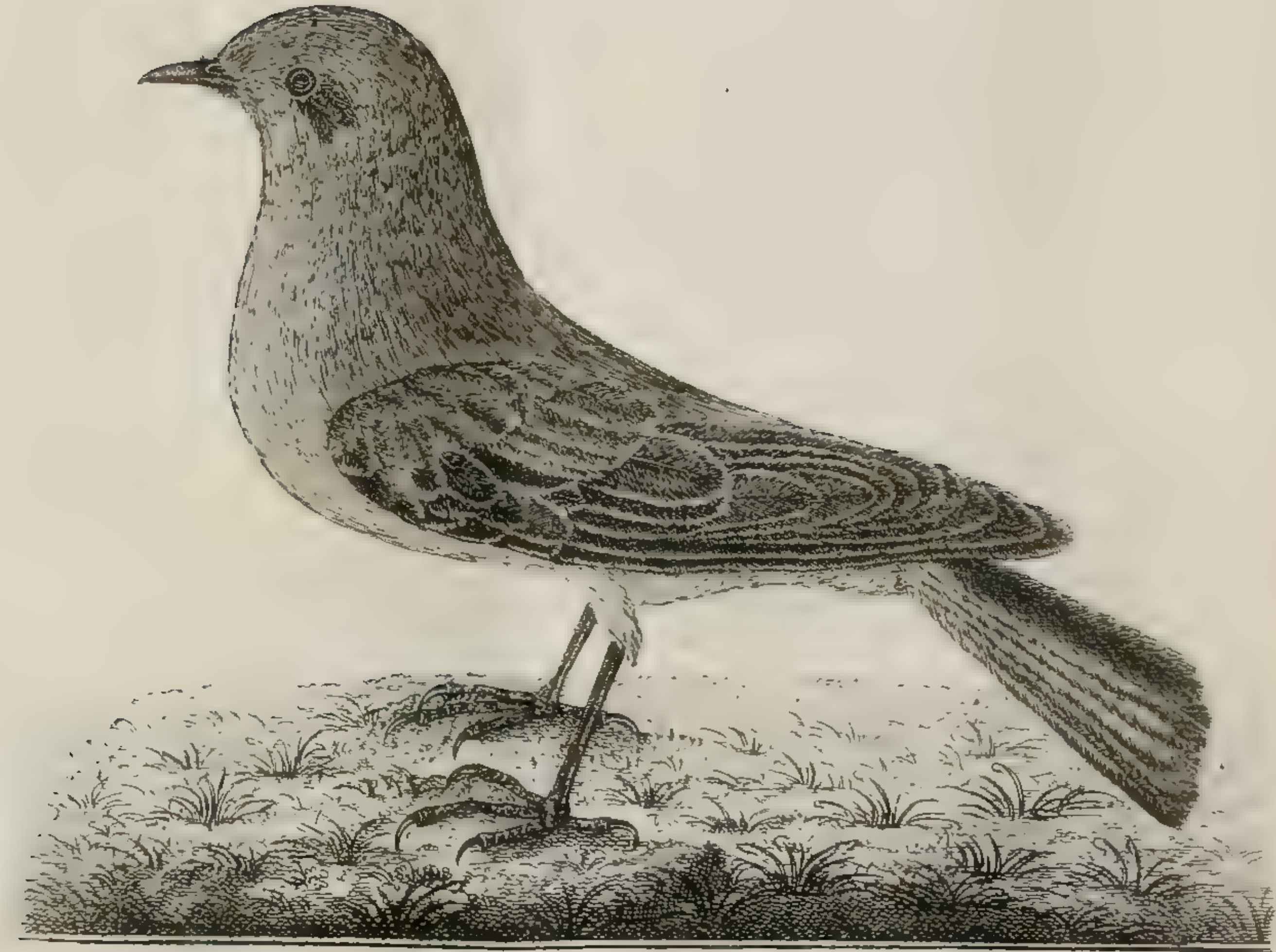


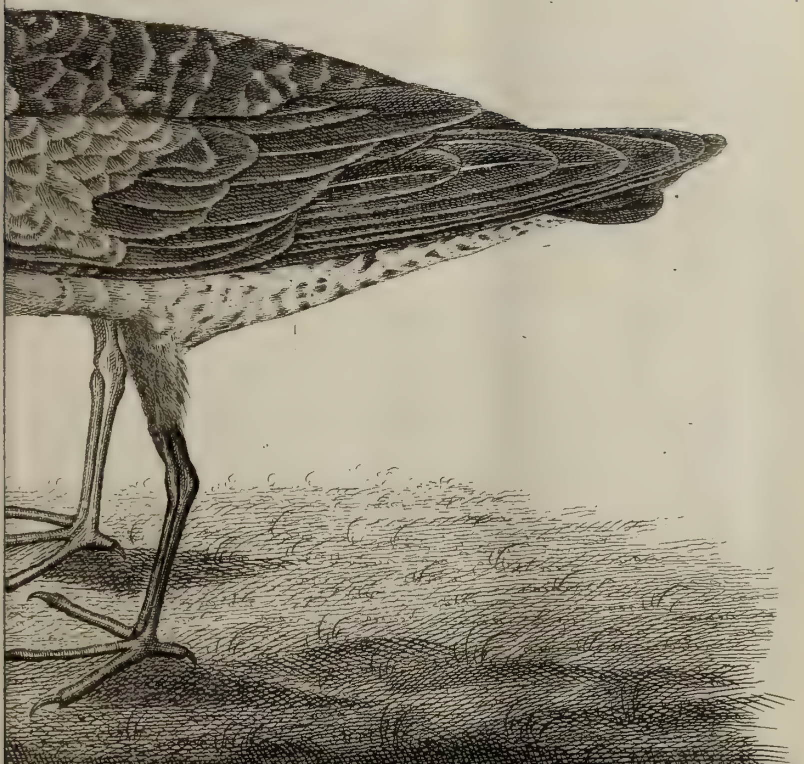








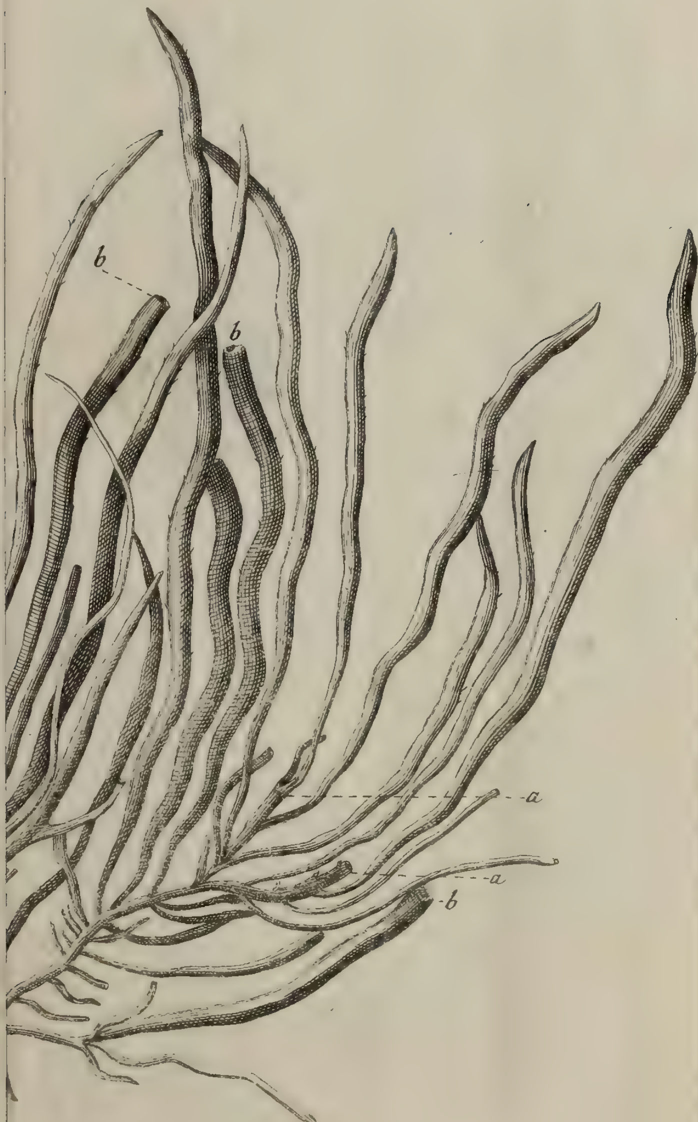


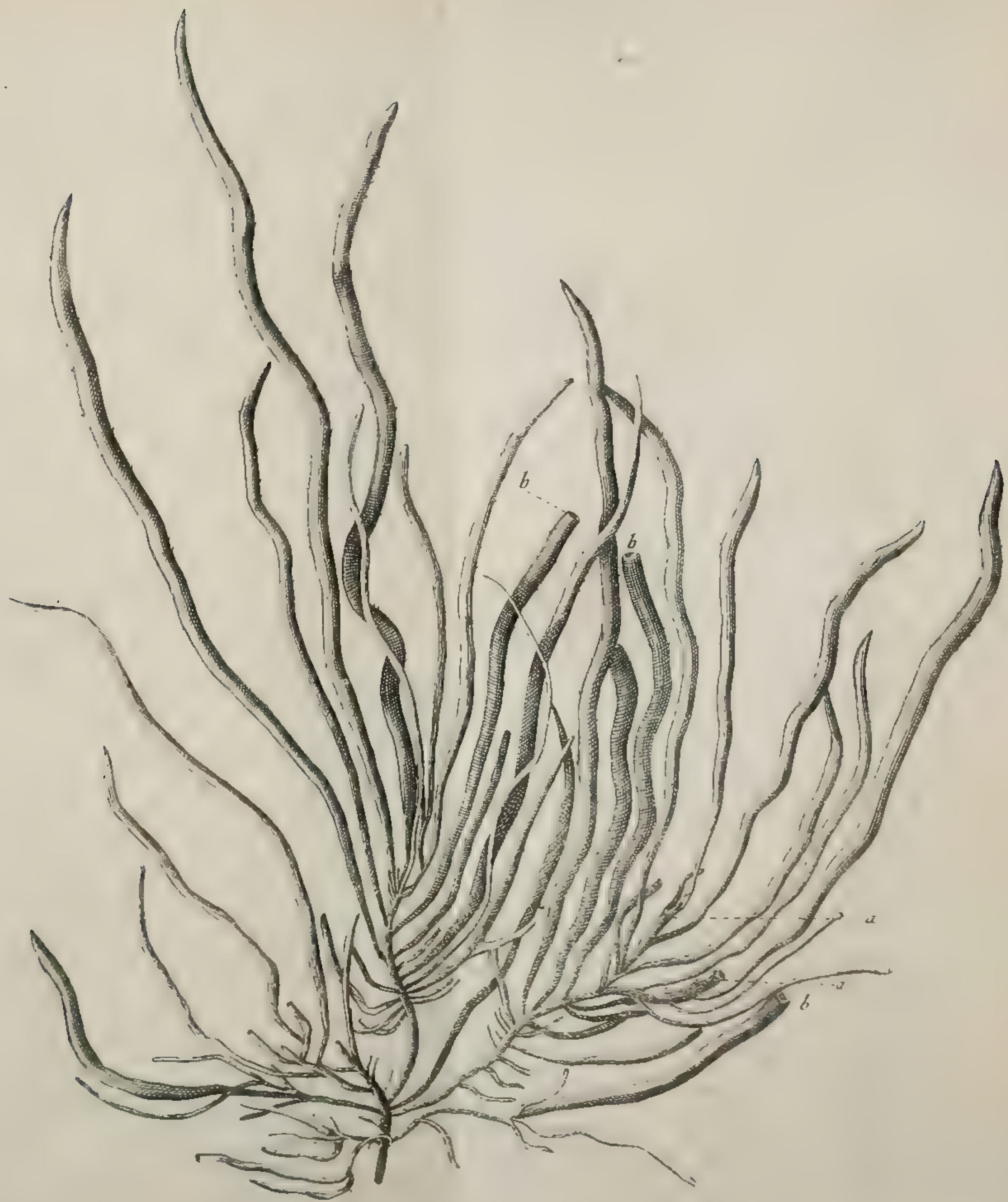









b
b
a
a
b


b
b
a
a
b



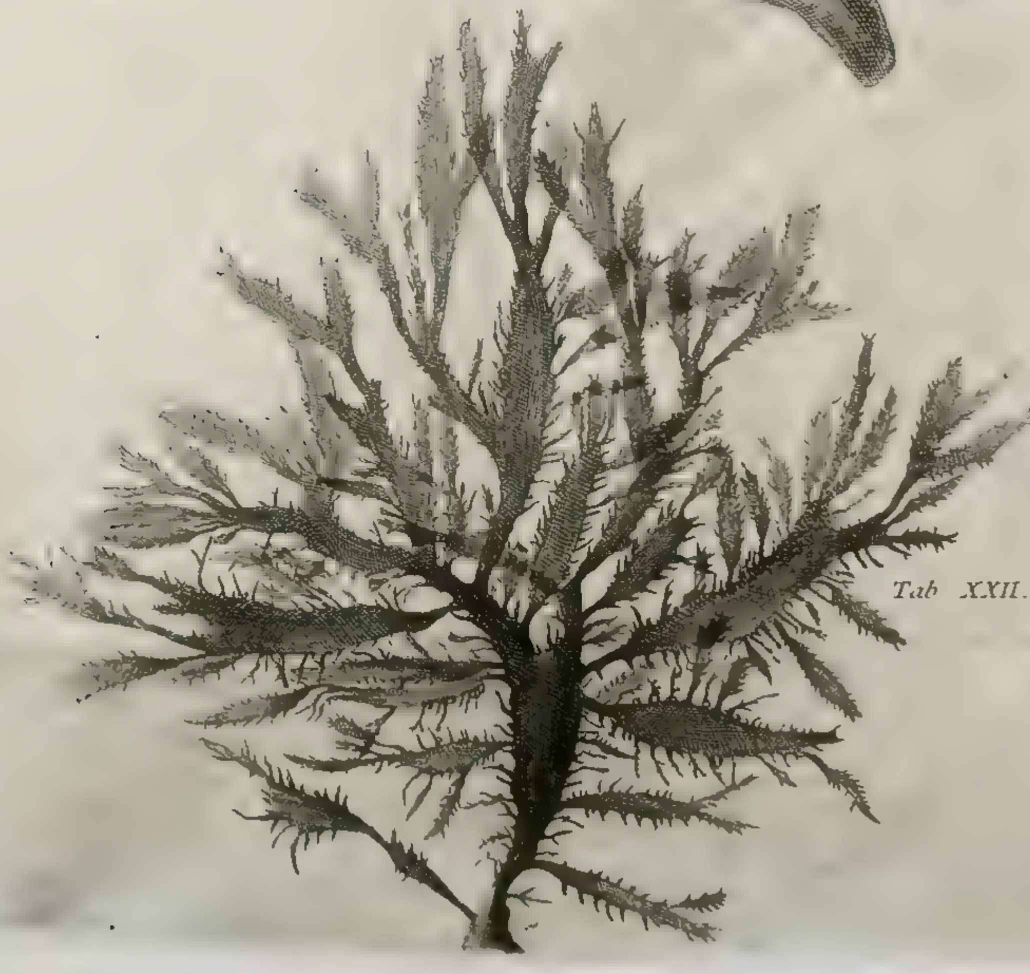
Tab. XXI.



a . c .

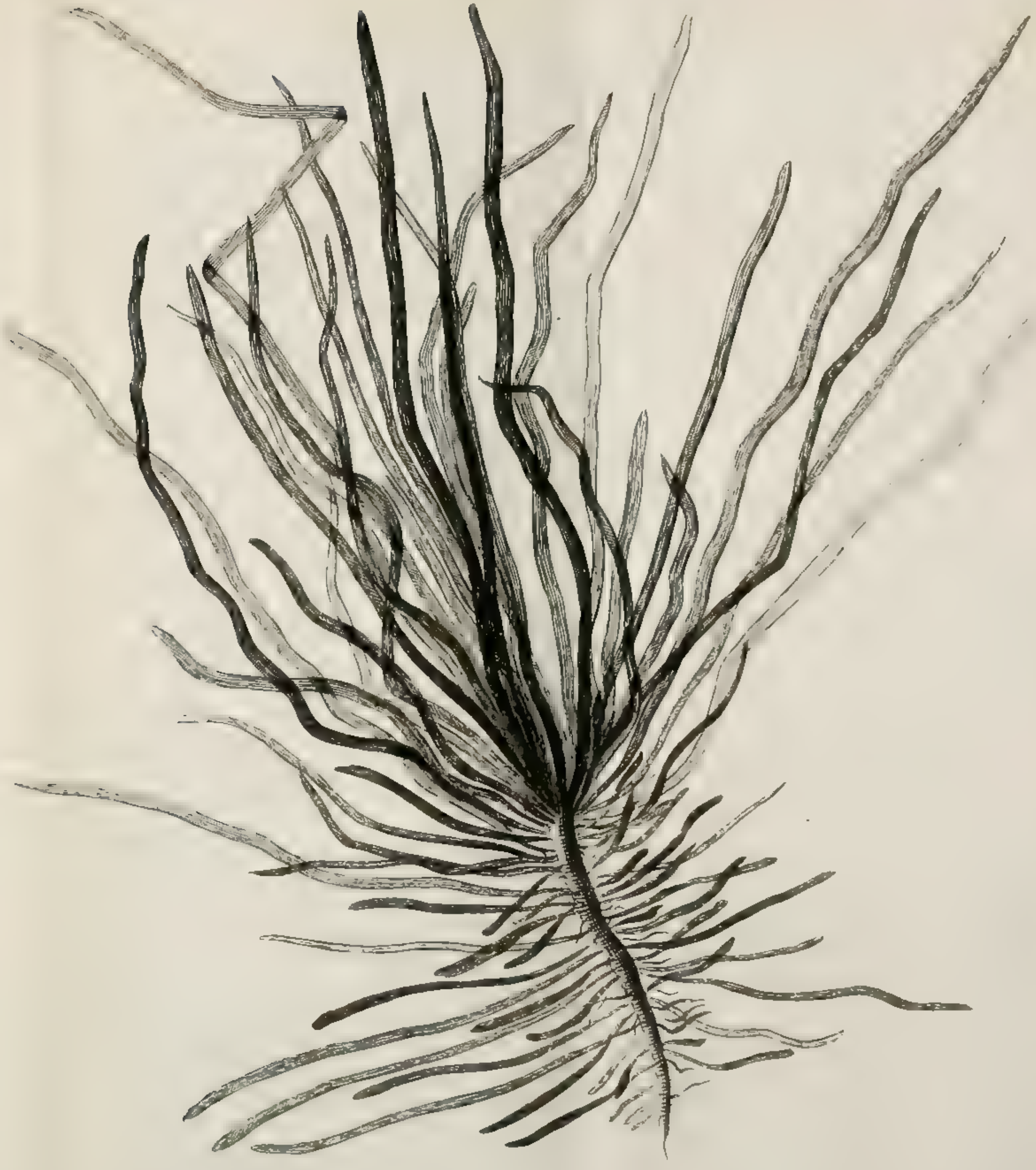



Tab. XXI.



Tab XXII.


a.
c.









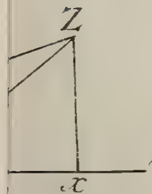
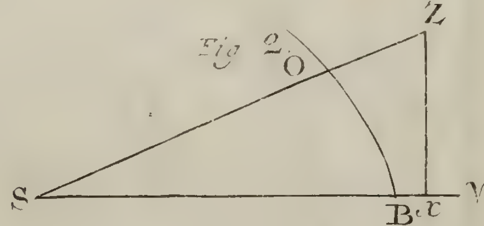



Fig. 2.




3.

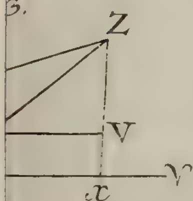



Fig. 4.

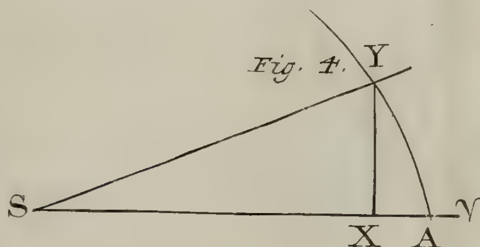



Fig. 6.

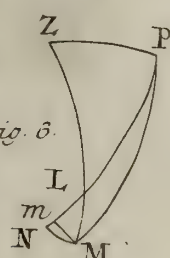
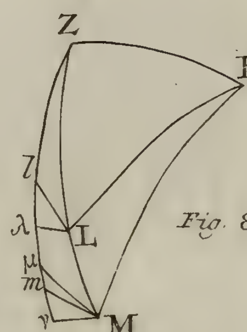



Fig. 8.



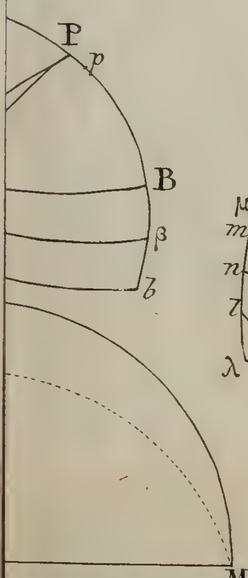




Fig. 9.

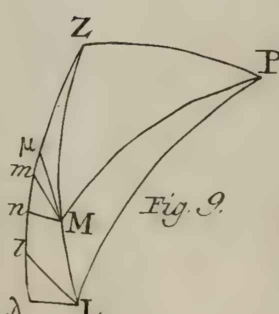
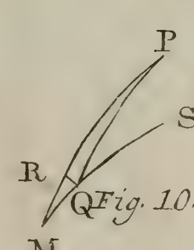
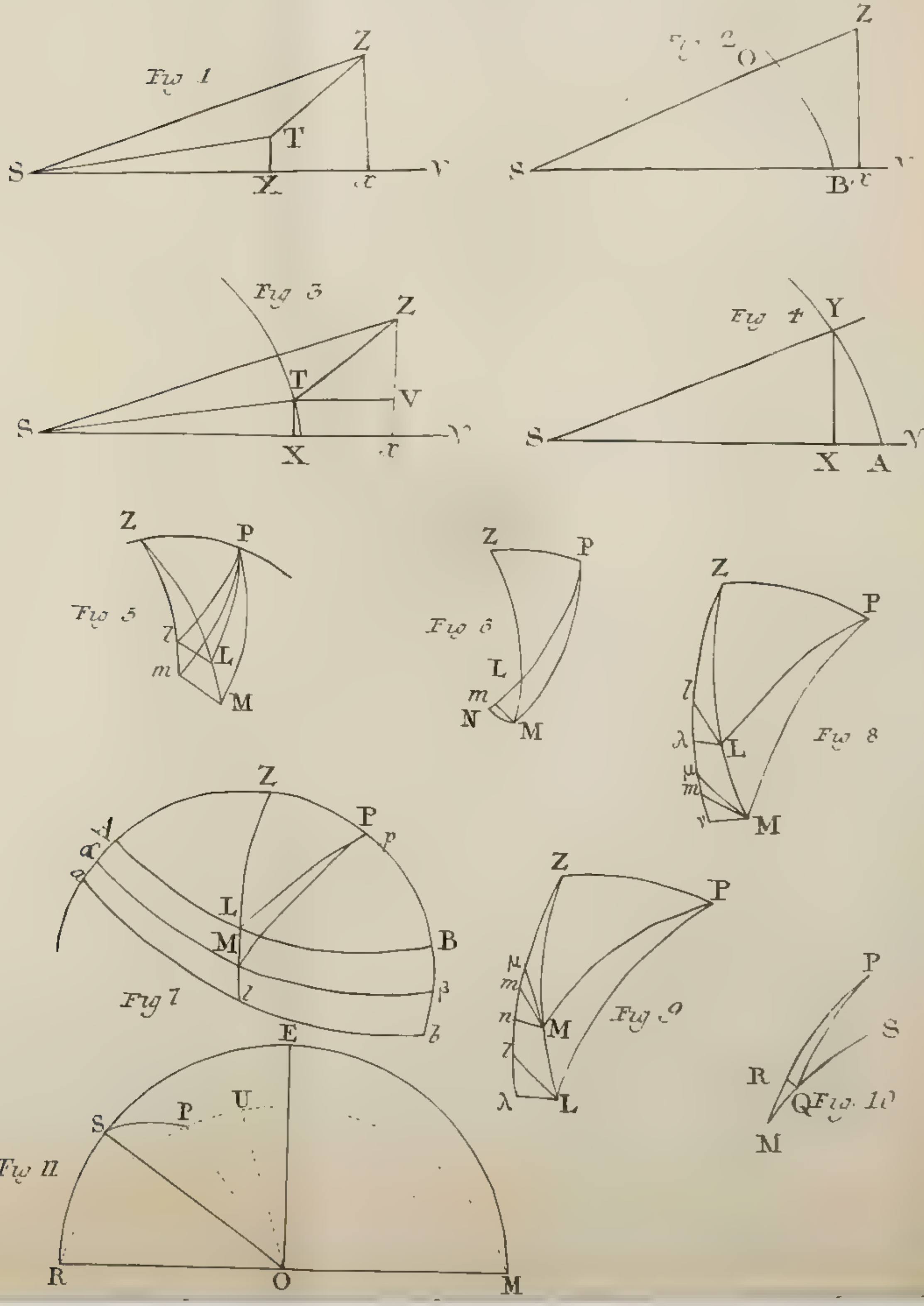
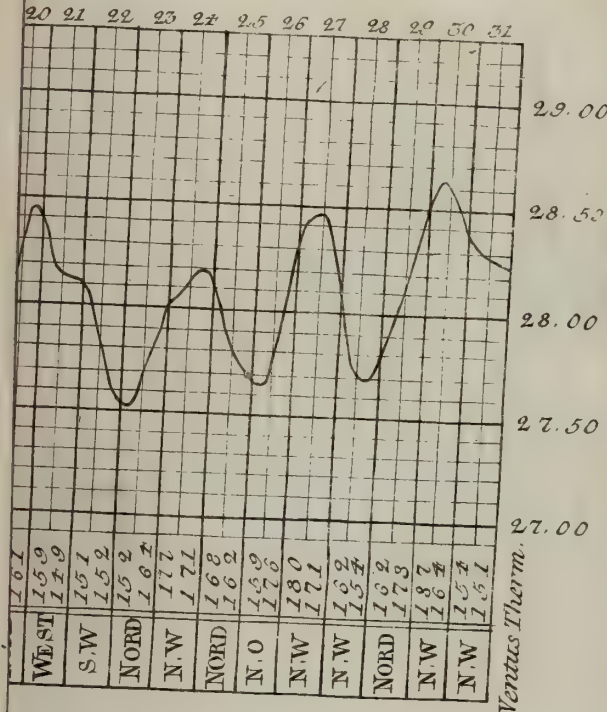



Fig. 10.




Fig 1
S
T
Z
X
x
Fig 2
Z
O
S
B
x
Fig 3
Z
T
V
S
X
x
Fig 4
Y
S
X
A
Fig 5
Z
P
l
L
m
M
Fig 6
Z
P
L
m
N
M
Fig 8
Z
P
l
λ
L
μ
m
ν
M
Fig 7
Z
P
p
A
α
a
L
M
B
β
l
b
Fig 9
Z
P
μ
m
n
M
l
λ
L
Fig 10
P
S
R
Q
M
Fig 11
E
U
S
P
R
O
M

nsem Decembris A. 1774. observatarum.

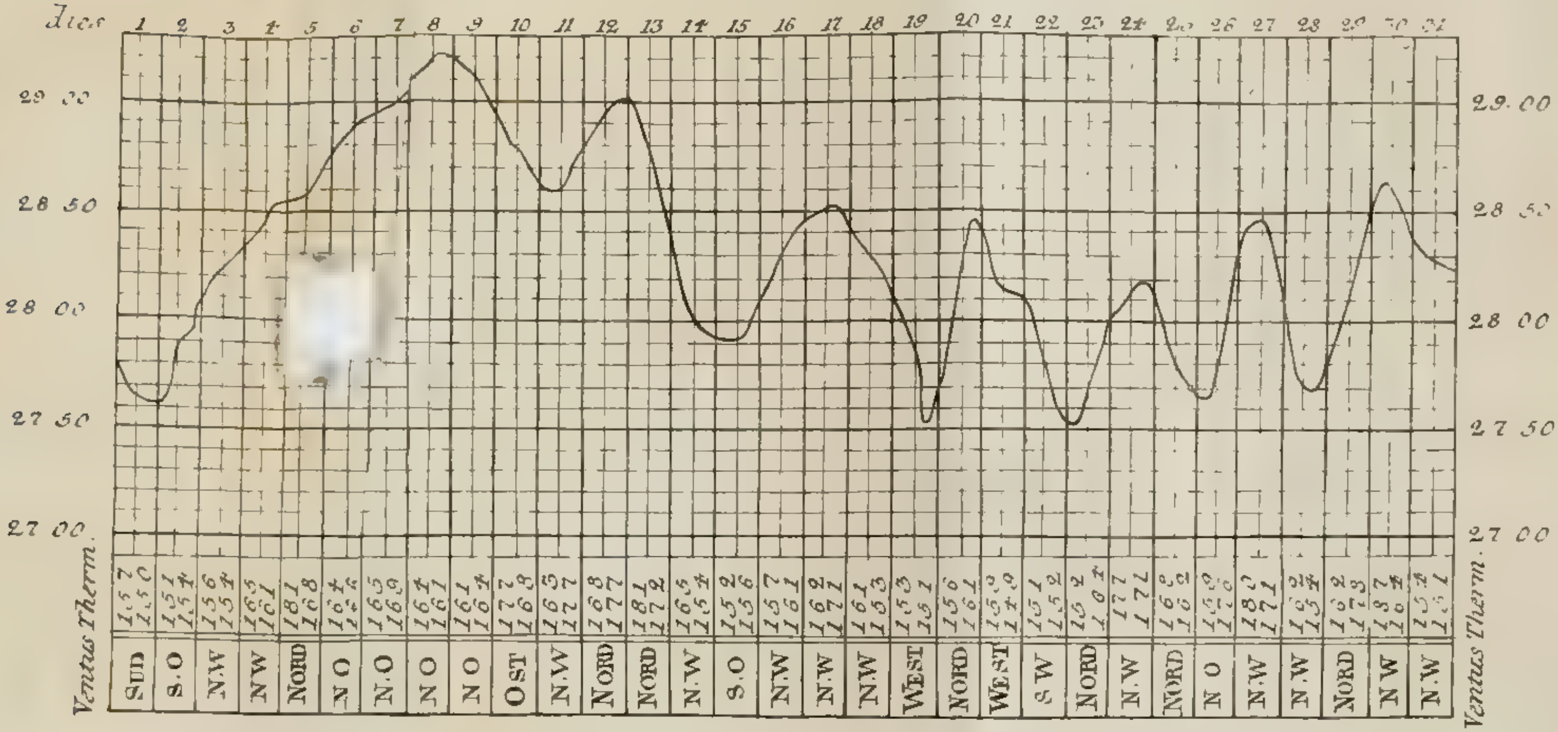



4.15.16.17.18.19.21.22.23.28.31.

5.15.16.19.

С. Максимовъ

*Tabula Variationum Barometri Petropoli, per mensem Decembris A 1771 observatarum*




*Malacia die 3.12.*

*Ventus lenis die 4.5.7.8.14.15.16. 21.24.25.26.27.*

*Ventus fortis die 1.2.9.10.11.17.18.20.23.28.29.*

*Procellosus die 6.13.19.22.30.31.*

*Coelum plane serenum die 5 et plane obductum die 8.9.12.14.15.16 17.18.19 21.22.23.28 31.*

*Nebulosum die 6.12.17.27.28.*

*Nix die 3 6.7.11.12.14.18.22 23.25.26.30. Nix copiosa die 1.13.15.16.19.*

Г. Максимовъ

BOUND BY
EX LIBRIS